PROBABILITÉS

ET VARIABLES ALÉATOIRES

Cahier d'exercices

Christina Pawlowitsch
Maître de Conférences à l'Université Panthéon-Assas, Paris II

Janvier 2016

Chapitre 1

Ensemble fondamental, événement, tribu, probabilité

Exercice 1

Donnez un exemple d'une expérience aléatoire qui conduit à un ensemble fondamental (a) fini, (b) infini dénombrable, (c) infini continu. Pour chacun de ces cas, définissez explicitement Ω et donnez un exemple d'une tribu sur Ω.

Exercice 2

Soit Ω un ensemble fondamental fini avec n éléments. Donnez des exemples avec $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$. Pour chacun de ces cas : écrivez explicitement $\mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω, et déterminez le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$. (Pourrez-vous former une hyopthèse concernant le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$ pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque ? Voir l'exercice 11.)

Exercice 3

Résultat : Soit A un sous-ensemble de l'ensemble fondamental Ω. Alors, la famille $\mathscr{A} = \{\Omega, \emptyset, A, \overline{A}\}$ est une tribu sur Ω.

<u>Problème :</u>

(a) Vérifiez ce résultat.
(b) La famille $\mathscr{A}' = \{A, \overline{A}\}$, est-elle aussi tribu sur Ω ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$. Donnez toutes les tribus que l'on peut engendrer par le résultat cité à l'exercice 3.

Exercice 5

Soit l'ensemble fondamental Ω et soient A, B, et C trois événements, c'est-à-dire, des sous-ensembles de Ω. Exprimez à l'aide des opérations ensemblistes les événements suivants :

(a) A, B et C se produisent :
(b) Au moins l'un des événements se produit :
(c) Le complément de A se produit :
(d) Le complément du complement de A se produit :
(e) A se produit mais pas B :
(f) A et B se produisent mais pas C :

(g) Deux événements au moins se produisent :
(h) Un événement au plus se produit :
(i) Aucun des trois événements ne se produit :
(j) Exactement deux événements se produisent :

Exercice 6

Soient Ω l'ensemble fondamental et A et B des sous-ensembles de Ω. Démontrez que :

$$(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B.$$

(Remarque : Il convient de se servir de la distributivité des opérations intersection et union l'une par rapport à l'autre.)

Exercice 7

Dans une classe bilingue français-anglais à Paris il y a des élèves de nationalité française, anglaise, et américaine. Il y a des filles et des garçons. Tous les élèves sont nés soit en France, soit au Canada, soit en Angleterre, soit aux Etats-Unis, soit au Japon.

(a) Quels sont les ensembles fondamentaux Ω que l'on peut retenir ?
(b) Pour chaque ensemble fondamental Ω retenu, définissez une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω.
(c) Pour chacune des tribus que vous avez définies au point précédent, donnez un exemple d'une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et vérifiez que cette probabilité satisfait bien à la propriété dite de σ-additivité.

Exercice 8

Soit $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ l'ensemble fondamental.

(a) On considère la partition de Ω suivante :

$$\Pi = \{\{a, b\}, \{c, e\}, \{d\}\}.$$

Quelle est la tribu $\mathscr{A}_\Pi$ engendrée par la partition Π ? Imaginons que l'expérience aléatoire associée à Ω consiste à répertorier les accents des gens croisés dans les couloirs dans le département d'anglais d'une université et que les événements élémentaires a, b, c, d et e représentent des accents différents de l'anglais : « a » représente un accent britannique, « b » un accent australien, « c » un accent du nord des Etats-Unis et « d » un accent du sud des Etats-Unis, et e un accent canadien. Si la partition Π représente l'information apportée à Monsieur K. quand il croise des gens dans les couloirs de ce département, comment interprétez vous cette partition ?

(b) Supposons que Madame I. peut distinguer un accent anglais d'un accent australien, mais qu'elle ne peut pas distinguer parmi un accent du nord des Etats-Unis, un accent du sud des Etats-Unis et un accent canadien. Quelle est la partition de Ω qui représente son information ?
(c) Quelle est la partition d'information de Ω de quelqu'un qui peut distinguer chacun des cinq accents ?
(d) Quelle est la partition d'information de Ω de quelqu'un qui ne peut distinguer aucun des cinq accents ?
(e) Pour chacune des partitions définies aux points (a)–(d), écrivez $\mathscr{A}_\Pi$, la tribu engendrée par cette partition.
(f) Supposons que dans ce département il y a 14 personnes : 5 avec un accent britanique, 3 avec un accent australien, 3 avec un accent du nord des Etats-Unis, 1 avec un accent du sud des Etats-Unis, et 2 avec un accent canadien. Lorsqu'on se promène dans les couloirs de ce département, la probabilité de croiser l'un de ces individus est la même pour chacun de ces individus. Pour chacune des partitions définies aux points (a)–(d), donnez la probabilité sur

$(\Omega, \mathscr{A}_{\Pi})$ qui reflète ces données. (Pour cet exercice, supposez que Monsieur K. et Madame I. et les individus representés par les autres partitions d'information donnée au points (d) et (e), sont des visiteurs externes qui arrivent à des jours différents et qu'il y a aucune probabilité de croiser quelqu'un dans ce département qui n'soit pas l'un de ses membres.)

Complément : Supposez maintenant que Monsieur K. et Madame I. arrivent le même jour et qu'ils se promènent ensemble dans les couloirs de ce département. Chacun connaît la partition d'information de l'autre. Ils croisent quelqu'un qui a un accent austrialien. Monsieur K., va-t-il savoir qu'il s'agit de quelqu'un qui a un accent australien ? Madame I., va-t-elle savoir qu'il s'agit de quelqu'un qui a un accent australien ? Est-ce que Monsieur K. va savoir si Madame I. sait qu'il s'agit de quelqu'un qui a un accent australien ? Est-ce que les deux vont savoir que l'autre sait qu'il ne s'agit pas de quelqu'un qui ait un accent américain ?

Exercice 9

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ l'ensemble fondamental dont les événements élémentaires sont les 10 élèves d'une classe bilingue anglais-français. Soit E un autre ensemble fondamental dont les événements élémentaires sont langue maternelle « français », « anglais britannique » et « anglais américain ». $\mathscr{P}(\Omega)$ dénote l'ensemble des parties de Ω ; $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble des parties de E. Remarquons que $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω et $\mathscr{P}(E)$ une tribu sur E. En outre, soit X une application de Ω dans E avec :

$X(1) =$ « français »	$X(6) =$ « anglais américain »
$X(2) =$ « français »	$X(7) =$ « anglais britannique »
$X(3) =$ « anglais britannique »	$X(8) =$ « anglais britannique »
$X(4) =$ « anglais américain »	$X(9) =$ « français »
$X(5) =$ « français »	$X(10) =$ « français »

Problème :

(a) Rappelez la définition d'une *variable aléatoire*.
(b) Vérifiez si X est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ dans $(E, \mathscr{P}(E))$, où P est la probabilité définie par la loi uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ (c'est-à-dire, l'équiprobabilité des événements élémentaires).
(c) Quelle est la tribu sur Ω engendrée par X ?
(d) Déterminez la probabilité image de P par X.

Exercice 10

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω. Les événements élémentaires de Ω représentent les états d'un marché : ω_1 représente une hausse de longue durée, ω_2 une hausse de courte durée, ω_3 une baisse de longue durée et ω_4 une baisse de courte durée. Tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité de se réaliser ; P représente cette probabilité. En outre, soit $(E, \mathscr{B})$ un espace probabilisable avec $E = \{\text{signal 1, signal 2}\}$, et $\mathscr{B} = \mathscr{P}(E)$, l'ensemble des parties de E, et soit X une application de Ω dans E donnée par :

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= \text{signal 1} \\ X(\omega_2) &= \text{signal 2} \\ X(\omega_3) &= \text{signal 1} \\ X(\omega_4) &= \text{signal 1} \end{aligned}$$

<u>Problème :</u>

(1) Vérifier si X est une variable aléatoire (étant donné $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$) en vous servant de la définition d'une variable aléatoire ou bien en vous servant d'un résultat vu en cours.

(2) — Si au point précédant vous avez trouvé que X est une variable aléatoire (étant donné $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$), donnez une autre tribu $\mathscr{A}'$ sur Ω telle que X n'est pas une variable aléatoire.
- Si au point précédant vous avez trouvé que X n'est pas une variable aléatoire (étant donné $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$), donnez une application X' de Ω dans E qui sera une variable aléatoire.

(3) Si X est une variable aléatoire, donnez la tribu engendrée par X et donnez P_X, la probabilité image de P par X. Si X n'est pas une variable aléatoire donnez la tribu engendrée par la variable aléatoire X' que vous avez définie au point précédent et P'_X, la probabilité image de P par X'.

(4) Nous nous intéressons à l'interprétation suivante : X représente l'information apportée à un acteur. C'est-à-dire, lorsque un état du marché se réalise, cet acteur ne peut pas observer directement l'état du marché, mais seulement le signal associé à cet état par X.
  (1) Supposons que cet acteur reçoit le signal 1 : Quelle est alors la probabilité qu'il associe à l'événement que le marché est (a) en hausse de longue durée (ω_1) ? (b) en hausse de courte durée (ω_2) ?
  (2) Supposons maintenant qu'il reçoit le signal 2 : Quelle est alors la probabilité qu'il associe à l'événement que le marché est (a) en hausse de longue durée (ω_1) ? (b) en hausse de courte durée (ω_2) ?

Exercice 11 (complément)

Soit Ω un ensemble fondamental fini. Démontrez par un argument de récurrence que la *cardinalité* de $\mathscr{P}(\Omega)$, c'est-à-dire, le nombre d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$, est ègale à 2^n.

Exercice 12 (complément)

Soit $\mathscr{A}$ une famille de sous-ensembles de l'ensemble fondamental Ω. Démontrez le résultat suivant : Si pour tout $A \in \mathscr{A}$ on a $\overline{A} \in \mathscr{A}$ (autrement dit, si la condition C_1 du cours est satisfaite), alors les deux conditions suivantes, C_2 et C'_2, sont équivalentes :

(C_2) pour tout $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{A}$, on a $A \cup B \in \mathscr{A}$,
(C'_2) pour tout $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{A}$, on a $A \cap B \in \mathscr{A}$.

Remarque : C_2 et C'_2 sont équivalentes, ce qui s'écrit $C_2 \Leftrightarrow C'_2$, si et seulement si C_2 implique C'_2 ($C_2 \Rightarrow C'_2$) et C'_2 implique C_2 ($C'_2 \Rightarrow C_2$). Il faut alors démontrer que ces deux implications sont satisfaites. Pour démontrer cela, il convient d'appliquer les *Lois de Morgan* (vu en cours).

Chapitre 2

Probabilités conditionnelles et indépendance en probabilité

Exercice 13

Soient Ω l'ensemble fondamental et A et B deux sous-ensembles de Ω. La *probabilité conditionnelle* $P(A \mid B)$, c'est-à-dire, la prabablité que A se réalise *sachant* (étant donné) que B se réalise est définie par :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

D'une manière similaire :

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Problème :

(1) Démontrez que :

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A})}.$$

(Remarque : Il convient d'utiliser d'abord la deuxième équation pour substituer pour $P(A \cap B)$ dans la première et de se servir ensuite du fait que $(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B) = B$.)

(2) Soit $P(A) = 0.70$, $P(B \mid A) = 0.80$ et $P(B \mid \bar{A}) = 0.90$. Quelle est $P(A \mid B)$? Avant même de faire le calcul, estimez si $P(A \mid B)$ sera plus ou moins élevée que $P(A)$. Déterminez également $P(\bar{A} \mid B)$ et calculez $P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid B)$.

(3) Soient les même donnée qu'au point (2) sauf que maintenant $P(B \mid A) = 0.60$. Quelle est $P(A \mid B)$? De nouveau, avant même de faire le calcul, estimez si $P(A \mid B)$ sera plus ou moins élevée que $P(A)$; déterminer également $P(\bar{A} \mid B)$ et calculez $P(A \mid B) + P(\bar{A} \mid B)$. Comparez vos résultats avec ceux que vous avez obtenus au point (2) et commentez !

(4) Soit $P(A) = 0.70$ et $P(B \mid A) = 1$. Est-ce que cela implique que $P(A \mid B)$ sera toujours égale à 1 ? Si oui, expliquez ! Sinon, existe-t-il des valeurs pour $P(B \mid \bar{A})$ telle que $P(A \mid B) = 1$?

Exercice 14

Vous êtes entrepreneur dans un marché émergent. Vous observez un nouveau concurrent sur le marché. Vous estimez qu'il est du type « fort » avec une probabilité de 60%. Sur l'un des sites de votre concurrent, un conflit entre la direction et un groupe de travailleurs qui demandent la création d'un syndicat s'est développé. Si votre concurrent a un taux de productivité en dessous de celui qui correspond au prix du marché, il va accorder la création d'un syndicat avec une probabilité de 90% ; sinon avec une probabilité de 25%. La création d'un syndicat (a) est accordée, (b) *n'est pas* accordée. Quelle probabilité attribuez vous à posteriori à l'événement que votre concurrent a un taux de productivité en dessous de celui qui correspond au prix du marché ?

Exercice 15

Vous êtes analyste à la banque centrale européenne. Vous êtes chargé d'évaluer la nature de la baisse des prix : Présente-t-elle un cycle d'inflation basse (l'événement A) ou est-elle une véritable déflation dû au désendettement progressif de l'Europe ($\bar{A}$) ? En vous appuyant sur l'expérience des situations similaires dans le passé, vous estimez qu'il s'agit d'un cycle d'inflation basse avec une probabilité de 80 % et d'une véritable déflation avec une probabilité de 20 %. Dans votre estimation vous n'avez pas encore respecté un indicateur qui vient des marchés immobiliers : Au cas d'un cycle d'inflation basse, cet indicateur est toujours (c'est-à-dire avec une probabilité de 100 %) au-delà d'une certaine valeur critique z. Au cas d'une véritable déflation, cet indicateur est au-delà de z avec une probabilité de 25 % et en dessous de z avec une probabilité de 75%. Vous recevez le bilan des marchés immobiliers : l'indicateur en question est (a) au-delà de z, (b) en dessous de z. Quelle est votre croyance a posteriori que la baisse des prix est de nature d'un cycle d'inflation basse ?

Exercice 16

Vous examiner les dossiers des candidats qui se présentent pour un poste. Vous évaluez notamment l'information apportée par le fait qu'un candidat pour ce poste, qui appartient à une certaine génération de jeunes cadres, possède un diplôme d'une certaine école. La première table ci-dessous montre la probabilité (*a priori*) avec laquelle un candidat qui appartient à cette génération de jeunes cadres soit « excellent », « très bien » ou respectivement « bien ». La deuxième table montre pour chaque catégorie (« excellent », « très bien », « bien ») la probabilité qu'un individu qui appartient à cette catégorie possède ou ne possède pas un diplôme de cette école.

excellent	0.10
très bien	0.60
bien	0.30

	diplôme	pas de diplôme
excellent	0.95	0.05
très bien	0.80	0.20
bien	0.50	0.50

(a) Quelle est la probabilité qu'un candidat qui appartient à ce groupe de jeunes cadres et qui possède un diplôme de cette école soit « excellent » ?

(b) Quelle est la probabilité qu'un candidat qui appartient à ce groupe de jeunes cadres et qui possède un diplôme de cette école soit au moins « très bien, c'est-à-dire « excellent » ou « très bien » ?

(c) Quelle est la probabilité qu'un candidat qui appartient à ce groupe de jeunes cadres et qui ne possède pas de diplôme de cette école soit « excellent » ?

Exercice 17 (complément)

Suite de l'exercice 8 : Les probabilités des événements élementaires,

$$\begin{aligned} P(a) &= \frac{5}{12}, \\ P(b) &= \frac{3}{12}, \\ P(c) &= \frac{3}{12}, \\ P(d) &= \frac{1}{12}, \\ P(e) &= \frac{2}{12}, \end{aligned}$$

sont connues à chaqu'un des individus, Monsieur K et Madame I et les autres.

(1) Supposons que a se réalise (croiser quelqun avec un accent britannique) et que chacun des individus ne reçoit que l'information comme donnée par sa partition d'information. C'est à dire, lorsque l'événément élémentaire $\omega \in \Omega$ se réalise, l'individu caractérisé par la partition d'information Π ne sait pas exactement quel événement élémentaire s'est réalisé, mais seulement que *l'un des événements élémentaires qui appartiennent au même sous-ensemble de la partition* Π *que* ω *s'est réalisé.* Pour chacun des individus : Quelle est la probabilité a posteriori que
- a s'est réalisé ?
- b s'est réalisé ?
- c s'est réalisé ?
- d s'est réalisé ?
- e s'est réalisé ?

(2) Même exercice qu'au point précédent sauf qu'on suppose maintenant que b se réalise.

Exercice 18 (complément)

Vous êtes un joueur important dans le secteur des micro technologies. Vous êtes en train de développer une nouvelle technologie. Les experts – dont les propos ont été publiés dans les journaux – estiment que cette nouvelle technologie marchera avec une probabilité de 50%. Vous même ne savez pas encore si la technologie marche ou ne marche pas. Tout le monde est convaincu (c'est-à-dire, croit avec une probabilité de 100%), qu'au cas où la nouvelle technologie marche, vous allez entrer dans un nouveau segment du marché. Votre entreé dans ce nouveau segment sera interprétée comme un signal portant sur le fait si la nouvelle technologie marche ou ne marche pas. Si jamais vous vous engagez dans ce nouveau segment, vous avez intérêt que vos concurrents vont alors croire avec une probabilité de 80 % que la nouvelle technologie marche. Vous donnez un interview à un journal. Vous pensez qu'on va vous poser la question avec quelle probabilité vous allez entrer dans ce nouveau segment du marché *si la nouvelle technologie ne marche pas.*

(a) Quelle doit être votre réponse pour faire en sorte que si jamais vous vous engagez dans ce nouveau segment, alors vos concurrents – qui lisent les journaux – vont croire avec une probabilité de 80 % que la nouvelle technologie marche ? Représentez ce problème par un arbre de probabilités.

(b) Comment change votre réponse si la probabilité que les experts apprête a priori au fonctionnement de la nouvelle technologie est de 60 % ?

(c) de 40% ?

(d) Comparez et discutez vos résultats.

Chapitre 3

Variables aléatoires réelles discrètes

Exercice 19

(1) On tire 4 fois sans remise dans une urne contenant 10 boules numérotées $1-10$:
  (a) Combiens de résultat possibles y-a-t-il de cette expérience si on tient compte de l'ordre du tirage ?
  (b) Combiens de résultat possibles y-a-t-il de cette expérience si on ne tient pas compte de l'ordre du tirage ?

(2) Combiens d'arrangements différentes y-a-t-il de 6 boules blanches et 4 boules rouges ?

Exercice 20

Calculez (sans calculatrice) les coefficients binomiaux suivants :

$$a)\ \binom{3}{2} \quad b)\ \binom{10}{3} \quad c)\ \binom{10}{7}$$

$$d)\ \binom{4}{1} \quad e)\ \binom{4}{4} \quad f)\ \binom{4}{0}$$

Exercice 21

Vérifiez (a) par un exemple, (b) de manière générale que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exercice 22

Une expérience a une probabilité de succes de $\frac{1}{4}$.

(a) Quelle est la probabilité d'avoir un succès au premier essay ?
(b) Quelle est la probabilité qu'il faille répéter cette experience deux fois pour avoir un premier succès ?
(c) Quelle est la probabilité qu'il faille répéter cette experience trois fois pour avoir un premier succès ?
(d) Plus généralement : Quelle est la probabilité qu'il faille répéter cette experience n fois pour avoir un premier succès ?

Exercice 23

Suite de l'exercice 22 : Supposons maintenant qu'au lieu de répéter cette expérience jusqu'au premier succes on répète cette expérience 5 fois d'emblée (quelques soient les résultats des deux premiers essays).

(a) Quelle est la probabilité d'avoir 5 succès ?
(b) Quelle est la probabilité d'avoir aucun succès ?
(c) Quelle est la probabilité d'avoir la suite de résultats suivante :
succès - succès - pas de succès - pas de succès - pas de succès ?
(d) Quelle est la probabilité d'avoir la suite de résultats suivante :
pas de succès - succès - pas de succès - succès - pas de succès ?
(e) Quelle est la probabilité d'avoir 2 succès parmi les 5 essays (sans tenir compte de l'ordre dans lequel ces résultats sont obtenus) ?
(f) Quelle est la probabilité d'avoir k succès parmi les 5 essays (sans tenir compte de l'ordre dans lequel ces résultats sont obtenus) ?
(g) Plus généralement : Si n est le nombre d'essays, quelle est la probabilité d'avoir k succès parmi les n essays (sans tenir compte de l'ordre dans lequel ces résultats sont obtenus) ?

Exercice 24

(a) On tire 3 fois sans remise dans une urne contenant 8 boules dont 5 blanches et 3 rouges. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules rouges ?
(b) On tire 3 fois sans remise dans une urne contenant 8 boules dont 6 blanches et 2 rouges. Quelle est la probabilité que les 2 boules rouges sont parmi les 3 boules tirées ?
(c) On tire 3 fois sans remise dans une urne contenant 8 boules dont 5 boules blanches et 3 boules rouges. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges et 1 boule blanche (sans tenir compte de l'ordre) ?
(d) Il y a 8 candidats pour les 3 places d'une bourse d'un semestre aux Etats-Unis. Les 3 gagnants sont tirés au hasard. Parmi les 8 candidats il y a 3 copines. Quelle est la probabilité que les 3 candidats choisis sont les 3 copines ?
(e) Parmi les 8 candidats il y a 2 copains. Quelle est la probabilité que parmi les 3 candidats choisis sont les 2 copains ?
(f) Parmi les 8 candidats il y a 3 copains. Quelle est la probabilité que seulement 2 parmi les 3 copains se trouvent parmi les 3 candidats choisis ?

Exercice 25

On tire 3 fois *sans remise* dans une urne contenant 5 boules dont 3 blanches et 2 noires. On définit comme variable aléatoire X le nombre de boules noires tirées et comme variable aléatoire Y le nombre de boules blanches tirées.

(a) Déterminez la loi de probabilité de X et la loi de probabilité de de Y.
(b) Déterminez la loi du couple (X, Y).
(c) Calculez et représentez graphiquement la fonction de repartition de X respectivement de Y ?
(d) Calculez $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ ainsi que $E(X, Y)$, $\mathrm{COV}(X, Y)$ et le coefficient de correlation entre X et Y.

Exercice 26

La table ci-dessous donne la loi jointe de (X, Y) :

Y \ X	0	1	2	3
1	0.125	0	0	0.125
2	0	0.25	0.25	0
3	0	0.125	0.125	0

(a) Calculez $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
(b) Est-ce que vos résultats vous induisent à conclure que X et Y sont indépendantes ? Expliquez !

Exercice 27

Résultat : Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X)+V(Y)$.

Problème : Démontrez ce résultat et indiquez à chaque étape, quel autre résultat ou quelle règle a été utilisée.

Exercice 28

La probabilité qu'un élève de l'école ScPo travaillera pour le gouvernement cinq ans après la fin de ses études est de 20%. On considère un échantillon de 10 individus d'une promotion. On définit comme variable aléatoire X le nombre d'individus dans cet échantillon qui travailleron pour le governement dans 5 ans.

— (a) Déterminez la loi de probabilité de X ?
— (b) Déterminez $E(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
— (c) Représentez graphiquement la loi de probabilité et la fonction de répartition de X.

Exercice 29

Au Marché aux Puces vous avez acheté une pièce de 2 euros truquée qui, lorsqu'on la jette, donne le résultat « pile » avec une probabilité de 3/4. Vous mettez cette pièce dans votre poche. A ce moment, vous ne vous rendez pas compte que dans votre poche se trouve déjà une autre, vraie, pièce de 2 euros. Vous continuez votre promenade et achetez un journal que vous payez avec une pièce de 2 euros que vous sortez de votre poche. Lorsque vous vous installez dans un café et mettez la main dans votre poche, vous trouvez une pièce de 2 euros et vous vous rendez compte de ce qui s'est passé. Vous ne connaissez plus la nature de la pièce dans votre main : est-elle truquée ou est-elle une vraie pièce équilibrée de 2 euros ? Vous faites une expérience et jetez la pièce que vous avez trouvée dans votre poche 20 fois. Vous observez le résultat « pile » 12 fois. Quelle est la probabilité $P(A|B)$ si A est l'événement « la pièce trouvée dans la poche est la pièce truquée » et B est l'événement « pile a été observé 16 parmi 20 fois » ?

Exercice 30

Il y a 8 candidats pour les 4 bourses doctorales d'un fonds de recherche de la Ville de Paris. Les 4 candidats retenus sont tirés au sort. Parmi les 8 candidats il y a 3 anciens élèves de l'école H. On définit comme variable aléatoire X le nombre anciens élèves de l'école H retenus. Calculez la loi de probabilité de X. Les coefficients binomiaux sont à développer selon la formule vue en cours et à exprimer sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 31

Une entreprise est en difficultés financières. Actuellement seulement 6 des 20 sites de production suivent un protocol de production qui permettra d'imposer un plan de restructuration. Un nouveau créancier demande que le nouveau protocol de production soit imposé sur au moins la motié des sites. Les syndicats s'opposent. Après une nouvelle offensive de négotiations avec les syndicats, la direction de l'entreprise annonce publiquement que le nouveau protocol de production est maintenant imposé sur 10 des 20 sites. Le nouveau créancier demande de faire des contrôles sur 10 sites tirés au sort parmi les 20 sites. On procède aux contrôles. Parmi les 10 sites tirés au sort on trouve 3 où le nouveau protocol de production est respecté. Quelle est la probabilité a posteriori que le nouveau protocol de production est respecté sur 10 des 20 sites (ce que l'entreprise reclame) en supposant qu'il y a seulement deux possibilités : (1) le nouveau protocol est respecté sur 10 des 20 sites (ce que l'entreprise reclame) et (2) le nouveau protocol est respecté sur 6 des 20 sites (le satut quo) auxquelles on attribue la même probabilité a priori ?

Exercice 32

Une boutique telecom vend en moyenne 4 i-phones 6 par jour. On s'intéresse à la probabilité que cette boutique vende (a) au moins 1 i-phone, (b) plus que 4 i-phones dans une journée.

- (1) Quelle loi de probabilité peut-on utiliser pour déterminer ces probabilités ? Sur quel argument s'appuie votre réponse ?
- (2) Déterminez ces probabilités.

Exercice 33

Dans une fabrication, le nombre de pièces défectueuses dans la production d'un jour est modélisé par une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson avec $E(X) = 2$. Un nouveau protocole de qualité – lorsqu'il est respecté – réduit $E(X)$ à 1. Par expérience on sait que la probabilité a priori que le nouveau protocole de qualité soit respecté est de 50%. Lors d'une inspection sur place on trouve dans la production d'un jour 1 pièce défectueuse. Quelle est la probabilité a posteriori que le nouveau protocole de production (a) a été respecté, (b) n'a pas été respecté ?

Exercice 34

La recherche en physique nucléaire nécessite la location d'un accélérateur de particules pesant lourd sur le budget. Une expérience avec un accélérateur de particules a une probabilité de succès de 65%.

Problème :

- (1) Quelle est la probabilité qu'il faille répéter cette expérience au moins 3 fois (c'est-à-dire, plus de 2 fois) pour avoir un premier succès ?
- (2) Quelle est la probabilité qu'il faille répéter cette expérience encore au moins trois fois pour avoir un premier succès étant donné qu'elle a déjà été répétée 3 fois sans succès ?
- (3) Un nouveau protocole qui règle le déroulement de cette expérience – lorsqu'il est respecté par l'équipe technique sur place – augmente la probabilité de succès à 75%. Par expérience on sait que la probabilité que le nouveau protocole soit respecté et de 85%. Après la mise en vigueur de ce nouveau protocole, la même expérience est réalisée. Le premier succès se produit à la troisième répétition. Quelle est la probabilité que le nouveau protocole (a) n'a pas été respecté, (b) a été respecté, par l'équipe technique sur place ?

Chapitre 4

Variables aléatoires continues

Exercice 35

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre θ. On rappelle ici que la fonction de densité qui décrit cette loi est donnée par :

$$f(x) = \theta e^{-\theta x} \quad \text{pour } x \geq 0.$$

Problème :

(a) Démontrez que
$$P(X > h + c \mid X > h) = P(X > c),$$
sachant que h et c sont des réels positifs. (Il suffit de calculer $P(X > h + c \mid X > h)$ et $P(X > c)$ et de comparer vos résultats.)

(b) Représenter $P(X > h)$ respectivement $P(X > h + c)$ comme une surface sous la courbe de la fonction de densité donnée ci-dessus. (Remarque : Cela peut être utile pour se représenter le calcul de $P(X > h + c \mid X > h)$.)

Exercice 36

Dans une fabrication de yachts de grand luxe, le temps d'attente entre deux conclusions de contrat suit une loi exponentielle de paramètre θ. Le temps d'attente moyen entre deux conclusions de contrat est de 60 jours. Quelle est la probabilité qu'il faille attendre encore au moins 30 jours qu'un contrat soit conclut sachant que se sont déjà écoulés (a) 30 jours, (b) 60 jours, qu'aucun contrat a été conclut.

Exercice 37

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale donnée par $N(0, 1)$.

Calculer :

(a) $t > 0$ tel que $P(-t < X < t) = 0,90$
(b) $t > 0$ tel que $P(-t < X < t) = 0,95$

Exercice 38

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale donnée par $N(\mu, \sigma^2)$. Alors, la variable aléatoire

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

suit une loi normale avec $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$ (ce que l'on appelle la *loi normale centrée réduite*).

Problème : Vérifiez ce résultat, c'est-à-dire, verifiez que (a) $E(Z) = 0$ et (b) $V(Z) = 1$. Indiquez à chaque étape de votre démonstration sur quelle définition ou quel résultat répose votre argument.

Exercice 39

La rémunération par heure des stagiaires en banque-finance suit une loi normale avec une espérance de $\mu = 12$ euros et une variance de $\sigma^2 = 4$. Déterminez la proportion de stagiaires qui ont une rémunération de (a) plus de 16 euros, (b) moins de 9 euros, (c) entre 8 et 14 euros.

Exercice 40

Les notes d'une évaluation des employés d'une entreprise suivent une loi normale avec une espérance de $\mu = 54$ points et un écart-type de $\sigma = 12$. On décide de donner la note « excellent » à 10% des employés. Quelle est le nombre de points qu'un employé doit atteindre pour avoir la note « excellent » ?