École Normale Supérieure **2007-2008**
Département d'Informatique

Algorithmique et Programmation
TD n° 6 : Flots

Exercice 1. Un paramètre représentant la résistance aux pannes d'un graphe non orienté G est le nombre minimum d'arêtes à retirer de G pour le déconnecter. Proposer un algorithme qui calcule ce nombre en utilisant un algorithme à flot.

Exercice 2. Soit $G = (V, E)$ un réseau de transport de capacités entières et soit f un flot maximal de G.

1. Supposons que la capacité d'une arête $(u, v) \in E$ est augmentée de 1. Donner un algorithme de complexité $O(E)$ qui met à jour le flot maximal f.
2. Supposons que la capacité d'une arête $(u, v) \in E$ est diminuée de 1. Donner un algorithme de complexité $O(E)$ qui met à jour le flot maximal f.

Exercice 3.

1. Un *problème de flot avec contraintes sur les sommets* est un problème de flot classique auquel sont ajoutées des contraintes supplémentaires : à chaque sommet i est associé un réel $u(i)$ exprimant que la somme des flots entrants en i doit être inférieure ou égale à $u(i)$.

   Réduire le problème de flot avec contraintes sur les sommets à un problème de flot.
2. Considérons un graphe non orienté $G = (V, E)$ ayant n sommets et deux sous ensembles Y et Z de V (non nécessairement disjoints) ; les éléments de Y sont les places et les éléments de Z les issues. Un *plan d'évacuation* est un ensemble de chemins menant d'une place à une issue, dont les sommets de tous les chemins sont disjoints dans le graphe. Déterminer un plan d'évacuation *optimal* consiste à trouver un plan d'évacuation contenant le nombre maximal de chemins.

   Réduire le problème de la détermination d'un plan d'évacuation optimal à un problème de flot avec contraintes sur les sommets.
3. En déduire un algorithme de recherche d'un plan d'évacuation optimal.

Exercice 4 (Théorème de König)**.** Un graphe orienté $G = (V, E)$ est dit *biparti* si il existe une partition (X, Y) de V telle que $E \subseteq X \times Y$.

Un *couplage* M d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $M \subseteq E$ tel que tout sommet $v \in V$ est adjacent à au plus une arête de M.

Un *ensemble couvrant de sommets* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $U \subseteq V$ tel que toute arête $e \in E$ est adjacent à au moins un sommet de U.

1. Montrer (en utilisant le lien couplage maximal – flot maximal) que dans un graphe biparti, le cardinal d'un couplage maximal est égale à celui d'un ensemble couvrant de sommet minimal.
2. **Application.** Au cours du bal annuel il y a n femmes et n hommes, chaque femme choisit $k < n$ cavaliers possibles pour la soirée. Leurs choix sont tels que chaque homme a été choisi exactement k fois. Montrer en que l'on peut répartir les cavaliers de façon telle que toutes les personnes puissent danser.

Exercice 5 (Théorème de Hall)**.** Un *couplage parfait* est un couplage dans lequel chaque sommet est couvert.

Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti non orienté ayant la partition de sommets $V = L \cup R$ où $|L| = |R|$. Pour $X \subseteq V$, on définit le voisinage de X par

$$V(X) = \{y \in V ; \exists x \in X, (x, y) \in E\}.$$

Montrer (en utilisant le théorème « flot maximal & coupe minimale ») qu'il existe un couplage parfait dans G si et seulement si $|A| \leq |V(A)|$ pour tout sous-ensemble $A \subseteq L$.

Exercice 6. Un recouvrement d'un graphe orienté est un ensemble P de chemins à sommets disjoints tel que tout sommet soit inclus dans exactement un chemin de P. Les chemins peuvent commencer et se terminer n'importe où, et éventuellement ne contenir qu'un sommet. Un recouvrement minimal est un recouvrement par chemins contenant le moins de chemins possibles.

1. Donner un algorithme efficace dans le cas d'un graphe orienté sans circuit $G = (V, E)$. On pourra considérer le graphe $G' = (V', E')$ en supposant que $S = \{1, \ldots, n\}$ et

$$\begin{aligned} V' &= \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \\ E' &= \{(x_0, x_i); i \in V\} \cup \{(y_i, y_0); i \in V\} \cup \{(x_i, y_i); (i, j) \in E\} \end{aligned}$$

   En déduire la valeur du recouvrement minimal en fonction du nombre de sommets du recouvrement et du nombre de chemins.

2. Pourquoi l'algorithme ne fonctionne pas pour les graphes orientés contenant des circuits ?

Exercice 7. Soit Φ la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. Ce nombre est *irrationnel.* Considérons le réseau de transport présenté ci-dessous où les capacités des arêtes e_1, e_2 et e_3 sont respectivement 1, Φ et 1 et la capacité des autres arêtes est un entier $M \geq 4$ arbitraire. Calculer le flot maximal de ce réseau et montrer que le processus consistant à choisir itérativement un chemin améliorant sans discrimination dans ce réseau peut ne pas terminer en un temps fini.