

Petit contrôle d'algèbre linéaire

Jérôme Feret
LIENS (INRIA,ÉNS,CNRS)

3 février 2012

1. Soit E un ensemble et soit $\square : E \times E \rightarrow E$ une loi interne sur E .
On suppose qu'il existe deux éléments $\varepsilon_1 \in E$ et $\varepsilon_2 \in E$ de E tels que pour tout élément $x \in E$ de E , on ait :
 - (a) $\varepsilon_1 \square x = x$;
 - (b) $x \square \varepsilon_1 = x$;
 - (c) $\varepsilon_2 \square x = x$;
 - (d) $x \square \varepsilon_2 = x$.Montrer que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.
2. Comment appelle-t-on l'élément ε_1 de la question précédente?
3. La famille $((1, 2), (2, 1))$ de \mathbb{R}^2 est-elle une base ou non, une famille libre ou liée, une famille génératrice ou non dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \cdot)$?
Donner en une preuve.
4. Même question avec la famille $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6), (5, 6, 7))$ de \mathbb{R}^3 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \cdot)$.
5. Même question avec la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ de \mathbb{R}^4 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^4, \dot{+}, \cdot)$.
6. Même question avec la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ de \mathbb{R}^4 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^4, \dot{+}, \cdot)$.