

Petit contrôle d'algèbre linéaire

Jérôme Feret
LIENS (INRIA,ÉNS,CNRS)

3 février 2012

1. Soit E un ensemble et soit $\square : E \times E \rightarrow E$ une loi interne sur E .
On suppose qu'il existe deux éléments $\varepsilon_1 \in E$ et $\varepsilon_2 \in E$ de E tels que pour tout élément $x \in E$ de E , on ait :

- (a) $\varepsilon_1 \square x = x$;
- (b) $x \square \varepsilon_1 = x$;
- (c) $\varepsilon_2 \square x = x$;
- (d) $x \square \varepsilon_2 = x$.

Montrer que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

On a $\varepsilon_1 \square \varepsilon_2 = \varepsilon_2$ (par (1a), pour $x = \varepsilon_2$) et $\varepsilon_1 \square \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (par (1d), pour $x = \varepsilon_1$). D'où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

□

2. Comment appelle-t-on l'élément ε_1 de la question précédente ?

ε_1 est l'élément neutre de E pour la loi \square .

□

3. La famille $((1, 2), (2, 1))$ de \mathbb{R}^2 est-elle une base ou non, une famille libre ou liée, une famille génératrice ou non dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$?

Donner en une preuve.

On donne deux méthodes :

– Par résolution directe :

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \cdot (1, 2) + \mu \cdot (2, 1) = (0, 0)$.

Alors :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu = 0 \\ 2 \cdot \lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu = 0 \\ -3 \cdot \mu = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Et :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow \frac{-1}{3}L_2$$

D'où : $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

Ainsi la famille est libre. Puis, une famille libre de deux vecteurs dans un espace de dimension 2 est une base. Donc c'est une base. En particulier, c'est une famille génératrice.

– Par l'algorithme :

On sait que :

$\begin{pmatrix} (1, 2) \\ (2, 1) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 2) \\ (0, -3) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 2) \\ (0, 1) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0) \\ (0, 1) \end{pmatrix}$ est une base

Or $\begin{pmatrix} (1, 0) \\ (0, 1) \end{pmatrix}$ est une base.

□

4. Même question avec la famille $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6), (5, 6, 7))$ de \mathbb{R}^3 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.
La famille est liée car elle contient 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 (ce n'est donc pas une base). On donne deux méthodes pour trouver si c'est une famille génératrice :

– Par résolution directe :

– Travail de recherche :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $\lambda, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \cdot (1, 2, 3) \dot{+} \mu \cdot (2, 3, 4) \dot{+} \nu \cdot (4, 5, 6) \dot{+} \gamma \cdot (5, 6, 7) = (x, y, z)$.

Alors :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \nu + 5 \cdot \gamma = x \\ 2 \cdot \lambda + 3 \cdot \mu + 5 \cdot \nu + 6 \cdot \gamma = y \\ 3 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu + 6 \cdot \nu + 7 \cdot \gamma = z \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \nu + 5 \cdot \gamma = x \\ -1 \cdot \mu + (-3) \cdot \nu + (-4) \cdot \gamma = y - 2 \cdot x \\ -2 \cdot \mu + (-6) \cdot \nu + (-8) \cdot \gamma = z - 3 \cdot x \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \nu + 5 \cdot \gamma = -3 \cdot x + 2y \\ \mu + 3 \cdot \nu + 4 \cdot \gamma = 2 \cdot x - y \\ -2 \cdot \mu + -6 \cdot \nu + -8 \cdot \gamma = z - 3 \cdot x \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \lambda + (-2) \cdot \nu + (-3) \cdot \gamma = x \\ \mu + 3 \cdot \nu + 4 \cdot \gamma = 2 \cdot x - y \\ 0 + 0 + 0 = z - 3 \cdot x + 2 \cdot (2 \cdot x - y) \end{cases}$$

D'où : $x - 2 \cdot y + z = 0$.

On remarque que c'est impossible pour $x = 1, y = 0, z = 0$.

– Rédaction :

Le vecteur $(1, 0, 0)$ n'est pas dans $\text{Vect}((1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6), (5, 6, 7))$.

En effet, par l'absurde, soit $\lambda, \mu, \nu, \gamma$ tel que : $(1, 0, 0) = \lambda \cdot (1, 2, 3) \dot{+} \mu \cdot (2, 3, 4) \dot{+} \nu \cdot (4, 5, 6) \dot{+} \gamma \cdot (5, 6, 7)$.

On aurait :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \nu + 5 \cdot \gamma = 1 \\ 2 \cdot \lambda + 3 \cdot \mu + 5 \cdot \nu + 6 \cdot \gamma = 0 \\ 3 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu + 6 \cdot \nu + 7 \cdot \gamma = 0 \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \nu + 5 \cdot \gamma = 1 \\ -1 \cdot \mu + (-3) \cdot \nu + (-4) \cdot \gamma = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2 \cdot \mu + (-6) \cdot \nu + (-8) \cdot \gamma = -3 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \lambda + 2 \cdot \mu + 4 \cdot \nu + 5 \cdot \gamma = 1 \\ \mu + 3 \cdot \nu + 4 \cdot \gamma = 2 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ -2 \cdot \mu + -6 \cdot \nu + -8 \cdot \gamma = -3 \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \lambda + (-2) \cdot \nu + (-3) \cdot \gamma = -3 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \mu + 3 \cdot \nu + 4 \cdot \gamma = 1 \\ 0 = 1 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

Ce qui est absurde.

Donc la famille n'est pas génératrice.

– Par l'algorithme :

On sait que :

$\begin{pmatrix} (1, 2, 3) \\ (2, 3, 4) \\ (4, 5, 6) \\ (5, 6, 7) \end{pmatrix}$ est génératrice

ssi $\begin{pmatrix} (1, 2, 3) \\ (0, -1, -2) \\ (0, -3, -6) \\ (0, -4, -8) \end{pmatrix}$ est génératrice

ssi $\begin{pmatrix} (1, 2, 3) \\ (0, 1, 2) \\ (0, -3, -6) \\ (0, -4, -8) \end{pmatrix}$ est génératrice

ssi $\begin{pmatrix} (1, 2, 3) \\ (0, 1, 2) \\ (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \end{pmatrix}$ est génératrice

ssi $\begin{pmatrix} (1, 2, 3) \\ (0, 1, 2) \end{pmatrix}$ est génératrice

Or cette dernière famille n'est pas génératrice car elle ne contient que deux vecteurs dans un espace de dimension 3.

Puis la famille $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (4, 5, 6), (5, 6, 7))$ n'est pas génératrice.

□

5. Même question avec la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ de \mathbb{R}^4 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Cette famille contient trois éléments dans un espace de dimension 4, donc elle n'est pas génératrice et ce n'est pas une base.

On donne deux méthodes pour montrer la liberté :

– Par résolution directe :

Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \cdot (1, 0, 1, 0) + \mu \cdot (0, 1, 0, 1) + \nu \cdot (1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$.

Alors :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}$$

Puis, par substitution, $\lambda = 0$, $\mu = 0$, et $\nu = 0$.

Donc la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0))$ est libre.

– *Par l’algorithme :*

On sait que :

$\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (1, 1, 0, 0) \end{pmatrix}$ est libre

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 1, -1, 0) \end{pmatrix}$ est libre

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 0, -1, -1) \end{pmatrix}$ est libre

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}$ est libre

Or $\begin{pmatrix} (1, 0, 0, -1) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}$ est libre.

Or cette dernière famille est libre, car sur toute ligne, il y a une colonne où toutes les autres lignes sont nulles.

□

6. Même question avec la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ de \mathbb{R}^4 dans l’espace vectoriel $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

On donne deux méthodes :

– *Méthode directe :*

On va montrer que la famille n’est pas libre.

– *travail de recherche :*

Soit $\lambda, \mu, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda \cdot (1, 0, 1, 0) + \mu \cdot (0, 1, 0, 1) + \nu \cdot (1, 1, 0, 0) + \gamma \cdot (0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

On aurait :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda + \gamma = 0 \\ \mu + \gamma = 0 \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -\nu + \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \mu + \gamma = 0 \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ -\nu + \gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ -\nu + \gamma = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \nu - \gamma = 0 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} \lambda = -\nu \\ \mu = -\nu \\ \gamma = \nu \end{cases}$$

On peut donc prendre $\lambda = -1$, $\mu = -1$, $\nu = 1$, et $\gamma = 1$.

– Rédaction :

On a :

$$\dot{-} (1, 0, 1, 0) \dot{-} (0, 1, 0, 1) \dot{+} (1, 1, 0, 0) \dot{+} (0, 0, 1, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Donc la famille est liée. Comme c'est une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, elle n'est pas non plus génératrice (ce n'est bien sûr pas une base).

– Par l'algorithme :

On sait que : $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (1, 1, 0, 0) \\ (0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 1, -1, 0) \\ (0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 0, -1, -1) \\ (0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 1) \\ (0, 0, 1, 1) \end{pmatrix}$ est une base

ssi $\begin{pmatrix} (1, 0, 1, 0) \\ (0, 1, 0, 1) \\ (0, 0, 1, 1) \\ (0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$ est une base.

Or cette dernière famille n'est pas une base (elle contient le vecteur nulle).

Donc la famille $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ n'est pas une base, comme on est en dimension 4 et que la famille a 4 vecteurs, elle n'est ni libre, ni génératrice.