

Devoir maison

Matrices et applications linéaires

Jérôme Feret
LIENS (INRIA,ÉNS,CNRS)

à rendre le 14 avril

Résumé

Dans ce problème, nous verrons, une fois des bases de référence fixées, que les matrices peuvent être utilisées pour représenter des vecteurs et des applications linéaires. De plus, nous observerons que la multiplication matricielle permet de calculer la représentation de l'image d'un vecteur par une application linéaire et la représentation de la composée de deux applications linéaires. En outre nous utiliserons le produit et l'inversion matricielles pour changer de bases de référence. Ensuite, nous étudierons les cas particuliers de la représentation des projections linéaires et de celle des applications linéaires nilpotentes.

Il est bien sûr vivement conseillé d'utiliser les résultats que nous avons démontrés en cours (le poly faisant foi). Il n'est pas nécessaire de redémontrer ces résultats. Par contre, pour tout résultat nouveau, une preuve est demandée (et non un simple argument). En revanche, il est autorisé de sauter des questions et d'utiliser les résultats des questions sautées sans justification.

Soit \mathbb{K} un ensemble choisi dans la liste \mathbb{Q} , \mathbb{R} , ou \mathbb{C} .

1 Représentation matricielle

1.1 Représentation matricielle d'un vecteur

Dans cette sous-partie, nous introduisons la représentation matricielle d'un vecteur d'un espace vectoriel dont on a choisi une base de référence.

Définition 1.1. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de $(E, +_E, \bullet_E)$. On note $\mathcal{B} \triangleq (b_i)_{1 \leq i \leq \dim E}$.

Soit $u \in E$ un vecteur de E . On appelle représentation matricielle du vecteur u dans la base E , la matrice $\llbracket u \rrbracket_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{\dim E, 1}(\mathbb{K})$ de taille¹ $\dim E \times 1$ à valeur dans \mathbb{K} telle que si l'on note $\llbracket u \rrbracket_{\mathcal{B}} \triangleq (m_{i,j})_{1 \leq i \leq \dim E, j=1}$ on ait : $u = \sum_{k=1}^{\dim E} m_{k,1} \bullet b_k$.

Exemple 1.1. On a :

$$\llbracket (1, 1, 1) \rrbracket_{((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Une telle matrice est appelée matrice colonne.

Exemple 1.2. On a :

$$\llbracket (1, 1, 1) \rrbracket_{((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1))} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Question 1.1. Montrer que la famille :

$$((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)),$$

est une base de $(\mathbb{R}^4, +, \bullet)$.

Question 1.2. Donner la représentation matricielle du vecteur $(2, 1, 3, 4)$ dans la base :

$$((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)).$$

Question 1.3. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini. Soit \mathcal{B} une base de E .

Montrer que la fonction de E dans $\mathcal{M}_{\dim E, 1}(\mathbb{K})$ qui à tout vecteur $u \in E$ de E associe la matrice colonne $\llbracket u \rrbracket_{\mathcal{B}}$, est un isomorphisme entre les \mathbb{K} -espaces vectoriels $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(\mathcal{M}_{\dim E, 1}(\mathbb{K}), +, \bullet)$.

1.2 Représentation matricielle d'une application linéaire

Dans cette sous-partie, nous introduisons la représentation matricielle d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels dont on a choisi des bases de référence.

Définition 1.2. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension fini. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. On note $(b_j)_{1 \leq j \leq \dim E} \triangleq \mathcal{B}_E$ et $(b'_i)_{1 \leq i \leq \dim F} \triangleq \mathcal{B}_F$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre les \mathbb{K} -espaces vectoriels $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$.

On appelle représentation matricielle de l'application linéaire ϕ dans les bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F , la matrice $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ de taille $\dim F \times \dim E$, telle que, si l'on note $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq \dim F, 1 \leq j \leq \dim E}$, on ait :

$$\phi(b_j) = \sum_{k=1}^{\dim F} m_{k,j} \cdot b'_k.$$

Exemple 1.3 (identité). Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{B} une base de E .

Alors, on a :

$$\llbracket Id_E \rrbracket_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = I_{\dim E, \dim E}.$$

Exemple 1.4 (plongement). On considère l'application linéaire suivante :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \mapsto (x, y, 0). \end{cases}$$

On a :

$$\llbracket \phi \rrbracket_{((1,0),(0,1)),((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Question 1.4. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension fini. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. On note $(b_j)_{1 \leq j \leq \dim E} \triangleq \mathcal{B}_E$ et $(b'_i)_{1 \leq i \leq \dim F} \triangleq \mathcal{B}_F$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$.

Prouver que pour $j \in \mathbb{N}$ entier compris entre 1 et $\dim E$, la j -ième colonne de $\llbracket \phi \rrbracket_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est la représentation matricielle $\llbracket \phi(b_j) \rrbracket_{\mathcal{B}_F}$ du vecteur $\phi(b_j)$ dans la base \mathcal{B}_F .

Question 1.5. Montrer si l'application linéaire :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x, y), \end{cases}$$

est injective, ou non.

Question 1.6. Montrer si l'application linéaire :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x, y), \end{cases}$$

est surjective, ou non.

Question 1.7. Donner la représentation matricielle de l'application linéaire :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x, y), \end{cases}$$

dans les bases $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $((1, 0), (0, 1))$.

Question 1.8. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension fini. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Montrer que la fonction de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K})$ qui à une application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ associe la matrice $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est un isomorphisme entre le \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathcal{L}(E, F), +_F, \bullet_F)$ et le \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathcal{M}_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K}), +, \bullet)$.

Question 1.9. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension fini. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Soit ϕ une application linéaire ϕ de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ et $u \in E$.

Montrer que :

$$((\phi(u))_{\mathcal{B}_F}) = [[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} \times ((u)_{\mathcal{B}_E})$$

Indication. On montrera que les fonction de E dans $\mathcal{M}_{\dim F}(\mathbb{K})$ qui à un vecteur $u \in E$ associe respectivement la matrice $((\phi(u))_{\mathcal{B}_F})$ et la matrice $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} \times ((u)_{\mathcal{B}_E})$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur la base \mathcal{B}_E .

Question 1.10. On considère l'application linéaire ϕ suivante :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto (x, y). \end{cases}$$

Vérifier que :

$$((\phi((1, 1, 1)))_{((1,0),(0,1))}) = [[\phi]]_{((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)),((1,0),(0,1))} \times ((1, 1, 1))_{((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))}.$$

Question 1.11. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$, $(F, +_F, \bullet_F)$, et $(G, +_G, \bullet_G)$ trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension fini. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$, \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$, et \mathcal{B}_G une base de $(G, +_G, \bullet_G)$.

Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ une application linéaire entre $(F, +_F, \bullet_F)$ et $(G, +_G, \bullet_G)$.

Montrer que :

$$[[\psi]]_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G} \times [[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} = [[\psi \circ \phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}.$$

Indication. Pour $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ fixée, montrer que les fonctions de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{M}_{\dim E, \dim G}(\mathbb{K})$ qui a $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ associent respectivement $[[\psi]]_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G} \times [[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ et $[[\psi \circ \phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}$, sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base bien choisie.

1.3 Changement de bases de référence

Dans cette sous-partie, on montre que deviennent les représentations matricielles lorsque l'on change de bases de référence.

Définition 1.3. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de $(E, +_E, \bullet_E)$. La matrice $[[Id_E]]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est appelé matrice de passage entre la base \mathcal{B} et la base \mathcal{B}' , on la note $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Question 1.12. Montrer que la famille $((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ est une base de $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$.

Exemple 1.5. On note $\mathcal{B} \triangleq ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ et $\mathcal{B}' \triangleq ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$. On a :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Question 1.13. Montrer que la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base de $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$.

Question 1.14. Donner la matrice de passage entre la base

$$((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$$

et la base

$$((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)).$$

Question 1.15. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de $(E, +_E, \bullet_E)$.

Montrer que la matrice $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et que son inverse est $\mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

Indication. On utilisera le résultat de la question 1.11.

Question 1.16. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient \mathcal{B}_E et \mathcal{B}'_E deux bases de $(E, +_E, \bullet_E)$. Soient \mathcal{B}_F et \mathcal{B}'_F deux bases de $(F, +_F, \bullet_F)$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

Montrer que :

$$[[\phi]]_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F} = (\mathcal{P}_{\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F})^{-1} \times [[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_E}.$$

Indication. On utilisera les résultats des questions 1.11 et 1.15.

Question 1.17. Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de $(E, +_E, \bullet_E)$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme.

Monter que :

$$[[\phi]]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'} = (\mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}})^{-1} \times [[\phi]]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}.$$

Question 1.18. On considère l'homomorphisme ϕ de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, qui à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(x, x + 2 \cdot y) \in \mathbb{R}^2$. On considère les bases de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ et $\mathcal{B}' = ((1, 0), (1, 1))$.

Donner $[[\phi]]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$, et $\mathcal{P}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, en déduire la représentation matricielle $[[\phi]]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}$ de l'homomorphisme ϕ dans la base \mathcal{B}' .

Question 1.19. On considère l'homomorphisme ϕ de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, qui à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(x, x + 2 \cdot y) \in \mathbb{R}^2$.

Décomposer les couples $\phi(1, 0)$ et $\phi(1, 1)$ dans la base \mathcal{B}' .

Question 1.20. Vérifier que les résultats obtenus dans les questions 1.18 et 1.19 concordent.

1.4 Inversibilité des représentation matricielles des applications linéaires

Dans cette sous-partie, on établit le lien entre le fait qu'une application linéaire soit injective, surjective, bijective, et l'inversibilité à gauche et/ou à droite de leur représentation matricielle.

Question 1.21. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Soit ϕ une application linéaire ϕ de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est injective ;
2. $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est inversible à gauche ;
3. $\dim E \leq \dim F$ et il existe une base \mathcal{B}'_F telle que $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_F} = I_{\dim E, \dim F}$.

Question 1.22. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Soit ϕ une application linéaire ϕ de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est surjective ;
2. $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est inversible à droite ;
3. $\dim E \geq \dim F$ et il existe une base \mathcal{B}'_E telle que $[[\phi]]_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F} = I_{\dim E, \dim F}$.

Question 1.23. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soient \mathcal{B}_E une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ et \mathcal{B}_F une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Soit ϕ une application linéaire ϕ de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$.

Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est un isomorphisme ;
2. $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}$ est inversible ;
3. $\dim E = \dim F$ et il existe une base \mathcal{B}'_E telle que $[[\phi]]_{\mathcal{B}'_E, \mathcal{B}_F} = I_{\dim E, \dim E}$;
4. $\dim E = \dim F$ et il existe une base \mathcal{B}'_F telle que $[[\phi]]_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_F} = I_{\dim E, \dim E}$.

2 Représentation matricielle des projections linéaires

Dans cette partie, nous étudierons le cas des projections linéaires, et nous montrerons que quitte à choisir une bonne base, leur représentation matricielle est une matrice dont la valeur des éléments sur la diagonale est 0 ou 1, et la valeur des éléments qui ne sont pas sur la diagonale est égale à 0.

2.1 Projections linéaires

Définition 2.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle projection linéaire du \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \bullet)$. tout homomorphisme $\phi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\phi \circ \phi = \phi$.²

2.1.1 Exemples

Question 2.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Montrer que la fonction identité Id_E est une projection linéaire de $(E, +, \bullet)$.

Question 2.2. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Prouver si la fonction ϕ est une projection linéaire de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, ou non.

2. Ainsi, $\phi \in \mathcal{L}(E)$ est une projection linéaire si et seulement si pour tout $u \in E$, $\phi(u) = \phi(\phi(u))$.

Question 2.3. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(y, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Prouver si la fonction ϕ est une projection linéaire de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, ou non.

Question 2.4. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Prouver si la fonction ϕ est une projection linéaire de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, ou non.

Question 2.5. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(2 \cdot x, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Prouver si la fonction ϕ est une projection linéaire de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$, ou non.

2.1.2 Propriétés

Question 2.6. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini. Soit ϕ une projection linéaire.
Montrer que pour tout vecteur $u \in E$, on a :

$$u - \phi(u) \in \ker \phi.$$

Question 2.7. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Soit $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E)$ deux projections linéaires de $(E, +, \bullet)$ tels que $\text{Im}(\phi) = \text{Im}(\psi)$ et $\ker \phi = \ker \psi$.
Montrer que $\phi = \psi$.

Indication. Décomposer tout vecteur $u \in E$ de E , sous la forme $u = (u - \phi(u)) + \phi(u)$, et appliquer ψ aux deux membres de l'égalité.

Définition 2.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ une projection linéaire de $(E, +, \bullet)$.
On dit que ϕ est la projection sur $\text{Im}(\phi)$ parallèlement à $\ker \phi$.

Question 2.8. Donner un exemple de deux projections linéaires différentes ayant la même image.

Question 2.9. Donner un exemple de deux projections linéaires différentes ayant le même noyau.

Question 2.10. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Quelles sont les projections linéaires de $(E, +, \bullet)$ qui sont injectives (resp. surjectives) (resp. bijectives) ?

2.2 Matrices diagonales

Définition 2.3 (matrices diagonales). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} . On note $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \triangleq A$.

On dit que la matrice A est diagonale si et seulement si pour tout entier $i, j \in \mathbb{N}$ entre 1 et n , on a :
 $a_{i,j} = \delta_{i,j} \cdot a_{i,j}$.³

2.2.1 Exemples

Exemple 2.1. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

est une matrice diagonale.

Question 2.11. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Montrer si la représentation matricielle de la fonction identité Id_E dans une base quelconque est diagonale, ou non.

3. Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si pour tout $i, j \in \mathbb{N}$ entre 1 et n , $i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.

Question 2.12. Soit ϕ l'homomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer si la représentation matricielle de l'homomorphisme ϕ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ est diagonale, ou non.

Question 2.13. Montrer que la famille $((1, 0), (1, 1))$ est une base de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$.

Question 2.14. Soit ϕ l'homomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer si la représentation matricielle de l'homomorphisme ϕ dans la base $((1, 0), (1, 1))$ est diagonale, ou non.

Question 2.15. Soit ϕ l'homomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(y, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer si la représentation matricielle de l'homomorphisme ϕ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ est diagonale, ou non.

Question 2.16. Soit ϕ l'homomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ qui à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer si la représentation matricielle de l'homomorphisme ϕ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ est diagonale, ou non.

Question 2.17. Montrer que la famille $((1, 1), (1, -1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

Question 2.18. Soit ϕ l'homomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ qui à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer si la représentation matricielle de l'homomorphisme ϕ dans la base $((1, 1), (1, -1))$ est diagonale, ou non.

Question 2.19. Soit ϕ l'homomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, \bullet)$ qui au couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le couple $(2 \times x, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer si la représentation matricielle de l'homomorphisme ϕ dans la base $((1, 0), (0, 1))$ est diagonale, ou non.

2.2.2 Propriétés

Question 2.20. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ deux matrices diagonales de taille n et à valeur dans \mathbb{K} .
Montrer que $A \times B$ est une matrice diagonale, exprimer les coefficients de $A \times B$ en fonction de ceux de A et de B .

Question 2.21. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de taille n et à valeur dans \mathbb{K} .
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible, et dans ce cas, donner son inverse.

Question 2.22. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice diagonale de taille n et à valeur dans \mathbb{K} .
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A \times A = A$.

2.3 Diagonalisation de la représentation matricielle des projections linéaires

Question 2.23. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$. Soit \mathcal{B} une base de $(E, +, \bullet)$.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est une projection linéaire ;
2. $[\phi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} \times [\phi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = [\phi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$.

Question 2.24. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit ϕ une projection linéaire sur $(E, +, \bullet)$. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de $\ker \phi$. Soit J un ensemble tel que $I \cap J = \emptyset$ et $(b_j)_{j \in J}$ une base de $\text{Im}(\phi)$.

Montrer que la famille $(b_k)_{k \in I \cup J}$ est une base de $(E, +, \bullet)$.

Indication. On pourra montrer que c'est une famille génératrice en décomposant $\phi(u)$ et $u - \phi(u)$ dans respectivement dans la base $(b_j)_{j \in J}$ et la base $(b_i)_{i \in I}$; puis en utilisant des critères de dimension.

Question 2.25. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit ϕ une projection linéaire sur $(E, +, \bullet)$.

Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de $\ker \phi$. Soit J un ensemble tel que $I \cap J = \emptyset$ et $(b_j)_{j \in J}$ une base de $\text{Im}(\phi)$.

Montrer que la représentation matricielle de ϕ dans la base $(b_k)_{k \in I \cup J}$ est une matrice diagonale, donc les éléments diagonaux sont soit 0, soit 1.

Question 2.26. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$. Soit \mathcal{B} une base de $(E, +, \bullet)$.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est une projection linéaire ;
2. il existe :
 - une matrice $P \in \mathcal{M}_{\dim E, \dim E}(\mathbb{K})$ carrée de taille $\dim E$ et à valeur dans \mathbb{K} inversible,
 - une matrice $A \in \mathcal{M}_{\dim E, \dim E}(\mathbb{K})$ diagonale de taille $\dim E$ et à valeur dans \mathbb{K} dont tous les éléments diagonaux sont soit égaux à 0, soit égaux à 1,
 tel que l'on ait : $[\phi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = P^{-1} \times A \times P$.

3 Représentation matricielle des applications linéaires nilpotentes

Dans cette partie, nous étudierons le cas des projections linéaires nilpotentes, et nous montrerons que quitte à choisir une bonne base, leur représentation matricielle est une matrice dont la valeur des éléments sur et en dessous de la diagonale est égale à 0.

3.1 Itérées d'applications linéaires

Définition 3.1. Soit A un ensemble et $f \in \mathcal{F}(A, A)$ une fonction de A dans A .

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^n \in \mathcal{F}(A, A)$, la n -ième itérée de f par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} f^0 = Id_A \\ f^{k+1} = f \circ f^k \quad \text{pour tout entier } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Question 3.1. Soit A un ensemble et $f \in \mathcal{F}(A, A)$ une fonction de A dans A .

Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Indication. On procédera par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$, en utilisant l'associativité de la loi \circ .

3.1.1 Chaîne des noyaux des itérées d'une application linéaire

Question 3.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\ker \phi^n \subseteq \ker \phi^{n+1}.^4$$

4. Ainsi, $\ker \phi^0 \subseteq \ker \phi^1 \subseteq \dots \subseteq \ker \phi^k \subseteq \ker \phi^{k+1} \subseteq \dots$

Question 3.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$. On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\ker \phi^{n_0+1} = \ker \phi^{n_0}.$$

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a :

$$\ker \phi^n = \ker \phi^{n_0}.$$

Question 3.4. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ un entier strictement positif.

Montrer que, pour tout vecteur $u \in \ker \phi^n$, on a :

$$\phi(u) \in \ker \phi^{n-1}.$$

3.1.2 Exponentiation de matrices

Définition 3.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} .

On définit les puissances A^k de A , par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, ci-dessous :

$$\begin{cases} A^0 = I_{n,n} \\ A^{k+1} = A \times A^k \quad \text{pour } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Exemple 3.1. Par exemple, on a :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Question 3.5. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de $(E, +, \bullet)$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$.

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$[[\phi^n]]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = ([[\phi]]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})^n.$$

Indication. On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en utilisant le résultat de la question 1.11.

Question 3.6. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} .

Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^{k+1} = A^k \times A.$$

Indication. On pourra soit procéder par récurrence sur k en utilisant l'associativité du produit matriciel, ou utiliser les résultats des questions 3.1 et 3.5.

3.2 Applications linéaires nilpotentes

Définition 3.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$.

On dira que ϕ est une application linéaire nilpotente, si et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout vecteur $u \in E$, on a : $\phi^n(u) = 0_E$.

3.2.1 Exemples

Question 3.7. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $(y, z, 0) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer si la fonction ϕ est une application linéaire nilpotente de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, ou non.

Question 3.8. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $(2 \cdot (y + z), 3 \cdot z, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer si la fonction ϕ est une application linéaire nilpotente de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, ou non.

Question 3.9. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $(y, z, x) \in \mathbb{R}^3$.
Montrer si la fonction ϕ est une application linéaire nilpotente de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, ou non.

3.2.2 Propriétés

Question 3.10. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire nilpotente de $(E, +, \cdot)$.

Montrer que ϕ n'est pas injective.

Question 3.11. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire nilpotente de $(E, +, \cdot)$.

Montrer que ϕ n'est pas surjective.

Question 3.12. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire nilpotente de $(E, +, \cdot)$.

Alors, pour tout vecteur $u \in E$,

$$\phi^{\dim E}(u) = 0_E.$$

Indication. Utiliser les questions 3.2 et 3.3, pour prouver que si $\ker \phi^{\dim E} \neq E$, alors pour tout $n \geq \dim E$, on a :

$$\ker \phi^n = \ker \phi^{\dim E}.$$

3.3 Matrices triangulaires supérieures

Définition 3.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} . On note $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \triangleq A$.

On dit que la matrice A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout entier $i, j \in \mathbb{N}$ entre 1 et n , on a : $i < j \implies a_{i,j} = 0$.

3.3.1 Exemples

Exemple 3.2. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix},$$

est une matrice triangulaire supérieure.

Question 3.13. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini. Soit \mathcal{B} une base de $(E, +, \cdot)$.

Montrer que la représentation matricielle $[[Id_E]]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ de la fonction identité Id_E dans la base \mathcal{B} est une matrice triangulaire supérieure.

Question 3.14. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $(y, z, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer si la représentation matricielle de la fonction ϕ dans la base $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est triangulaire supérieure, ou non.

Question 3.15. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $(2 \cdot (y + z), 3 \cdot z, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer si la représentation matricielle de la fonction ϕ dans la base $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est triangulaire supérieure, ou non.

Question 3.16. Soit ϕ la fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 qui au triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ associe le triplet $(y, z, x) \in \mathbb{R}^3$.

Montrer si la représentation matricielle de la fonction ϕ dans la base $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est triangulaire supérieure, ou non.

3.3.2 Propriétés

Question 3.17. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ deux matrices triangulaires supérieures de taille n .

Montrer que la matrice $A \times B$ est une matrice triangulaire supérieure. Exprimer les coefficients diagonaux de $A \times B$ en fonction des coefficients diagonaux de A et des coefficients diagonaux de B .

Question 3.18. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure de taille n .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients diagonaux de la matrice A pour qu'elle soit inversible.

3.4 Triangulation de la représentation matricielle des applications linéaires nilpotentes

3.4.1 Matrices nilpotentes

Définition 3.5. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} .

On dit que la matrice A est nilpotente si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{N}$, tel que :

$$A^k = (0)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}.^5$$

Question 3.19. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente de taille n .

Montrer que :

$$A^n = (0)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}.$$

Indication. On introduira l'homomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associe la matrice colonne $A \times X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On montrera par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que la k -ième itérée ϕ^k de ϕ associe à la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ la matrice colonne $A^k \times X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Puis on utilisera le résultat de la question 3.12

Question 3.20. Montrer si la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est nilpotente, ou non.

Question 3.21. Montrer si la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est nilpotente, ou non.

5. i.e. tous les coefficients de la matrice A^k sont nuls.

Question 3.22. Montrer si la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est nilpotente, ou non.

Question 3.23. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit \mathcal{B} une base de E et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de $(E, +, \bullet)$.

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est une application linéaire nilpotente;
2. $[\phi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ est une matrice nilpotente.

Indication. Utiliser le résultat de la question 3.5.

Question 3.24. Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

Question 3.25. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure de taille n .

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients diagonaux de A pour que A soit une matrice nilpotente.

Question 3.26. Pensez vous que toutes les matrices nilpotentes sont triangulaires supérieures ?

3.4.2 Base de triangulation

Question 3.27. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire nilpotente.

Montrer qu'il existe une base de $\ker \phi$.

Question 3.28. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit ϕ une application linéaire nilpotente.

Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, toute base de $\ker \phi^n$ s'étend en une base de $\ker \phi^{n+1}$.

Question 3.29. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et soit ϕ une application linéaire nilpotente.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} \triangleq (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une fonction croissante⁶ σ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} tel que, pour tout entier $k \in \mathbb{K}$, $(b_i)_{1 \leq i \leq \sigma(k)}$ soit une base de $\ker \phi^k$.⁷

Question 3.30. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ un homomorphisme de E . Soit \mathcal{B} une base de E .

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est une application linéaire nilpotente;
2. il existe :
 - une matrice $P \in \mathcal{M}_{\dim E, \dim E}(\mathbb{K})$ carrée de taille $\dim E$ et à valeur dans \mathbb{K} inversible,
 - une matrice $A \in \mathcal{M}_{\dim E, \dim E}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure de taille $\dim E$ et à valeur dans \mathbb{K} dont tous les éléments diagonaux sont égaux à 0,
 tel que l'on ait : $[\phi]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = P^{-1} \times A \times P$.

6. i.e. pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j \implies \sigma(i) \leq \sigma(j)$, ou encore $\sigma(0) \leq \sigma(1) \leq \dots \leq \sigma(k) \leq \sigma(k+1) \leq \dots$

7. i.e. tel que les $\sigma(1)$ premiers éléments de \mathbb{B} forment une base de $\ker \phi$, puis en ajoutant les $\sigma(2) - \sigma(1)$ éléments suivant, on obtient une base de $\ker \phi^2$, et cetera.