

Deuxième petit contrôle d'algèbre linéaire

Jérôme Feret
LIENS (INRIA,ÉNS,CNRS)

17 février 2012

1. Soit E un ensemble et soit $\square : E \times E \rightarrow E$ une loi interne associative sur E . On suppose que E admet un élément neutre ε pour \square .¹ On suppose qu'il existe trois éléments $u, v, w \in E$ tel que :

- (a) $u \square v = \varepsilon$;
(b) $v \square w = \varepsilon$.

Montrer que $u = w$.

On a :

$$\begin{aligned} u &= u \square \varepsilon && \text{(puisque } \varepsilon \text{ est un élément neutre pour } \square.) \\ u &= u \square (v \square w) && \text{(par hypothèse 1b)} \\ u &= (u \square v) \square w && \text{(car } \square \text{ est associative)} \\ u &= \varepsilon \square w && \text{(par hypothèse 1a)} \\ u &= w && \text{(car } \varepsilon \text{ est un élément neutre pour la loi } \square) \end{aligned}$$

2. Comment appelle-t-on l'élément u de la question précédente?

L'élément u est l'inverse de v .

3. La famille $((1, 2, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (4, 5, 10, 11))$ de \mathbb{R}^4 est-elle une base ou non, une famille libre ou liée, une famille génératrice ou non, dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$?

Donner en une preuve.

La famille $((1, 2, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (4, 5, 10, 11))$ n'est pas génératrice, car elle ne contient que trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4. Ce n'est donc pas une base non plus.

Pour la liberté, on donne deux méthodes :

– *Par la résolution directe :*

– *Travail de recherche :*

Soit $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $\lambda \cdot (1, 2, 3, 4) + \mu \cdot (2, 1, 4, 3) + \gamma \cdot (4, 5, 10, 11) = (0, 0, 0, 0)$.

Alors :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \gamma = 0 \\ 2 \cdot \lambda + \mu + 5 \cdot \gamma = 0 \\ 3 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu + 10 \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \gamma = 0 \\ -3 \cdot \mu - 3 \cdot \gamma = 0 \\ -2 \cdot \mu - 2 \cdot \gamma = 0. \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \lambda = -2\gamma \\ \mu = -\gamma. \end{cases}$$

1. Ainsi pour tout $u \in E$, $u \square \varepsilon = u$ et $\varepsilon \square u = u$.

– Rédaction :

On a :

$$(-2) \bullet (1, 2, 3, 4) \dot{+} (-1) \bullet (2, 1, 4, 3) \dot{+} (4, 5, 10, 11) = (0, 0, 0, 0).$$

Puis la famille $\begin{pmatrix} (1, 2, 3, 4) \\ (2, 1, 4, 3) \\ (4, 5, 10, 11) \end{pmatrix}$ est liée.

– Par l’algorithme :

La famille $\begin{pmatrix} (1, 2, 3, 4) \\ (2, 1, 4, 3) \\ (4, 5, 10, 11) \end{pmatrix}$ est libre,

si et seulement si, la famille $\begin{pmatrix} (1, 2, 3, 4) \\ (0, -3, -2, -5) \\ (0, -3, -2, -5) \end{pmatrix}$ est libre ($L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4 \cdot L_1$)

si et seulement si, la famille $\begin{pmatrix} (1, 2, 3, 4) \\ (0, -3, -2, -5) \\ (0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$ est libre ($L_3 \leftarrow L_3 - L_2$).

Or la famille $((1, 2, 3, 4), (0, -3, -2, -5), (0, 0, 0, 0))$ n’est pas libre (elle contient le vecteur nul).

Donc la famille $((1, 2, 3, 4), (2, 1, 4, 3), (4, 5, 10, 11))$ n’est pas libre.

4. Que vaut le produit de matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$?

Le produit n’est pas défini car la première matrice à 3 colonnes, alors que la seconde a 2 lignes.

5. Même question pour le produit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Posons la multiplication :

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \times 1 + 1 \times 0 & 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ 0 & 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 \end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

D’où :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Même question pour le produit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}.$$

La matrice de gauche est la matrice $\text{ADD}_5(3, 4, 4)$. Donc multiplication à gauche par la première matrice a pour effet d’ajouter 4 fois la ligne 4 à la ligne 3 de la deuxième matrice.

Ainsi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 1 & 0 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 1 & 0 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}.$$