Algèbre linéaire

Jérôme Feret
LIENS (INRIA,ÉNS,CNRS)

5/12/19 décembre 2011
23/27/30 janvier 2012
3/6/17 février 2012

1 Groupes

1.1 Lois internes

Définition 1.1.1. *Soit A un ensemble.*
Une loi interne sur A est une fonction de $A \times A$ dans A.

Exemple 1.1.1. *La fonction vide est une loi interne sur l'ensemble vide.*

Exemple 1.1.2. *La fonction qui à la paire $(1,1)$ associe 1 est une loi interne sur le singleton $\{1\}$.*

Exemple 1.1.3. *L'addition $+$ et le produit $\cdot$ sont des lois internes pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.4. *La soustraction $-$ est une loi interne pour $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.5. *Si A est un ensemble, alors la composition $\circ$ est une loi interne sur l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ des fonctions de A dans A.*

Exemple 1.1.6. *La fonction $\odot$ qui associe à toute paire (x,y) de rationnels, le rationnel $x + 2 \cdot y$, est une loi interne sur $\mathbb{Q}$.*

Exemple 1.1.7. *Soit A un ensemble. La fonction $\rfloor$ qui à une paire $(x,y) \in A^2$ d'éléments de A associe le premier élément x, est une loi interne sur A. $\rfloor$ est la projection selon la première coordonnée.*

Notation 1.1.1. *Si $\otimes$ est une loi interne sur l'ensemble A, alors, pour $x, y \in A$, l'élément $\otimes(x,y)$ est habituellement noté $x \otimes y$.*

1.2 Associativité

Définition 1.2.1. *Une loi interne $\otimes$ sur un ensemble A est dite associative si et seulement si, pour tout x, y, $z \in A$, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.*

Exemple 1.2.1. *La loi interne sur l'ensemble vide, est associative.*

Exemple 1.2.2. *Une loi interne sur un singleton est associative.*

Exemple 1.2.3. *L'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ sont des lois internes associatives sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.2.4. *La soustraction $-$ n'est associative ni sur $\mathbb{Z}$, ni sur $\mathbb{Q}$, ni sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.2.5. *Si A est un ensemble, la composition $\circ$ est une loi associative sur $\mathcal{F}(A)$.*

Exemple 1.2.6. *La loi interne $\odot$ définie sur $\mathbb{Q}$ par $x \odot y \triangleq x + 2 \cdot y$ n'est pas associative.*

Exemple 1.2.7. *Soit A un ensemble. La projection p_1 sur la première coordonnée est une loi associative sur A.*

Proposition 1.2.1. *Si $\otimes$ est une loi interne associative sur un ensemble A, alors pour tout x, y, z, $t \in A$, on a : $x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = ((x \otimes y) \otimes z) \otimes t$.*

Notation 1.2.1. *Lorsqu'une loi est associative, on omet généralement les parenthèses.*

1.3 Commutativité

Définition 1.3.1. *Une loi interne $\otimes$ sur un ensemble A est dite commutative si et seulement si, pour tout x, $y \in A$, $x \otimes y = y \otimes x$.*

Exemple 1.3.1. *La loi interne définie sur l'ensemble vide, est commutative.*

Exemple 1.3.2. *Une loi interne définie sur un singleton, est commutative.*

Exemple 1.3.3. *Par exemple, l'addition $+$ et la multiplication $\cdot$ sont des lois internes commutatives sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ou $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.3.4. *Si A est un ensemble contenant au moins deux éléments, la composition $\circ$ définie sur $\mathcal{F}(A)$ n'est pas une loi commutative.*

Exemple 1.3.5. *La loi interne $\odot$ définie sur $\mathbb{Q}$ par $x \odot y \triangleq x + 2 \cdot y$ n'est pas commutative.*

Proposition 1.3.1. *Si $\otimes$ est une loi interne associative et commutative sur un ensemble A, alors pour tout x, y, z, $t \in A$, on a : $x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = ((t \otimes y) \otimes z) \otimes x$.*

1.4 Élements neutres

Définition 1.4.1. *Soit A un ensemble muni d'une loi interne $\otimes$.*

1. *un élément $\varepsilon_d \in A$ est un élément neutre à droite pour la loi $\otimes$ si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $x \otimes \varepsilon_d = x$.*
2. *un élément $\varepsilon_g \in A$ est un élément neutre à gauche pour la loi $\otimes$ si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $\varepsilon_g \otimes x = x$.*
3. *un élément $\varepsilon \in A$ est un élément neutre pour la loi $\otimes$ si et seulement si c'est un élément neutre à droite pour la loi $\otimes$ et un élément neutre à gauche pour la loi $\otimes$.*

Exemple 1.4.1. *La loi interne définie sur l'ensemble vide n'a pas d'élément neutre.*

Exemple 1.4.2. *Une loi interne définie sur un singleton admet un élément neutre (le seul élément du singleton).*

Exemple 1.4.3. *Par exemple, 0 est un élément neutre pour la loi $+$ définie sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$, alors que 1 est un élément neutre pour $\cdot$ définie sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.4.4. *Si A est un ensemble, la fonction identité est un élément neutre pour la composition $\circ$ définie sur $\mathcal{F}(A)$.*

Exemple 1.4.5. *Soit $\odot$ la loi interne, définie sur $\mathbb{Q}$ par $x \odot y \triangleq x + 2 \cdot y$. 0 est un élément neutre à droite pour la loi $\odot$, mais il n'y a pas d'élément neutre à gauche pour la loi $\odot$.*

Proposition 1.4.1. *Soit A un ensemble muni d'une loi interne $\otimes$. Si $\otimes$ admet à la fois un élément neutre à droite et un élément neutre à gauche, alors $\otimes$ admet un élément neutre.*

Proposition 1.4.2. *Soit A un ensemble muni d'une loi interne $\otimes$. Si $\otimes$ admet un élément neutre, alors $\otimes$ admet un unique élément neutre.*

1.5 Inverses

Définition 1.5.1. *Soit $\otimes$ une loi interne sur un ensemble A qui admet un élément neutre ε et soit x, y deux éléments de A. On dit que :*

1. *y est un inverse à gauche de x si et seulement si $y \otimes x = \varepsilon$.*
2. *y est un inverse à droite de x si et seulement si $x \otimes y = \varepsilon$.*
3. *y est un inverse de x si et seulement si y est un inverse à droite de x, et un inverse à gauche de x.*

Un élément $x \in A$ est dit inversible si et seulement si il admet un inverse.

Exemple 1.5.1. *L'entier 0 est le seul élément inversible pour la loi $+$ définie sur $\mathbb{N}$.*

Exemple 1.5.2. *Tous les éléments de $\mathbb{Z}$ (resp. $\mathbb{Q}$, resp. $\mathbb{R}$) sont inversibles pour la loi $+$.*

Exemple 1.5.3. *L'élément 1 est le seul élément inversible de $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$) pour la loi $\cdot$.*

Exemple 1.5.4. *Tous les éléments sauf 0 sont inversibles pour les lois $\cdot$ définies sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.5.5. *La fonction :*

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$$

a des inverses à gauche, mais pas d'inverse à droite, pour la composition $\circ$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Exemple 1.5.6. *La fonction :*

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n \mapsto n-1 \end{cases}$$

a des inverses à droite, mais pas d'inverse à gauche, pour la composition $\circ$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Exemple 1.5.7. *La fonction :*

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$$

a un inverse à gauche et un inverse à droite. , pour la composition $\circ$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$.

Exemple 1.5.8. *La fonction :*

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ 0 \mapsto 0 \\ n \mapsto n-1 \end{cases}$$

n'a des inverses ni à gauche, ni à droite, pour la composition $\circ$ définie sur $\mathcal{F}(\mathcal{Z})$.

Exemple 1.5.9. *Soit A un ensemble. Les éléments inversibles pour la composition définie sur l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ sont les fonctions bijectives. Les éléments qui ont un inverse à gauche sont les injections. Si de plus si il existe une fonction $h : \wp(A)\backslash\{\varnothing\} \to A$ telle que pour tout $X \subseteq A\backslash\{\varnothing\}$, $h(X) \in X$, alors les éléments qui ont un inverse à droite sont les surjections.*

Fin de la 1^{re} semaine.

Propriété 1.5.1. *Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne sur A, qui admet un élément neutre ε. Alors, x est un inverse à droite de y pour $\otimes$ si et seulement si y est un inverse à gauche de x pour $\otimes$.*

Propriété 1.5.2. *Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre, et soit x un élément de A. Si $x \in A$ a un inverse à gauche pour $\otimes$, alors pour tout $y, z \in A$, si $x \otimes y = x \otimes z$ alors $y = z$.*
On dit alors que x est simplifiable à gauche.

Propriété 1.5.3. *Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre ε et soit x un élément de A. Si $x \in A$ a un inverse à droite pour $\otimes$, alors pour tout $y, z \in A$, si $y \otimes x = z \otimes x$ alors $y = z$.*
On dit alors que x est simplifiable à droite.

Proposition 1.5.1. *Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre ε. Soit x un élément de A. Si x est inversible, alors il existe un unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$.*

Définition 1.5.2. *Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre ε. Si $x \in A$ est inversible, l'unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$ est appelé inverse de x, et est noté x^{-1}.*

Propriété 1.5.4. *Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre. Si x est inversible, alors l'inverse de l'inverse de x est x.*

Propriété 1.5.5. *Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative sur A, qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux élément inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :*

$$(x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}.$$

Propriété 1.5.6. *Soit A un ensemble, soit $\otimes$ une loi interne associative et commutative sur A, qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux élément inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :*

$$(x \otimes y)^{-1} = x^{-1} \otimes y^{-1}.$$

Propriété 1.5.7. *La propriété 1.5.6 n'est pas satisfaite par toutes les lois associatives non commutatives, munies d'un élément neutre, et pour lesquels tous les éléments ont un inverse.*

Proposition 1.5.2. *Soit $\otimes$ une loi interne associative sur un ensemble A, qui admet un élément neutre. Si tous les éléments de A ont un inverse à droite, alors tous les éléments de A sont inversibles.*

1.6 Groupes

Définition 1.6.1. *Un groupe est une paire $(G, \times)$ telle que G soit un ensemble, et $\times$ soit une loi interne associative sur G qui admet un élément neutre, et telle que tout élément de x soit inversible.*

Propriété 1.6.1. *Un groupe est non vide.*

Définition 1.6.2. *Un groupe $(G, +)$ est dit abélien, si la loi $+$ est commutative.*

Notation 1.6.1. *Lorsque $(G, +)$ est un groupe abélien, l'élément neutre est souvent noté 0_G et l'inverse d'un élément x est noté $-x$.*

Exemple 1.6.1. *Un ensemble à un élément, x, est un groupe abélien pour la loi $+$ définie par $x + x \triangleq x$.*

Exemple 1.6.2. *Aucune des paires $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, ou $(\mathbb{R}, \cdot)$ n'est un groupe.*

Exemple 1.6.3. *Les paires $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes abéliens.*

Exemple 1.6.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ l'ensemble des entiers entre 0 et $n-1$ muni de l'addition modulo n, est un groupe. L'élément neutre est 0. De plus, pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant i < n$, l'inverse de i est $n - i$.*

Exemple 1.6.5. *Si A est un ensemble avec un ou deux éléments. La paire $(Bij(A), \circ)$, où $Bij(A)$ est l'ensemble des bijections de A dans A, est un groupe abélien.*

Exemple 1.6.6. *Si A est un ensemble avec au moins trois éléments. La paire $(Bij(A), \circ)$, où $Bij(A)$ est l'ensemble des bijections de A dans A est un groupe non abélien.*

Proposition 1.6.1. *Si $(G, .)$ est un groupe d'élément neutre ε_G et tel que pour tout $x \in G$, $x.x = \varepsilon_G$, alors $(G, .)$ est abélien.*

2 Espaces vectoriels

Dans la suite, $\mathbb{K}$ est soit l'ensemble $\mathbb{Q}$, soit l'ensemble $\mathbb{R}$, soit l'ensemble $\mathbb{C}$.

2.1 Définition

Définition 2.1.1. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \bullet)$ tel que :*

1. *$(E, +)$ soit un groupe abélien, dont on note l'élément neutre 0_E ;*
2. *$\bullet$ soit une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;*
3. *pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$ on ait :*
   - (a) $(\lambda + \mu) \bullet u = (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u)$;
   - (b) $\lambda \bullet (u + v) = (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v)$;
   - (c) $\lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet u$;
   - (d) $1 \bullet u = u$.

Exemple 2.1.1. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 2.1.2. *Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le triplet $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\dot{+}$ applique la loi $+$ composante par composante et $\dot{\bullet}$ applique la loi $\bullet$ composante par composante, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 2.1.3. *Soit A un ensemble et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(\mathcal{F}(A, E), \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\mathcal{F}(A, E)$ est l'ensemble des fonctions de A dans E, $\dot{+}$ applique la loi $+$ point à point, et $\dot{\bullet}$ applique la loi $\bullet$ point à point est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Exemple 2.1.4. *L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de l'addition point à point et de la multiplication point à point est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Exemple 2.1.5. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\dot{+}$ applique la loi $+$ composante par composante, et $\dot{\bullet}$ applique la loi $\bullet$ composante par composante est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Propriété 2.1.1. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $0 \bullet u = 0_E$.*

Propriété 2.1.2. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'élément neutre 0_E et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. On a : $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.*

Propriété 2.1.3. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit u un élément de E. On a : $(-1) \bullet u = -u$.*

Propriété 2.1.4. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit u un élément de E, et soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Si $\lambda \bullet u = 0_E$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.*

2.2 Sous-espaces

Définition 2.2.1. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble non vide*[1] *$F \subseteq E$, tel que :*

1. *pour tout $u, v \in F$, $(u + v) \in F$;*
2. *pour tout $u \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \bullet u) \in F$.*

Propriété 2.2.1. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F contient l'élément neutre 0_E de la loi $+$ définie sur E.*

Propriété 2.2.2. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \bullet)$. On note $+_{|F}$ la loi interne qui associe à une paire (u, v) d'éléments dans F, l'élément $u + v$, et $._{|F}$ la loi externe qui associe à un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et à un élément $u \in F$, l'élément $\lambda \bullet u$. Alors $(F, +_{|F}, \cdot_{|F})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre 0_E.*

Propriété 2.2.3. *Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.*

Propriété 2.2.4. *Si $(E, +, \bullet)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'intersection de deux sous-espaces de $(E, +, \bullet)$ est un sous-espace de $(E, +, \bullet)$.*

Propriété 2.2.5. *Il existe un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ et deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$ tels que leur union ne soit pas un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.*

Exemple 2.2.1. $\mathbb{K}$ *et $\{0_{\mathbb{K}}\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.*

Exemple 2.2.2. *L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \dot{+}, \dot{\bullet})$.*

Exemple 2.2.3. *L'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$.*

Exemple 2.2.4. *Si $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'ensemble des suites à valeur dans E qui stationnent est un sous-espace vectoriel de $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$.*

Exemple 2.2.5. *L'ensemble des couples de fonctions (x, y) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que x et y soient dérivables et vérifient :*

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel pour l'addition point à point composante par composante, et le produit externe point à point et composante par composante.

Fin de la 2$^{\text{e}}$ semaine.

2.3 Sous-espaces engendrés

Définition 2.3.1. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
Soit $(\lambda_i, u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie de n couples dans $\mathbb{K} \times E$.
On définit les sommes partielles S_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$ par :

$$\begin{cases} S_0 = 0_E \\ S_k = S_{k-1} + \lambda_k \bullet u_k \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant i \end{cases}$$

1. Il me semble avoir oublié ce point dans la définition que j'ai donné lundi, or c'est nécessaire pour montrer que tout sous-espace vectoriel contient l'élément neutre...

On appelle combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *par les coefficients de la famille* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$*, le vecteur* $S_n \in E$.

Notation 2.3.1. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel.*
On note :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i,$$

la combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *par les coefficients de la famille* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Propriété 2.3.1. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel,* n *un entier naturel,* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille d'éléments de* E*,* $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}$*, et* σ *une bijection de l'ensemble des entiers entre* 1 *et* n *dans lui-même.*
Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\sigma(i)} \bullet u_{\sigma(i)}.$$

Notation 2.3.2. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble fini et* $(\lambda_i,u_i)_{i\in I} \in (\mathbb{K}\times E)^I$ *une famille de couple dans* $\mathbb{K}\times E$ *indexée par* I*. On note :*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i {\bullet} u_i \triangleq \sum_{k=1}^{n} \lambda_{\sigma(k)} {\bullet} u_{\sigma(k)}.$$

où n *est le cardinal de* i*, et* σ *une bijection de* I *dans* $\{k \mid 1\leqslant k\leqslant n\}$.

Propriété 2.3.2. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* $A\subseteq E$ *une partie de* E*. Il existe un ensemble* F *tel que :*

- F *soit un sous-espace de* $(E,+,\bullet)$ *;*
- A *soit un sous-ensemble de* E *;*
- *pour tout sous-espace* G *de* $(E,+,\bullet)$ *tel que* $A\subseteq G$*, on ait* $F\subseteq G$.

L'ensemble F *est alors appelé le sous-espace de* $(E,+,\bullet)$ *engendré par* A.

Notation 2.3.3. *Soit* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A *une partie de* E*. Le sous-espace de* $(E,+,.)$ *engendré par* A *est noté* $\mathit{Vect}(A)$.

Propriété 2.3.3. *Soit* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* A *une partie de* E*. Alors :*

$$\mathit{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet u_i \;\middle|\; n\in\mathbb{N}, (u_i){\in}A^n, (\lambda_i)\in\mathbb{K}^n \right\}.$$

Remarque 2.3.1. *Si* F *est un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(E,+,\bullet)$*, alors* $\mathit{Vect}(F) = F$.

Exemple 2.3.1. *Si* $(E,+,\bullet)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, alors* $\{0_E\}$ *est le sous-espace de* $(E,+,\bullet)$ *engendré par* $\{0_E\}$ *; de plus,* E *est le sous-espace vectoriel engendré par* E.

Exemple 2.3.2. *Le sous-espace de* $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\bullet})$ *engendré par* $\{(1,0,0)\}$ *est* $\{(\lambda,0,0)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Exemple 2.3.3. *Le sous-espace de* $(\mathbb{K}^3,\dot{+},\dot{\bullet})$ *engendré par* $\{(1,1,0)\}$ *est* $\{(\lambda,\lambda,0)\mid\lambda\in\mathbb{K}\}$.

Exemple 2.3.4. *Le sous-espace de* $(\mathbb{K}^3,\dot{+},\dot{\bullet})$ *engendré par* $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *est* $\{(\lambda,\mu,0)\mid\lambda,\mu\in\mathbb{K}\}$.

Exemple 2.3.5. *Pour* $k\in\mathbb{N}$*,* δ^k *est la suite définie par :*

$$\begin{cases} \delta^k_n = 1 & \text{si } k=n \\ \delta^k_n = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le sous-espace de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\dot{+},\dot{\cdot})$ *engendré par les suites* $\{\delta^k \mid k\in\mathbb{N}\}$ *est l'ensemble des suites de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *qui stationnent en* 0.

2.4 Familles libres

Définition 2.4.1. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *est dite libre si et seulement si pour tout ensemble fini* $J \subseteq I$ *et toute famille de scalaire* $(\lambda_j)_{j\in J}$*, on a :*

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E \Leftrightarrow \forall j \in J, \lambda_j = 0.$$

Définition 2.4.2. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel et* f *une famille d'éléments de* E*. On dit que* f *est liée si et seulement si elle n'est pas libre.*

Remarque 2.4.1. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble fini. Une famille* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *d'éléments de* E *est libre si et seulement si pour tout toute famille de scalaires* $(\lambda_i)_{i\in I}$*, on a :*

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \bullet u_I = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_j = 0.$$

Propriété 2.4.1. *Si* $(E, +, \bullet)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément* 0_E*.*

Exemple 2.4.1. *Si* $(E, +, \bullet)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, alors toute famille formée d'un élément de* $E\backslash\{0_E\}$ *est libre.*

Exemple 2.4.2. *La famille* $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ *est libre dans* $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$*.*

Exemple 2.4.3. *La famille* $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ *est liée dans* $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$*.*

Exemple 2.4.4. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel. Soit* $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{})$*. l'espace vectoriel des* n*-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille* $(\delta^k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *de vecteurs telle que* δ_k *a toutes ses coordonnées égales à* 0*, sauf la* k*-ième coordonnée qui vaut* 1 *est libre.*

Propriété 2.4.2. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille libre d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* J *un sous ensemble de* I*. Alors, la famille* $(u_j)_{j\in J}$ *est libre.*

Propriété 2.4.3. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* σ *une bijection de* I *dans* I*. Soit* $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\left\{ v_i \triangleq u_{\sigma(i)}. \right.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est libre si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Propriété 2.4.4. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\lambda \neq 0$ *et* $i_0 \in I$ *un élément de* I*. Soit* $(v_i)_{i\in} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i \triangleq u_i & \textit{pour } i \in I\backslash\{i_0\}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est libre si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Propriété 2.4.5. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soient* $i_0 \in I$ *et* $j_0 \in I$ *deux éléments de* I*. Soit* $(v_i)_{i\in} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + u_{j_0} \\ v_i \triangleq u_i & \textit{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est libre si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Propriété 2.4.6. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Soient* $i_0 \in I$ *et* $j_0 \in I$ *deux éléments de* I *tels que* $i_0 \neq j_0$*. Soit* $(v_i)_{i\in I} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i \triangleq u_i & \textit{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est libre si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est libre.*

Propriété 2.4.7. *Soient* m *et* n *deux entiers positifs dans* $\mathbb{N}$*. Soit* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ *une famille de* m *vecteurs du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$*. Si pour tout* i *entre* 1 *et* m*, il existe une coordonnée* j_i *telle que pour tout indice* i' *entre* 1 *et* m*, la* j_i*-ième coordonnée de* $u_{i'}$ *soit égale à* 0 *si et seulement si* $i' \neq i$*, alors la famille* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *est libre.*

Algorithme 2.4.1. *Soient* m *et* n *deux entiers positifs dans* $\mathbb{N}$*. Soit* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ *une famille de* m *vecteurs de* $\mathbb{K}^n$*.*
On note $u_{i,j}$ *la* j*-ième coordonnée du* i*-ième vecteur de la famille* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$*. L'algorithme suivant permet de décider si* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *est libre, ou liée.*
Prendre $p \leftarrow 0$*.*

1. *si* $p = m$ *alors la famille est libre.*
2. *si* $p < m$ *et s'il pour tout* q *entre* 1 *et* n*,* $u_{p+1,q} = 0$*, alors la famille est liée.*
3. *sinon, prendre* q *le plus petit entier tel que* $u_{p+1,q} \neq 0$*.*
4. *Multiplier le vecteur* u_{p+1} *par l'inverse de* $u_{p+1,q}$*.*
5. *Soustraire à chaque vecteur* $u_{p'}$ *pour* $p' \neq p$ *le vecteur* u_{p+1} *multiplié par* $u_{p',q}$*.*
6. *Prendre* $p \leftarrow p+1$*.*
7. *Retourner à l'étape 1.*

Exemple 2.4.5. *On utilise l'algorithme 2.4.1 pour savoir si la famille* $((1,1,0),(-1,1,0))$ *est libre, ou non.*
La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,1,0) \end{pmatrix}$ *est libre,*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,2,0) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$*),*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,1,0) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2/2$*),*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_1 \leftarrow L1 - L2$*).*
Or cette dernière famille est libre, par la propriété 2.4.7, donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0))$ *est libre.*

Exemple 2.4.6. *On utilise l'algorithme 2.4.1 pour savoir si la famille* $((1,0,1),(-1,0,1))$ *est libre, ou non.*
La famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (-1,0,1) \end{pmatrix}$ *est libre,*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,0,2) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$*),*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2/2$*),*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_1 \leftarrow L1 - L2$*).*
Or cette dernière famille est libre, par la propriété 2.4.7, donc la famille $((1,0,1),(-1,0,1))$ *est libre.*

Exemple 2.4.7. *On utilise l'algorithme 2.4.1 pour savoir si la famille* $(1,1,0),(-1,-1,0))$ *est libre, ou non.*
La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,-1,0) \end{pmatrix}$ *est libre,*

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,0,0) \end{pmatrix}$ *est libre (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$*).*
Or cette dernière famille est liée, par la propriété 2.4.1, donc la famille $(1,1,0),(-1,-1,0))$ *est liée.*

Fin de la 3^{e} semaine.

2.5 Familles génératrices

Définition 2.5.1. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Une famille* $(u_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* E *est dite génératrice de* $(E,+,\bullet)$ *si et seulement si pour tout élément* $u \in E$*, il existe un sous-ensemble fini* $J \subseteq I$ *et une famille de scalaire* $(\lambda_j)_{j\in J}$*, tels que :*

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$

Propriété 2.5.1. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, soit* I *un ensemble, et soit* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. La famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est une famille génératrice de* $(E,+,\bullet)$ *si et seulement si* $Vect(\{u_i \mid i \in I\}) = E$*.*

Exemple 2.5.1. *Pour tout élément non nul,* $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$*, la famille* (λ) *est une famille génératrice de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(\mathbb{K},+,\cdot)$*.*

Exemple 2.5.2. *Si* $(E,+,\bullet)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, alors la famille* $(u)_{u\in E}$ *de tous les vecteurs de* E *est une famille génératrice.*

Exemple 2.5.3. *La famille* $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ *est une famille génératrice de* $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\cdot})$*.*

Exemple 2.5.4. *La famille* $((1,1,0),(-1,1,0),(2,3,0))$ *n'est pas une famille génératrice de* $(\mathbb{R}^3,\dot{+},\dot{\bullet})$*.*

Exemple 2.5.5. *La famille des suites* $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *n'est pas une famille génératrice de l'espace des suites à valeur dans* $\mathbb{R}$*.*

Propriété 2.5.2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel. Soit* I *un ensemble et* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}^n$ *telle qu'il existe un indice* $i_0 \in I$ *tel que pour tout indice* $i \in I$*, la coordonnée* i_0 *de* u_i *soit égale à 0. Alors la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *n'est pas génératrice.*

Propriété 2.5.3. *Soit* $m,n \in \mathbb{N}$ *deux entiers naturels. Soit* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *une famille de* m *éléments de* $\mathbb{K}^n$*. On suppose qu'il existe un indice* i_0 *tel que* $1 \leqslant i_0 \leqslant \min(m-1,n)$*, et tel que pour tout* i *entre* 1 *et* i_0*, la* j*-ième coordonnée du vecteur* u_i *vaut* 1 *si* $i = j$ *et* 0 *sinon, et tel que pour tout* $i > i_0$ *la* i_0+1*-ième coordonnée du vecteur* u_i *vaut* 0*. Alors la famille* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *n'est pas génératrice.*

Exemple 2.5.6. *D'après la propriété 2.5.3, la famille :*

$$\begin{pmatrix} (1,0,0,3) \\ (0,1,0,2) \\ (0,0,1,2) \\ (0,0,0,0) \end{pmatrix}$$

n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^4,\dot{+},\dot{\cdot})$*.*

Exemple 2.5.7. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel. Soit* $(\mathbb{K}^n,\dot{+},\dot{})$*. l'espace vectoriel des n-uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille* $(\delta^k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ *de vecteurs telle que* δ_k *a toutes ses coordonnées égales à* 0*, sauf la* k*-ième coordonnée qui vaut* 1 *est génératrice.*

Propriété 2.5.4. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* J *un sous ensemble de* I*. Alors, si la famille* $(u_j)_{j\in J}$ *est génératrice de* E*, alors la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est génératrice de* E*.*

Propriété 2.5.5. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* σ *une bijection de* I *dans* I*. Soit* $(v_i)_{i\in} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_i \triangleq u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est génératrice si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est génératrice.*

Propriété 2.5.6. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $\lambda \neq 0$ *et* $i_0 \in I$ *un élément de* I*. Soit* $(v_i)_{i\in} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i \triangleq u_i & \text{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est génératrice si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est génératrice.*

Propriété 2.5.7. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soient* $i_0 \in I$ *et* $j_0 \in I$ *deux éléments de* I*. Soit* $(v_i)_{i\in} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + u_{j_0} & \\ v_i \triangleq u_i & \text{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est génératrice si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est génératrice.*

Propriété 2.5.8. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble. Si* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par* I*. Soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Soient* $i_0 \in I$ *et* $j_0 \in I$ *deux éléments de* I *tels que* $i_0 \neq j_0$*. Soit* $(v_i)_{i\in} \in E^I$ *la famille d'éléments de* E *définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ *est génératrice si et seulement si la famille* $(v_i)_{i\in I}$ *est génératrice.*

Algorithme 2.5.1. *Soient* m *et* n *deux entiers positifs dans* $\mathbb{N}$*. Soit* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ *une famille de* m *vecteurs de* $\mathbb{K}^n$*.*
On note $u_{i,j}$ *la* j*-ième coordonnée du* i*-ième vecteur de la famille* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$*. L'algorithme suivant permet de décider si* $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ *est génératrice, ou non.*
Prendre $p \leftarrow 0$*.*

1. *si* $p = n$ *alors la famille est génératrice.*
2. *si* $p < n$ *et si pour tout* k *tel que* $p < k \leqslant m$*, on a :* $u_{k,p+1} = 0$ *alors la famille n'est pas génératrice.*
3. *sinon, prendre* k *le plus petit entier strictement supérieur à* p *tel que* $u_{k,p+1} \neq 0$*.*
4. *Multiplier le vecteur* u_k *par l'inverse de* $u_{k,p+1}$*.*
5. *Soustraire à chaque vecteur* $u_{k'}$ *pour* $k' \neq k$ *le vecteur* u_k *multiplié par* $u_{k,p+1}$*.*
6. *Permuter le vecteur* u_{p+1} *et* u_k*.*
7. *Prendre* $p \leftarrow p + 1$*.*
8. *Retourner à l'étape 1.*

Exemple 2.5.8. *On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille* $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ *est une famille génératrice, ou non. La famille* $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,1,0) \\ (1,1,1) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,2,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice (en utilisant les transformations* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2/2$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice (en utilisant la transformation* $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$*)*
Or cette dernière famille est génératrice car elle satisfait la propriété 2.5.2.
Donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ *est une famille génératrice.*

Exemple 2.5.9. *On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille* $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ *est une famille génératrice, ou non. La famille* $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (-1,1,-1) \\ (2,0,2) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,2,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice (en utilisant les transformations* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,1,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2/2$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,1,0) \\ (0,0,0) \end{pmatrix}$ *est une famille génératrice (en utilisant la transformation* $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$*)*
Or cette dernière famille n'est pas génératrice car pour tout $(x,y,z) \in Vect((1,0,1),(0,1,0),(0,0,0)))$*, on a* $x = z$*. Puis* $(0,0,1) \notin Vect((1,0,1),(0,1,0),(0,0,0)))$*.*
Donc la famille $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ *n'est pas une famille génératrice.*

2.6 Bases et dimensions

Définition 2.6.1. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. On appelle base de* E *toute famille d'éléments de* E *qui est à la fois libre et génératrice de* E*.*

Théorème 2.6.1. *Soit* $(E,+,\bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Soit* I *un ensemble et* $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ *une famille d'éléments de* E *indexée par I, tel que* $(u_i)_{i\in I}$ *soit une base de* E*.*
Alors pour tout vecteur $u \in E$*, il existe un unique sous-ensemble* $J \subseteq I$ *et une unique famille* $(\lambda_j)_{j\in J}$ *de scalaires non nuls tel que :*

$$u = \sum_{j\in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

Exemple 2.6.1. *Tout élément non nul de* $\mathbb{K}$ *est une base du* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* $(\mathbb{K},+,\bullet)$*.*

Exemple 2.6.2. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ telle que la j-ième coordonnée du i-ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$ (on dit que c'est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).*

Exemple 2.6.3. *Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille $(e_{i,j})_{i\in I, 1\leqslant j\leqslant n}$ définie par $e_{i,j}$ est un vecteur de n composantes dont la k-ième composante est égale b_i si $j = k$ ou 0_E sinon, est une base de $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$.*

Exemple 2.6.4. *Soit A un ensemble fini et $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i\in I}$ une base de E. La famille $(f_{i,j})_{i\in I, j\in A}$ définie par $f_{i,j}(a) = b_i$ si $a = j$, et $f_{i,j}(a) = 0_E$ sinon, est une base de $(\mathcal{F}(A, E), \dot{+}, \dot{\bullet})$.*

Exemple 2.6.5. *La famille des suites $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites qui stationnent en 0.*

Propriété 2.6.1. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille libre maximale.*

Propriété 2.6.2. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille génératrice minimale.*

Propriété 2.6.3. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit σ une bijection de I dans I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :*

$$\begin{cases} v_i = u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Propriété 2.6.4. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} = \lambda \bullet u_{i_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Propriété 2.6.5. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base de E.

Propriété 2.6.6. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i\in} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :*

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} & \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I\backslash\{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est une base si et seulement si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est une base.

Théorème 2.6.2. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J. Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille d'élément de E, tel que la famille $(u_i)_{i\in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j\in J}$ soit une famille génératrice de E. Alors il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et la famille $(u_k)_{k\in K}$ est une base de E.*

Fin de la 4^{e} semaine.

Corollaire 2.6.1. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre finie de $(E, +, \bullet)$ s'étend en une base.*

Corollaire 2.6.2. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Toute famille génératrice finie de $(E, +, \bullet)$ contient une base.*

Corollaire 2.6.3. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre finie de $(E, +, \bullet)$ s'étend en une base.*

Propriété 2.6.7. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui possède une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille qui possède au moins $n+1$ éléments de E est liée.*

Théorème 2.6.3. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.*

Définition 2.6.2. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E.*

Propriété 2.6.8. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille libre de n élément est une base.*

Propriété 2.6.9. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini égale à n. Alors toute famille génératrice de n élément est une base.*

Propriété 2.6.10. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.*

Exemple 2.6.6. *Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par l'ensemble $\{(1,1,0), (2,2,0)\}$ est dimension fini égal à 1.*

Exemple 2.6.7. *Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par l'ensemble $\{(1,1,0), (2,1,0)\}$ est dimension fini égal à 2.*

Algorithme 2.6.1. *Soient n un entier positif dans $\mathbb{N}$. Soit $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$.*
On note $u_{i,j}$ la j-ième coordonnée du i-ième vecteur de la famille $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre, ou liée.
Prendre $p \leftarrow 0$.

1. *si $p = n$ alors la famille est une base.*
2. *si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leqslant n$, on ait $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas une base.*
3. *sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.*
4. *Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.*
5. *Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.*
6. *Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k.*
7. *Prendre $p \leftarrow p + 1$.*
8. *Retourner à l'étape 1.*

Exemple 2.6.8. *On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille $((1,1,0), (-1,1,0), (1,1,1))$ est une base, ou non. La famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (-1,1,0) \\ (1,1,1) \end{pmatrix}$ est une base*

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,2,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est une base (en utilisant les transformations* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est une base (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2/2$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{pmatrix}$ *est une base (en utilisant la transformation* $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$*)*
Or cette dernière famille est une base (c'est l'exemple 2.6.2).
Donc la famille $((1,1,0),(-1,1,0),(1,1,1))$ *est une base.*

Exemple 2.6.9. *On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille* $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ *est une base, ou non. La famille* $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (-1,1,-1) \\ (2,0,2) \end{pmatrix}$ *est une base*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,2,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ *est une base (en utilisant les transformations* $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,1,1) \\ (0,1,0) \\ (0,-2,0) \end{pmatrix}$ *est une base (en utilisant la transformation* $L_2 \leftarrow L_2/2$*)*
si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1,0,1) \\ (0,1,0) \\ (0,0,0) \end{pmatrix}$ *est une base (en utilisant la transformation* $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$*)*
Or cette dernière famille n'est pas une base car elle n'est pas libre (par la propriété 2.4.1).
Donc la famille $((1,1,1),(-1,1,-1),(2,0,2))$ *n'est pas une famille génératrice, puis ce n'est pas une base.*

3 Applications linéaires

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 (Applications linéaires)**.** *Soit* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Une application linéaire de* $(E, +_E, \bullet_E)$ *dans* $(F, +_F, \bullet_F)$ *est une fonction* ϕ *de* E *dans* F *qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *(additivité)* $\forall u, v \in E$*, on a :* $\phi(u +_E v) = \phi(u) +_F \phi(v)$ *;*
2. *(homogénéité)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$*, on a :* $\phi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \phi(u)$*)*.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ *dans* $(F, +_F, \bullet_F)$ *est noté* $\mathcal{L}(E, F)$*.*

Définition 3.1.2 (Homomorphismes)**.** *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Une application linéaire de* $(E, +, \bullet)$ *dans* $(E, +, \bullet)$ *dans lui même est appelée un homomorphisme.*
L'ensemble des homomorphismes de $(E, +, \bullet)$ *est noté* $\mathcal{L}(E)$*.*

Définition 3.1.3 (Isomorphismes)**.** *Un isomorphisme est une application linéaire bijective.*
L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +_E, \bullet_E)$ *et un autre* $(F, +_F, \bullet_F)$ *est noté Isom*(E, F)*.*

Définition 3.1.4 (Automorphismes)**.** *Un automorphisme est un homomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire* $(E, +, \bullet)$ *est noté* $\mathcal{GL}(E)$*.*

Définition 3.1.5 (Forme linéaire)**.** *Une application linéaire d'un espace dans l'espace* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *est appelée une forme linéaire.*

Exemple 3.1.1. *Soient* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Alors la fonction* ϕ *de* E *dans* F *qui associe à tout vecteur* $u \in E$ *le vecteur* 0_F *est une application linéaire.*

Exemple 3.1.2. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Alors la fonction* Id_E *est un automorphisme de* E.

Exemple 3.1.3. *La fonction* ϕ *définie par :*

$$\phi \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to \mathbb{K}^2 \\ (x, y) & \mapsto (y, x) \end{cases}$$

est un automorphisme de $(K^2, \dot{+}, \dot{\bullet})$

Exemple 3.1.4. *La fonction* ϕ *définie par :*

$$\phi \ : \ \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \to \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto x + 2 \cdot y \end{cases}$$

est une forme linéaire de $\mathbb{K}^2$.

Exemple 3.1.5. *La fonction diff définie par :*

$$diff \ : \ \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ f & \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{\delta f(t)}{\delta t}, \end{cases} \end{cases}$$

est une application linéaire de l'espace des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et du produit externe point à point, dans l'espace des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et du produit externe point à point.*

Exemple 3.1.6. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. La fonction* $\int_I$ *de l'espace des fonctions de* I *dans* $\mathbb{R}$ *intégrables muni de l'addition et du produit externe point à point dans l'espace* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*, et qui associe à toute fonction* $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ *intégrable,, le réel* $\int_I f$*, est une application linéaire.*

Exemple 3.1.7. *Toute fonction* ϕ *de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{Q}$*, qui vérifie* $\phi(q + q') = \phi(q) + \phi(q')$ *est une forme linéaire.*

Propriété 3.1.1. *Soient* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* ϕ *une fonction de* E *dans* F*. Alors* $\phi(0_E) = 0_F$.

Propriété 3.1.2. *Soient* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* ϕ *une fonction de* E *dans* F*. Soit* $u \in E$*, Alors* $\phi(-_E u) = -_F \phi(u)$.

Propriété 3.1.3. *Soient* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* ϕ *une fonction de* E *dans* F*. Alors* ϕ *est une application linéaire de* $(E, +_E, \bullet_E)$ *dans* $(F, +_F, \bullet_F)$ *si et seulement si, pour tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$*, tout couple de vecteurs* $(u, v) \in E^2$*, on a :* $\phi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \phi(u) +_F \lambda \bullet_F \phi(v)$.

Propriété 3.1.4. *Soient* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ *une application linéaire de* $(E, +_E, \bullet_E)$ *dans* $(F, +_F, \bullet_F)$*. Alors,* ϕ *est injective si et seulement si pour tout vecteur* $u \in E$ *tel que* $\phi(u) = 0_F$*, on a :* $u = 0_E$.

Propriété 3.1.5. *Soit* $(E, +, \bullet)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. Alors* $\mathcal{GL}(E)$ *est un groupe pour la composition.*

Propriété 3.1.6. *Soient* $(E, +_E, \bullet_E)$ *et* $(F, +_F, \bullet_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. Alors l'ensemble des applications linéaires de* $(E, +_E, \bullet_E)$ *dans* $(F, +_F, \bullet_F)$*, muni de la somme* $+_F$ *point à point et du produit externe* $\bullet_F$ *point à point, est un espace vectoriel.*

3.2 Image des familles de vecteurs

Propriété 3.2.1. *L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.*

Propriété 3.2.2. *Une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ est injective si et seulement si l'image de toute famille libre (de E) est une famille libre (de F).*

Propriété 3.2.3. *Si l'image d'une base par une application linéaire est libre, alors cette application linéaire est injective.*

Propriété 3.2.4. *L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.*

Propriété 3.2.5. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ est surjective ;*
2. *L'image de chaque famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$;*
3. *Il existe une famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$.*

Théorème 3.2.1. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose, de plus, qu'il existe une base de E* [2]*. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\phi \in Isom(E, F)$;*
2. *L'image de chaque base de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$;*
3. *Il existe une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.*

Théorème 3.2.2. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E. Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de E dans F. Si pour tout indice $i \in I$, $\phi(u_i) = \psi(u_i)$, alors $\phi = \psi$.*

Théorème 3.2.3. *Soit $(E, +, \bullet)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, alors il existe un isomorphisme entre $(E, +, \bullet)$ et $(\mathbb{K}^n, \dot{+}, \dot{\cdot})$.*

3.3 Noyau, Image et dimension

Définition 3.3.1 (Noyau)**.** *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.*
On définit le noyau de ϕ, $Ker(\phi)$ par :

$$Ker(\phi) \triangleq \{x \in E \mid \phi(x) = 0_F\}.$$

Propriété 3.3.1. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors $Ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +_E, \bullet_E)$.*

Définition 3.3.2 (Image)**.** *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F.*
On définit l'image de ϕ, $Im(\phi)$ par :

$$Im(\phi) \triangleq \{\phi(x) \in F \mid x \in E\}.$$

Propriété 3.3.2. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F. Alors $Im(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $(F, +_F, \bullet_F)$.*

2. C'est toujours vrai, mais on ne la prouvé que si $(E, +_E, \bullet_E)$ admet une famille génératrice finie.

Théorème 3.3.1. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire entre E et F. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension fini. Alors,*

$$\dim(E) = \dim(Ker(E)) + \dim(Im(E))$$

Corollaire 3.3.1. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si E ou F est de dimension fini et s'il existe un isomorphisme $\phi \in Isom(E,F)$, alors E et F sont de dimensions finis et égales.*

Corollaire 3.3.2. *Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension fini. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire de E dans F.*
Les trois assertions suivantes sont équivalents :

1. *ϕ est un isomorphisme ;*
2. *ϕ est injectif et* $\dim E = \dim F$ *;*
3. *ϕ est surjectif et* $\dim E = \dim F$.

<u>Fin de la 5^e^ semaine.</u>

4 Matrices

4.1 Algèbre des matrices

Définition 4.1.1 (matrice)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On appelle une matrice d'éléments de $\mathbb{K}$ à m lignes et à n colonnes une famille d'éléments $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ de $\mathbb{K}$ indexée par les couple (i,j) où i varie entre 1 et m, et j varie entre 1 et n.*
On dit aussi que $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est une matrice de taille $m \times n$.
On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ d'élément de $\mathbb{K}$.
Enfin, lorsque $m = n$, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont carrés de taille m.

Définition 4.1.2 (ligne)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit i_0 un entier entre 1 et m. On appelle i_0-ième ligne de A, la famille de n éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i_0,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$.*

Définition 4.1.3 (colonne)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit j_0 un entier entre 1 et n. On appelle j_0-ième colonne de A, la famille de m éléments de $\mathbb{K}$ $(a_{i,j_0})_{1 \leqslant i \leqslant m}$.*

Notation 4.1.1. *On note habituellement les éléments d'une matrice sous forme de tableau. Par exemple, la matrice de taille 3×3 et d'éléments $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 3, 1 \leqslant j \leqslant 3}$ sera notée :*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Définition 4.1.4 (somme)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ et $B \triangleq (b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$. La matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$ est appelée la somme des deux matrices A et B. On la note $A + B$.*

Exemple 4.1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 14 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Définition 4.1.5 (produit externe)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$. La matrice $(\lambda \cdot a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ est appelée le produit de la matrice A par le scalaire λ. On la note $\lambda \cdot A$.*

Exemple 4.1.2.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 20 & 4 & -2 \\ 10 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Définition 4.1.6. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit k un entier entre 1 et m et soit k' un entier entre 1 et n. On note $E_{k,k'} \triangleq (\delta_i^k \cdot \delta_j^{k'})$ la matrice de taille $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls, sauf dans la case à la ligne k et à la colonne k' dans laquelle la valeur est 1.*

Propriété 4.1.1. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $m \cdot n$. De plus, la famille des matrices élémentaire $(E_{i,j}^{m,n})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

Définition 4.1.7 (produit interne)**.** *Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$ et $B \triangleq (b_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant o}$. La matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$c_{i,j} \triangleq \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j},$$

pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant o$, est appelée le produit entre A et B, et est notée $A \times B$.

Exemple 4.1.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 8 & 3 \\ 22 & 18 & 19 \\ 66 & 20 & 4 \end{bmatrix}$$

Propriété 4.1.2. *Soient $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ quatre entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{o,p}(\mathbb{K})$ trois matrices à valeur dans $\mathbb{K}$.*
Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Propriété 4.1.3. *Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $A \times B$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

Définition 4.1.8 (transposée)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n}$. La matrice $(a_{j,i})_{1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant m}$ est une matrice de taille $n \times m$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Cette matrice est appelée la transposée de A et est noté ${}^T A$.*

Exemple 4.1.4. *On a :*

$${}^T\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.1.4. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient i un entier entre 1 et m et j un entier entre 1 et n. Alors ${}^T E_{i,j}^{m,n} = E_{j,i}^{n,m}$.*

Propriété 4.1.5. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui à chaque matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe sa transposée est un isomorphisme entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

Propriété 4.1.6. *Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times o$, et d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, on a :*

$$^T(M \times N) = {^T N} \times {^T M}.$$

Propriété 4.1.7. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$ et de taille $m \times n$. Alors, on a :*

$$^T(^T A) = A.$$

Propriété 4.1.8. *Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times o$ à valeur dans $\mathbb{K}$ associe la matrice $B \times A$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

4.2 Transformations élémentaires

4.2.1 Matrice identité

Définition 4.2.1 (identité)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On note $\mathrm{I}_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice carrée $(\delta_i^j)_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n}$.*

Exemple 4.2.1. *Par exemple, on a :*

$$\mathrm{I}_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété 4.2.1. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = \mathrm{I}_{m,m} \times A$.*

Propriété 4.2.2. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = A \times \mathrm{I}_{n,n}$.*

Propriété 4.2.3. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \leqslant n$, alors $\mathrm{I}_{m,n} \times \mathrm{I}_{n,m} = \mathrm{I}_{m,m}$.*

4.2.2 Permutation de lignes et de colonnes

Définition 4.2.2 (matrice de permutation)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k et k' deux entiers entre 1 et n. On note $\textsc{Swap}_n(k, k')$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} - \mathrm{E}_{k,k}^{n,n} - \mathrm{E}_{k',k'}^{n,n} + \mathrm{E}_{k,k'}^{n,n} + \mathrm{E}_{k',k}^{n,n}$.*

Exemple 4.2.2. *Par exemple :*

$$\textsc{Swap}_3(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n. On a :*

$$^T(\textsc{Swap}_n(k, k')) = \textsc{Swap}_n(k, k').$$

Propriété 4.2.5 (permutation de lignes)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et m. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\textsc{Swap}_m(k, k') \times A$ est la matrice dont la l-ième ligne est la l-ième ligne de A pour $l \notin \{k, k'\}$, la k-ième ligne est la k'-ième ligne de A, et la k'-ième ligne est la k-ième ligne de A.*

Propriété 4.2.6 (permutation de colonnes)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \textsc{Swap}_n(k, k')$ est la matrice dont la l-ième colonne est la l-ième colonne de A pour $l \notin \{k, k'\}$, la k-ième colonne est la k'-ième colonne de A, et la k-ième colonne est la k'-ième colonne de A.*

Exemple 4.2.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n. On a :*

$$(\mathrm{S}\textsc{wap}_n(k, k'))^2 = \mathrm{I}_{n,n}$$

4.2.3 Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire

Définition 4.2.3 (matrice de dilatation)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k un entier entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ un scalaire non nul. On note $\mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \lambda)$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} + (\lambda - 1) \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k}$.*

Exemple 4.2.4. *Par exemple,*

$$\mathrm{D}\textsc{ilat}_3(2, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.8. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k un entier compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ un scalaire non nul. On a : ${}^T(\mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \lambda)) = \mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \lambda)$.*

Propriété 4.2.9 (dilatation de lignes)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k un entier compris entre 1 et m et $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\mathrm{D}\textsc{ilat}_m(k, \lambda) \times A$ est la matrice dont la l-ième ligne est la l-ième ligne de A pour $l \neq k$, la k-ième ligne est la k-ième ligne de A multipliée par le scalaire λ.*

Propriété 4.2.10 (dilatation de colonnes)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit k, k' deux entiers compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \lambda)$ est la matrice dont la l-ième colonne est la l-ième colonne de A pour $l \neq k$, la k-ième colonne est la k-ième colonne de A multipliée par le scalaire λ.*

Exemple 4.2.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.11. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit k un entier entre 1 et n, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \in \backslash\{0\}$ deux scalaires non nuls. Alors $\mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \lambda) \times \mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \mu) = \mathrm{D}\textsc{ilat}_n(k, \lambda \cdot \mu)$.*

4.2.4 Ajout de lignes et de colonnes

Définition 4.2.4 (matrice de combinaison)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k et k' deux entiers distincts entre 1 et n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On note $\mathrm{A}\textsc{dd}_n(k, k', \lambda)$ la matrice $\mathrm{I}_{n,n} + \lambda \cdot \mathrm{E}^{n,n}_{k,k'}$.*

Exemple 4.2.6. *Par exemple,*

$$\mathrm{ADD}_3(1,2,4) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a : ${}^T(\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)) = \mathrm{ADD}_n(k',k,\lambda)$.*

Propriété 4.2.13 (ajout d'une ligne)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entier distincts compris entre 1 et m, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $\mathrm{ADD}_m(k,k',\lambda) \times A$ est la matrice dont la l-ième ligne est la l-ième ligne de A pour $l \neq k$, la k-ième ligne est la k-ième ligne de A plus la k'-ième ligne de A multipliée par le scalaire λ.*

Propriété 4.2.14 (ajout d'une colonne)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la matrice $A \times \mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda)$ est la matrice dont la l-ième colonne est la l-ième colonne de A pour $l \neq k'$, la k'-ième colonne est la k'-ième colonne de A plus la k-ième colonne de A multipliée par le scalaire λ.*

Exemple 4.2.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.15. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit k, k' deux entiers distincts entre 1 et n, et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Alors $\mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda) \times \mathrm{ADD}_n(k,k',\mu) = \mathrm{ADD}_n(k,k',\lambda+\mu)$.*

4.3 Matrices inversibles

4.3.1 Inversibilité à gauche et à droite

Définition 4.3.1 (matrice inversible à gauche)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que A est inversible à gauche si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $B \times A = \mathrm{I}_{n,n}$.*
La matrice B est alors appelée un inverse à gauche de A.

Exemple 4.3.1. *La matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a plusieurs inverses à gauche.

Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+5\cdot a}{3} & \frac{2-2\cdot a}{3} & a \\ \frac{2-5\cdot b}{3} & -\frac{1+2\cdot b}{3} & b \end{bmatrix}$$

est un inverse à gauche de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

.

Définition 4.3.2 (matrice inversible à droite)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que A est inversible à droite si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_{m,m}$.*
La matrice B est alors appelée un inverse à droite de A.

Exemple 4.3.2. *La matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a des inverses à droite.

Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+5\cdot a}{3} & \frac{2-5\cdot b}{3} \\ \frac{2-2\cdot a}{3} & -\frac{1+2\cdot b}{3} \\ a & b \end{bmatrix}$$

est un inverse à droite de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

.

Propriété 4.3.1. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. La matrice A est inversible à gauche si et seulement si la matrice ${}^{T}A$ est inversible à droite.*

De plus, soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice B est un inverse à gauche de A si et seulement si la matrice ${}^{T}B$ est un inverse à droite de ${}^{T}A$.

Définition 4.3.3 (matrice inversible)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = \mathrm{I}_{m,m}$ et $B \times A = \mathrm{I}_{n,n}$.*
La matrice B est alors appelée un inverse de A.

Notation 4.3.1. *Si une matrice A est inversible, son inverse est noté A^{-1}.*

Exemple 4.3.3. *La matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

est inversible.
De plus, son inverse est :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.3.2. *Les matrices carrés de transformation élémentaire sont inversibles.*

Propriété 4.3.3. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ qui a un admet un inverse à droite $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et un inverse à gauche $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors $B = C$ (et A est inversible).*

4.3.2 Inversion à gauche

Propriété 4.3.4. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que A soit inversible à gauche. Alors,*

1. *pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de talle $n \times 1$ à valeur dans $\mathbb{K}$, on a : $A \times X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant m, j=1} \implies X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n, j=1}$;*
2. *les colonnes de A forment une famille libre de $\mathbb{R}^n$.*

Propriété 4.3.5. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. La matrice identité $\mathrm{I}_{m,n}$ est inversible à gauche si et seulement si $m \geqslant n$.*

Propriété 4.3.6. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifstels que $m \geqslant n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$. Alors A est un inverse à gauche de $\mathrm{I}_{m,n}$ si et seulement si pour tout i entre 1 et n et tout j entre 1 et n, on a : $a_{i,j} = \delta_j^i$.*

Propriété 4.3.7. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible de taille $m \times m$. Alors A est inversible à gauche si et seulement si $B \times A$ est inversible à gauche.*

Propriété 4.3.8. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible de taille $m \times m$. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors C est un inverse à gauche de A si et seulement si $C \times B^{-1}$ est un inverse à gauche de $B \times A$ est inversible à gauche.*

Définition 4.3.4. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ est dite échelonnée, si et seulement si il existe une fonction* PIVOT *qui associe à chaque indice de ligne de A non nulle un indice de colonne, tel que :*

1. *Pour chaque ligne non nulle d'indice i, la première colonne non nulle a pour indice $\textsc{pivot}(i)$.*
2. *Pour chaque ligne non nulle d'indice i, $A_{i,\textsc{pivot}(i)} = 1$.*
3. *Pour chaque ligne i non nulle, $A_{i,\textsc{pivot}(i)}$ est le seul élément non nul de la colonne $\textsc{pivot}(i)$.*
4. *Pour chaque paire de lignes non nulles, d'indice i et j, on a : $i < j \implies \textsc{pivot}(i) < \textsc{pivot}(j)$.*
5. *Les lignes nulles, si il y en a, sont à la fin de la matrice.*

Exemple 4.3.4. *La matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est échelonnée. La fonction PIVOT *associe 1 à 1 (le pivot de la première ligne est sur la première colonne), et 2 à 3 (le pivot de la seconde ligne est sur la troisième colonne).*

Algorithme 4.3.1 (pivot de Gaus)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Alors, quitte à permuter les lignes de A, multiplier les lignes de A par une constante non nulle, et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par une constante, alors on peut écrire A sous forme échelonnée.*
On suppose $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.

1. *Posons $p \leftarrow 1$.*
2. *Si A n'est pas échelonnée, on prend la première colonne j_0 telle qu'il existe une ligne i_0 telle que $a_{i,j} \neq 0$, avec $i \geqslant p$.*
3. *On permute la ligne p et la ligne i_0.*

4. *On utilise la ligne p pour annuler le reste de la colonne j_0.*
5. *On pose $p \leftarrow p+1$.*

Propriété 4.3.9. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors la matrice A a un inverse à gauche si et seulement si $A = \mathrm{I}_{m,n}$ et $m \geqslant n$.*

Propriété 4.3.10. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A a un inverse à gauche ;*
2. *A peut s'écrire sous la forme $B \times \mathrm{I}_{m,n}$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille m.*

Algorithme 4.3.2 (inversion à gauche)**.** *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.*

1. *On utilise l'algorithme 4.3.1 permet de vérifier si A a un inverse à gauche.*
2. – *soit la matrice n'est pas inversible ;*
   – *soit la matrice est inversible :*
     (a) *on a calculé une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ carrée de taille m et à valeur dans $\mathbb{K}$ qui vérifie : $B \times A = \mathrm{I}_{m,n}$;*
     (b) *on calcule $B \times \mathrm{I}_{m,m}$ en faisant agir les mêmes transformations élémentaires qui ont transformé A en $\mathrm{I}_{m,n}$ sur $\mathrm{I}_{m,m}$;*
     (c) *l'ensemble des inverses à gauche de A est alors l'ensemble des matrices $C \times B \times \mathrm{I}_{m,m}$ pour chaque matrice $C \triangleq (c_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans $\mathbb{K}$ et telle que pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et pour tout j tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait $c_{i,j} = \delta_j^i$.*

Exemple 4.3.5. *Reprenons l'exemple 4.3.1. On fait agir en parallèle les mêmes transformations sur la matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

et la matrice $\mathrm{I}_{m,m}$ *:*

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3 \cdot L_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$ $L_3 \leftarrow L_3 + 2 \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

Puis les inverses à gauche de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sont les matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Puis les inverses à gauche de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sont les matrices :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+5a)}{3} & -\frac{2+2a}{3} & a \\ \frac{2-5b}{3} & -\frac{1+2b}{3} & b \end{bmatrix}$$

.

Lemme 1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *un entier naturel. Soient* $k, k' \in \mathbb{N}$ *tels que* $1 \leqslant k \leqslant n$ *et* $1 \leqslant k' \leqslant n$*. Soit* $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ *une matrice carrée de transformation élémentaire et de taille* n*. Alors il existe une matrice* $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$

carrée de transformation élémentaire et telle que :

$$\textsc{Swap}_n(k,k') \times B = C \times \textsc{Swap}_n(k,k')$$

Lemme 2. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire, de taille m, qui n'est pas une matrice de permutation. Alors il existe une matrice carrée $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ de transformation élémentaire, de taille n telle que $B \times \mathrm{I}_{m,n} = \mathrm{I}_{m,n} \times C$.*

Théorème 4.3.1. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible à gauche ;*
2. *$m \geqslant n$ et A peut s'écrire sous la forme $B \times \mathrm{I}_{m,n}$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille m ;*
3. *les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$;*
4. *les colonnes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^m$;*
5. *pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant m, j=1}$;*
6. *pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = Y$.*

4.3.3 Inverse à droite

Algorithme 4.3.3 (inversion à droite)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans $\mathbb{K}$. On utilise l'algorithme 4.3.2 pour décider si la transposée de A est inversible à gauche, et calculer ses inverses à gauche.*

1. *si ${}^{T}A$ n'est pas inversible à gauche, alors A n'est pas inversible à droite ;*
2. *les inverses à droites de A sont alors les transposées des inverses à gauche de ${}^{T}A$.*

Théorème 4.3.2. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible à droite ;*
2. *$m \leqslant n$ et A peut s'écrire sous la forme $\mathrm{I}_{m,n} \times B$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille n ;*
3. *les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$;*
4. *les lignes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$;*
5. *pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^{T}A \times X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant m, j=1}$;*
6. *pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.*

4.3.4 Inverses

Propriété 4.3.11. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors A est inversible à gauche si et seulement si A est inversible à droite.*

Propriété 4.3.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors un inverse à gauche de A est aussi un inverse à droite de A (et réciproquement).*

Propriété 4.3.13. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors les matrices inversibles de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont les matrices obtenues comme produit d'un nombre arbitraire de matrices élémentaires carrées de taille n.*

Algorithme 4.3.4 (pivot de Gaus sur une matrice carrée)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n à valeur dans $\mathbb{K}$.*
On suppose que $n \geqslant 1$.

1. *On pose $p = 1$, $X_0 = A$, et $Y_0 = \mathrm{I}_{n,n}$.*
2. *Si $p = n + 1$, A est inversible, et son inverse est Y_n.*
3. *On note $X_{p-1} = (x_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n}$.*
4. *Si pour tout $i \geqslant p$, $x_{i,p} = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible.*
5. *On prends le plus petit indice i_0 tel que $i_0 \geqslant p$ et tel que $x_{i_0,p} \neq 0$.*
6. *On permute la ligne p et la ligne i_0 à la fois dans la matrice X_{p-1} et dans la matrice Y_{p-1}.*
7. *On utilise la ligne p pour annuler le reste de la colonne j_0 dans la matrice X_{p-1}, tout en effectuant les mêmes transformations dans la matrice Y_{p-1}*
8. *On pose X_p et Y_p les matrices obtenues.*
9. *$p \leftarrow p + 1$,*

Exemple 4.3.6. *La matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas inversible.

En effet,

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cette dernière matrice n'est pas inversible, car elle a une ligne nulle (donc ces lignes ne forment pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4.3.7. *La matrice :*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

est inversible.

On trouve son inverse par pivot de Gaus :

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftrightarrow L_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

.

On peut vérifier que la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est l'inverse de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

			1	2	3
			1	2	4
			0	1	2
0	1	-2	1	$2-2$	$4-4$
2	-2	1	$2-2$	$4-4+1$	$6-8+2$
-1	1	0	$-1+1$	$-2+2$	$-3+4$

.

Théorème 4.3.3. *Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est inversible ;*
2. *A peut s'écrire sous la forme d'un produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille n ;*
3. *$m \geqslant n$ et les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^m$;*
4. *$m \leqslant n$ et les colonnes de A forment une famille libre de $\mathbb{R}^m$;*

5. *$m \geqslant n$ et les lignes de A forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$;*
6. *$m \leqslant n$ et les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.*
7. *$m \geqslant n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant m, j=1}$;*
8. *$m \geqslant n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.*
9. *$m \leqslant n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant m, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leqslant i \leqslant n, j=1}$;*
10. *$m \leqslant n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = Y$.*

Fin de la 6^e semaine.

4.4 Matrices d'application linéaires

(voir le DM)