

Algèbre linéaire

Jérôme Feret
LIENS (INRIA,ÉNS,CNRS)

5/12/19 décembre 2011

23/27/30 janvier 2012

3/6/17 février 2012

1 Groupes

1.1 Lois internes

Définition 1.1.1. Soit A un ensemble.

Une loi interne sur A est une fonction de $A \times A$ dans A .

Exemple 1.1.1. La fonction vide est une loi interne sur l'ensemble vide.

Exemple 1.1.2. La fonction qui à la paire $(1, 1)$ associe 1 est une loi interne sur le singleton $\{1\}$.

Exemple 1.1.3. L'addition $+$ et le produit \cdot sont des lois internes pour \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , ou \mathbb{R} .

Exemple 1.1.4. La soustraction $-$ est une loi interne pour \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , ou \mathbb{R} .

Exemple 1.1.5. Si A est un ensemble, alors la composition \circ est une loi interne sur l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ des fonctions de A dans A .

Exemple 1.1.6. La fonction \odot qui associe à toute paire (x, y) de rationnels, le rationnel $x + 2 \cdot y$, est une loi interne sur \mathbb{Q} .

Exemple 1.1.7. Soit A un ensemble. La fonction \rfloor qui à une paire $(x, y) \in A^2$ d'éléments de A associe le premier élément x , est une loi interne sur A . \rfloor est la projection selon la première coordonnée.

Notation 1.1.1. Si \otimes est une loi interne sur l'ensemble A , alors, pour $x, y \in A$, l'élément $\otimes(x, y)$ est habituellement noté $x \otimes y$.

1.2 Associativité

Définition 1.2.1. Une loi interne \otimes sur un ensemble A est dite associative si et seulement si, pour tout $x, y, z \in A$, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$.

Exemple 1.2.1. La loi interne sur l'ensemble vide, est associative.

Preuve Par définition, $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$. De plus pour toute propriété P , $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est vrai. Donc la loi interne sur l'ensemble vide est vide.

□

Exemple 1.2.2. Une loi interne sur un singleton est associative.

Preuve Soit S un singleton. On note $S = \{a\}$. Soit \otimes une loi interne sur S . Par définition, $a \otimes a \in S$. Comme S n'a qu'un élément, $a \otimes a = a$. Puis, soit $x, y, z \in A$. On a $x = a$, $y = a$, et $z = a$. D'où,

$$\begin{aligned}x \otimes (y \otimes z) &= a \otimes (a \otimes a) \\x \otimes (y \otimes z) &= a \otimes a \\x \otimes (y \otimes z) &= (a \otimes a) \otimes a \\x \otimes (y \otimes z) &= (x \otimes y) \otimes z.\end{aligned}$$

Donc \otimes est associative.

□

Exemple 1.2.3. L'addition $+$ et la multiplication \cdot sont des lois internes associatives sur \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , ou \mathbb{R} .

Exemple 1.2.4. La soustraction $-$ n'est associative ni sur \mathbb{Z} , ni sur \mathbb{Q} , ni sur \mathbb{R} .

Exemple 1.2.5. Si A est un ensemble, la composition \circ est une loi associative sur $\mathcal{F}(A)$.

Preuve Soit $f, g, h \in \mathcal{F}(A)$.

1. $[f \circ g] \circ h$ et $f \circ [g \circ h]$ sont deux fonctions de A dans A .

2. Soit $a \in A$.

On a :

$$\begin{aligned}[[f \circ g] \circ h](a) &= [f \circ g](h(a)) \\[[f \circ g] \circ h](a) &= f(g(h(a))) \\[[f \circ g] \circ h](a) &= f([g \circ h](a)) \\[[f \circ g] \circ h](a) &= [f \circ [g \circ h]](a)\end{aligned}$$

Donc $[f \circ g] \circ h = f \circ [g \circ h]$.

Puis \circ est associative.

□

Exemple 1.2.6. La loi interne \odot définie sur \mathbb{Q} par $x \odot y \triangleq x + 2 \cdot y$ n'est pas associative.

Preuve En effet, on a :

$$\begin{aligned}1 \odot (1 \odot 1) &= 1 \odot (1 + 2 \cdot 1) \\1 \odot (1 \odot 1) &= 1 \odot 3 \\1 \odot (1 \odot 1) &= 1 + 2 \cdot 3 \\1 \odot (1 \odot 1) &= 7\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(1 \odot 1) \odot 1 &= (1 + 2 \cdot 1) \odot 1 \\(1 \odot 1) \odot 1 &= 3 \odot 1 \\(1 \odot 1) \odot 1 &= 3 + 2 \cdot 1 \\(1 \odot 1) \odot 1 &= 5.\end{aligned}$$

Or $5 \neq 7$.

Donc \odot n'est pas associative.

□

Exemple 1.2.7. Soit A un ensemble. La projection p_1 sur la première coordonnée est une loi associative sur A .

Preuve \mid est bien une loi interne sur A .

De plus, soit $x, y, z \in A$,

on a :

$$\begin{aligned}(x \mid y) \mid z &= x \mid y \\ (x \mid y) \mid z &= x \\ (x \mid y) \mid z &= x \mid (y \mid z)\end{aligned}$$

Donc \mid est associative.

□

Proposition 1.2.1. Si \otimes est une loi interne associative sur un ensemble A , alors pour tout $x, y, z, t \in A$, on a : $x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = ((x \otimes y) \otimes z) \otimes t$.

Preuve Soit \otimes est une loi interne associative sur un ensemble A , alors pour tout $x, y, z, t \in A$, on a :

$$\begin{aligned}x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) &= x \otimes ((y \otimes z) \otimes t) \\ x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) &= (x \otimes (y \otimes z)) \otimes t \\ x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) &= ((x \otimes y) \otimes z) \otimes t\end{aligned}$$

□

Notation 1.2.1. Lorsqu'une loi est associative, on omet généralement les parenthèses.

1.3 Commutativité

Définition 1.3.1. Une loi interne \otimes sur un ensemble A est dite commutative si et seulement si, pour tout $x, y \in A$, $x \otimes y = y \otimes x$.

Exemple 1.3.1. La loi interne définie sur l'ensemble vide, est commutative.

Preuve Par définition, $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$. De plus pour toute propriété P , $\forall x \in \emptyset, P(x)$ est vrai.

Donc la loi interne définie sur l'ensemble vide est commutative.

□

Exemple 1.3.2. Une loi interne définie sur un singleton, est commutative.

Preuve Soit S un singleton. On note $S = \{a\}$. Soit \otimes une loi interne sur S . Puis, soit $x, y \in A$. On a : $x = a$ et $y = a$. D'où,

$$\begin{aligned}x \otimes y &= a \otimes a \\ x \otimes y &= y \otimes x.\end{aligned}$$

Donc \otimes est commutative.

□

Exemple 1.3.3. Par exemple, l'addition $+$ et la multiplication \cdot sont des lois internes commutatives sur \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , ou \mathbb{R} .

Exemple 1.3.4. Si A est un ensemble contenant au moins deux éléments, la composition \circ définie sur $\mathcal{F}(A)$ n'est pas une loi commutative.

Preuve Soit A un ensemble contenant au moins deux éléments. Soit $a, b \in A$ deux éléments distincts. Notons :

$$f : \begin{cases} A \rightarrow A \\ x \mapsto a \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} A \rightarrow A \\ x \mapsto b \end{cases}$$

On a :

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$(g \circ f)(a) = g(a)$$

$$(g \circ f)(a) = b$$

et :

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

$$(f \circ g)(a) = f(b)$$

$$(f \circ g)(a) = a.$$

Or $a \neq b$, donc $g \circ f \neq f \circ g$.

Donc \circ n'est pas commutative.

□

Exemple 1.3.5. La loi interne \odot définie sur \mathbb{Q} par $x \odot y \triangleq x + 2 \cdot y$ n'est pas commutative.

Preuve On a : $0 \odot 1 = 2$ et $1 \odot 0 = 1$. Or $2 \neq 1$. Donc \odot n'est pas commutative.

□

Proposition 1.3.1. Si \otimes est une loi interne associative et commutative sur un ensemble A , alors pour tout $x, y, z, t \in A$, on a : $x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = ((t \otimes y) \otimes z) \otimes x$.

Preuve Soit \otimes est une loi interne associative et commutative sur un ensemble A , alors pour tout $x, y, z, t \in A$, on a :

$$x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = x \otimes (\underline{y} \otimes (\underline{t} \otimes z))$$

$$x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = x \otimes ((\underline{y} \otimes \underline{t}) \otimes z)$$

$$x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = \underline{x \otimes ((t \otimes y) \otimes z)}$$

$$x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) = ((t \otimes y) \otimes z) \otimes x$$

□

1.4 Éléments neutres

Définition 1.4.1. Soit A un ensemble muni d'une loi interne \otimes .

1. un élément $\varepsilon_d \in A$ est un élément neutre à droite pour la loi \otimes si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $x \otimes \varepsilon_d = x$.
2. un élément $\varepsilon_g \in A$ est un élément neutre à gauche pour la loi \otimes si et seulement si pour tout élément $x \in A$, on a $\varepsilon_g \otimes x = x$.
3. un élément $\varepsilon \in A$ est un élément neutre pour la loi \otimes si et seulement si c'est un élément neutre à droite pour la loi \otimes et un élément neutre à gauche pour la loi \otimes .

Exemple 1.4.1. La loi interne définie sur l'ensemble vide n'a pas d'élément neutre.

Exemple 1.4.2. Une loi interne définie sur un singleton admet un élément neutre (le seul élément du singleton).

Exemple 1.4.3. Par exemple, 0 est un élément neutre pour la loi $+$ définie sur \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , et \mathbb{R} , alors que 1 est un élément neutre pour \cdot définie sur \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , et \mathbb{R} .

Exemple 1.4.4. Si A est un ensemble, la fonction identité est un élément neutre pour la composition \circ définie sur $\mathcal{F}(A)$.

Exemple 1.4.5. Soit \odot la loi interne, définie sur \mathbb{Q} par $x \odot y \triangleq x + 2 \cdot y$. 0 est un élément neutre à droite pour la loi \odot , mais il n'y a pas d'élément neutre à gauche pour la loi \odot .

Preuve

1. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on a $x \odot 0 = x + 2 \cdot 0$, puis $x \odot 0 = x$.
Donc 0 est neutre à droite.
2. Par l'absurde, soit $\varepsilon_g \in \mathbb{Q}$ un élément neutre à gauche.
On aurait : $\varepsilon_g \odot 0 = 0$ (car ε_g est neutre à gauche) et $\varepsilon_g \odot 0 = \varepsilon_g$ (par définition de \odot). D'où $\varepsilon_g = 0$.
Mais on aurait aussi : $\varepsilon_g \odot 1 = 1$ (car ε_g est neutre à gauche) et $\varepsilon_g \odot 1 = \varepsilon_g + 2$ (par définition de \odot).
D'où $\varepsilon_g = -1$.
Or $0 = -1$ (Absurde).
Donc \odot n'a pas de neutres à gauche.

□

Proposition 1.4.1. Soit A un ensemble muni d'une loi interne \otimes . Si \otimes admet à la fois un élément neutre à droite et un élément neutre à gauche, alors \otimes admet un élément neutre.

Preuve Soit A un ensemble muni d'une loi interne \otimes . Soit ε_d un élément neutre à droite et ε_g un élément neutre à gauche. On a : $\varepsilon_g \otimes \varepsilon_d = \varepsilon_d$ (car ε_g est neutre à gauche) et $\varepsilon_g \otimes \varepsilon_d = \varepsilon_g$ (car ε_d est neutre à droite). D'où $\varepsilon_d = \varepsilon_g$. Puis ε_d est un élément neutre.

□

Proposition 1.4.2. Soit A un ensemble muni d'une loi interne \otimes . Si \otimes admet un élément neutre, alors \otimes admet un unique élément neutre.

Preuve Soit A un ensemble muni d'une loi interne \otimes . Soit ε_1 et ε_2 deux éléments neutres. On a : $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 = \varepsilon_2$ (car ε_1 est neutre à gauche) et $\varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 = \varepsilon_1$ (car ε_2 est neutre à droite). D'où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

□

1.5 Inverses

Définition 1.5.1. Soit \otimes une loi interne sur un ensemble A qui admet un élément neutre ε et soit x, y deux éléments de A . On dit que :

1. y est un inverse à gauche de x si et seulement si $y \otimes x = \varepsilon$.
2. y est un inverse à droite de x si et seulement si $x \otimes y = \varepsilon$.
3. y est un inverse de x si et seulement si y est un inverse à droite de x , et un inverse à gauche de x .

Un élément $x \in A$ est dit inversible si et seulement si il admet un inverse.

Exemple 1.5.1. L'entier 0 est le seul élément inversible pour la loi $+$ définie sur \mathbb{N} .

Exemple 1.5.2. Tous les éléments de \mathbb{Z} (resp. \mathbb{Q} , resp. \mathbb{R}) sont inversibles pour la loi $+$.

Exemple 1.5.3. L'élément 1 est le seul élément inversible de \mathbb{N} (resp. \mathbb{Z}) pour la loi \cdot .

Exemple 1.5.4. Tous les éléments sauf 0 sont inversibles pour les lois \cdot définies sur \mathbb{Q} et \mathbb{R} .

Exemple 1.5.5. La fonction :

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$$

a des inverses à gauche, mais pas d'inverse à droite, pour la composition \circ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Preuve

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\text{On considère la fonction } g_k \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ 0 & \mapsto k \\ n > 0 & \mapsto n - 1 \end{cases}$$

On a bien $g_k \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} [g_k \circ f](n) &= g_k(f(n)) \\ [g_k \circ f](n) &= g_k(n + 1) \\ [g_k \circ f](n) &= (n + 1) - 1 && (\text{car } n + 1 > 0) \\ [g_k \circ f](n) &= n. \end{aligned}$$

Donc $[g_k \circ f] = Id_{\mathbb{N}}$.

Puis g_k est un inverse à gauche de f .

2. Soit g un inverse à gauche de f .

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} [g \circ f](n) &= g(f(n)) \\ [g \circ f](n) &= g(n + 1). \end{aligned}$$

Or g est un inverse à gauche de f , donc : $[g \circ f] = Id_{\mathbb{N}}$, puis $[g \circ f](n) = n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n + 1) = n$.

Puis pour tout $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $g(m) = m - 1$ (on a posé $m = n + 1$).

Donc $g = g_{g(0)}$. Ce qui prouve qu'il n'y a pas d'autre inverse à gauche.

3. Par l'absurde, on considère g un inverse à droite de f .

On aurait :

$$\begin{aligned}[f \circ g](0) &= f(g(0)) \\ [f \circ g](0) &= g(0) + 1.\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}[f \circ g](0) &= Id_{\mathbb{N}}(0) \\ [f \circ g](0) &= 0.\end{aligned}$$

D'où $g(0) + 1 = 0$, puis $g(0) = -1$ (ce qui est absurde car $g(0) \in \mathbb{N}$).

Donc g n'est pas un inverse à droite de f .

□

Exemple 1.5.6. La fonction :

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ 0 \mapsto 0 \\ n \mapsto n - 1 \end{cases}$$

a des inverses à droite, mais pas d'inverse à gauche, pour la composition \circ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{N})$.

Preuve

1. On considère la fonction $g \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$.

On a bien $g \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}[f \circ g](n) &= f(g(n)) \\ [f \circ g](n) &= f(n + 1) \\ [f \circ g](n) &= (n + 1) - 1 \quad (\text{car } n + 1 > 0) \\ [f \circ g](n) &= n\end{aligned}$$

Donc $[f \circ g] = Id_{\mathbb{N}}$.

Puis g est un inverse à droite de f .

2. Soit h un inverse à droite de f .

On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $[f \circ h](n) = f(h(n))$ et, comme $[f \circ h] = Id_{\mathbb{N}}$, $[f \circ h](n) = n$.

D'où $n = f(h(n))$.

Puis, si $h(n) > 0$, alors $n = h(n) - 1$, puis $h(n) = n + 1$ et $n > 0$.

Par contraposé, si $n = 0$ alors $h(n) = 0$.

D'où $h(0) = 0$.

De plus, pour tout $n > 0$, $h(n) > 0$ (sinon $n = f(h(n))$, puis $n = 0$), et donc $h(n) = n + 1$.

Donc f a au plus un inverse à droite.

3. Par l'absurde, on considère g un inverse à gauche de f .

On aurait :

$$\begin{aligned}[g \circ f](0) &= g(f(0)) \\ [g \circ f](0) &= g(0).\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}[g \circ f](0) &= Id_{\mathbb{N}}(0) \\ [f \circ g](0) &= 0.\end{aligned}$$

Mais on aurait aussi :

$$\begin{aligned}[g \circ f](1) &= g(f(1)) \\ [g \circ f](1) &= g(0).\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}[g \circ f](1) &= Id_{\mathbb{N}}(1) \\ [g \circ f](1) &= 1.\end{aligned}$$

D'où $0 = 1$ ce qui est absurde. Donc g n'est pas un inverse à gauche de f .

□

Exemple 1.5.7. La fonction :

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases}$$

a un inverse à gauche et un inverse à droite. , pour la composition \circ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$.

Preuve

1. On considère la fonction $g \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n - 1. \end{cases}$

On a bien $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}[g \circ f](n) &= g(f(n)) \\ [g \circ f](n) &= g(n + 1) \\ [g \circ f](n) &= (n + 1) - 1 \\ [g \circ f](n) &= n\end{aligned}$$

Donc $[g \circ f] = Id_{\mathbb{Z}}$.

Puis g est un inverse à gauche de f .

2. Soit h un inverse à gauche de f .

On a, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}[h \circ f](n) &= h(f(n)) \\ [h \circ f](n) &= h(n + 1)\end{aligned}$$

Or h est un inverse à gauche de f , donc : $[h \circ f] = Id_{\mathbb{Z}}$, puis $[h \circ f](n) = n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h(n + 1) = n$.

Puis pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $h(m) = m - 1$ (on a posé $m = n + 1$).

Donc il existe au plus un inverse à gauche de f .

3. On considère la fonction $g \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n - 1 \end{cases}$.

On a bien $g \in \mathcal{F}(\mathbb{Z})$.

De plus $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} [f \circ g](n) &= f(g(n)) \\ [f \circ g](n) &= f(n - 1) \\ [f \circ g](n) &= (n - 1) + 1 \\ [f \circ g](n) &= n \end{aligned}$$

Donc $[f \circ g] = Id_{\mathbb{Z}}$.

Puis g est un inverse à droite de f .

4. Soit h un inverse à droite de f .

On a, pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} [f \circ h](n) &= f(h(n)) \\ [f \circ h](n) &= h(n) + 1 \end{aligned}$$

Or h est un inverse à droite de f , donc : $[f \circ h] = Id_{\mathbb{Z}}$, puis $[f \circ h](n) = n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n = h(n) + 1$.

Puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $h(n) = n - 1$.

Donc il existe au plus un inverse à droite de f .

□

Exemple 1.5.8. La fonction :

$$f \triangleq \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ 0 \mapsto 0 \\ n \mapsto n - 1 \end{cases}$$

n'a des inverses ni à gauche, ni à droite, pour la composition \circ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{Z})$.

Preuve

1. Par l'absurde, soit g un inverse à gauche de f .

$$\begin{aligned} [g \circ f](0) &= g(f(0)) \\ [g \circ f](0) &= g(0) \end{aligned}$$

Or g est un inverse à gauche, donc $[g \circ f] = Id_{\mathbb{N}}$.

Puis $[g \circ f](0) = 0$.

Ainsi $g(0) = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} [g \circ f](1) &= g(f(1)) \\ [g \circ f](1) &= g(0) \end{aligned}$$

Or g est un inverse à gauche, donc $[g \circ f] = Id_{\mathbb{N}}$.
 Puis $[g \circ f](1) = 1$.
 Ainsi $g(0) = 1$.

Ainsi $0 = 1$ ce qui est absurde.
 Donc f n'a pas d'inverse à gauche.

2. Par l'absurde, soit g un inverse à droite de f .

$$[f \circ g](1) = f(g(1))$$

Or g est un inverse à droite, donc $[f \circ g] = Id_{\mathbb{N}}$.
 Puis $[f \circ g](1) = 1$.

(a) si $g(1) = 0$,
 on aurait :

$$\begin{aligned} [f \circ g](1) &= f(0) \\ [f \circ g](1) &= 0. \end{aligned}$$

puis $1 = 0$ (absurde).

(b) si $g(1) \neq 0$,
 on aurait :

$$\begin{aligned} [f \circ g](1) &= f(g(1)) \\ [f \circ g](1) &= g(1) - 1. \end{aligned}$$

Puis $g(1) - 1 = 1$.
 Donc $g(1) = 0$ (absurde).

Dans les deux cas, c'est absurde.
 Donc f n'a pas d'inverse à droite.

□

Exemple 1.5.9. Soit A un ensemble. Les éléments inversibles pour la composition définie sur l'ensemble $\mathcal{F}(A)$ sont les fonctions bijectives. Les éléments qui ont un inverse à gauche sont les injections. Si de plus si il existe une fonction $h : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ telle que pour tout $X \subseteq A \setminus \{\emptyset\}$, $h(X) \in X$, alors les éléments qui ont un inverse à droite sont les surjections.

Preuve (\Rightarrow) Soit $f : A \rightarrow A$ qui admet un inverse à gauche. Soit $g : A \rightarrow A$ un inverse à gauche de f . On a $g \circ f = Id_A$. Soit $x, y \in A$ tels que $f(x) = f(y)$. On a $g(f(x)) = x$ et $g(f(y)) = y$. D'où $x = y$ (car $g \circ f = Id_A$). Puis f est injective. (\Leftarrow) Soit f une injection de A dans A . Soit $g : A \rightarrow A$ la fonction qui à $y \in Im(f)$ associe l'unique x tel que $f(x) = y$, et à $y \in A \setminus Im(f)$ associe y . On a alors pour tout $x \in A$, $f(x) \in Im(f)$, donc $g(f(x))$ est égal à x . Puis $g \circ f$ est la fonction identité.

□

Preuve (\Rightarrow) Soit $f : A \rightarrow A$ qui admet un inverse à droite. Soit $g : A \rightarrow A$ un inverse à droite de f . On a $f \circ g = Id_A$. Soit $x \in A$. On a $f(g(x)) = x$, donc $x \in Im(f)$. Puis f est surjective. (\Leftarrow) Soit f une surjection de A dans A . Soit $g : A \rightarrow A$ la fonction qui à $x \in A$ associe $h(\{y \in A \mid f(y) = x\})$ (h est bien défini car f

est surjective). On a alors pour tout $x \in A$, $g(x) = h(\{y \in A \mid f(y) = x\})$. Puis $g(x) \in \{y \in A \mid f(y) = x\}$. D'où, $f(g(y)) = y$. Puis $f \circ g$ est la fonction identité.

□

Fin de la 1^{re} semaine.

Propriété 1.5.1. *Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne sur A , qui admet un élément neutre ε . Alors, x est un inverse à droite de y pour \otimes si et seulement si y est un inverse à gauche de x pour \otimes .*

Preuve Soit A un ensemble et \otimes une loi interne sur A , qui admet un élément neutre ε . Soient x et y deux éléments de A .

1. (\Rightarrow) Si x est un inverse à droite de y , alors $x \otimes y = \varepsilon$, puis y est un inverse à gauche de x .
2. (\Leftarrow) Si y est un inverse à gauche de x , alors $y \otimes x = \varepsilon$, puis x est un inverse à droite de y .

□

Propriété 1.5.2. *Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , qui admet un élément neutre, et soit x un élément de A . Si $x \in A$ a un inverse à gauche pour \otimes , alors pour tout $y, z \in A$, si $x \otimes y = x \otimes z$ alors $y = z$.*

On dit alors que x est simplifiable à gauche.

Preuve Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , soit ε un élément neutre pour \otimes , et soit x un élément de A .

On suppose que x a un inverse à gauche. On note cet inverse x_g^{-1} .

Soient maintenant y et z deux éléments de A tels que $x \otimes y = x \otimes z$.

On a :

$$\begin{aligned}
 y &= \varepsilon \otimes y && \text{(puisque } \varepsilon \text{ est neutre)} \\
 y &= (x_g^{-1} \otimes x) \otimes y && \text{(puisque } x_g^{-1} \text{ est un inverse à gauche de } x) \\
 y &= x_g^{-1} \otimes (x \otimes y) && \text{(par associativité)} \\
 y &= x_g^{-1} \otimes (x \otimes z) && \text{(puisque } x \otimes y = x \otimes z) \\
 y &= (x_g^{-1} \otimes x) \otimes z && \text{(par associativité)} \\
 y &= \varepsilon \otimes z && \text{(puisque } x_g^{-1} \text{ est un inverse à gauche de } x) \\
 y &= z && \text{(puisque } \varepsilon \text{ est neutre)}
 \end{aligned}$$

Donc $y = z$.

□

Propriété 1.5.3. *Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , qui admet un élément neutre ε et soit x un élément de A . Si $x \in A$ a un inverse à droite pour \otimes , alors pour tout $y, z \in A$, si $y \otimes x = z \otimes x$ alors $y = z$.*

On dit alors que x est simplifiable à droite.

Preuve Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , soit ε un élément neutre pour \otimes , et soit x un élément de A .

On suppose que x a un inverse à droite. On note cet inverse x_d^{-1} .

Soient maintenant y et z deux éléments de A tels que $y \otimes x = z \otimes x$.

On a :

$$\begin{aligned}
y &= y \otimes \varepsilon && \text{(puisque } \varepsilon \text{ est neutre)} \\
y &= y \otimes (x \otimes x_d^{-1}) && \text{(puisque } x_d^{-1} \text{ est un inverse à droite de } x) \\
y &= (y \otimes x) \otimes x_d^{-1} && \text{(par associativité)} \\
y &= (z \otimes x) \otimes x_d^{-1} && \text{(puisque } y \otimes x = z \otimes x) \\
y &= z \otimes (x \otimes x_d^{-1}) && \text{(par associativité)} \\
y &= z \otimes \varepsilon && \text{(puisque } x_d^{-1} \text{ est un inverse à droite de } x) \\
y &= z && \text{(puisque } \varepsilon \text{ est neutre)}
\end{aligned}$$

Donc $y = z$.

□

Proposition 1.5.1. *Soit \otimes une loi interne associative sur un ensemble A , qui admet un élément neutre ε . Soit x un élément de A . Si x est inversible, alors il existe un unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$.*

Preuve Soit \otimes une loi interne associative sur un ensemble A , qui admet un élément neutre.

Soit x un élément de A .

Soient y et z deux inverses de x .

Par définition, y et z sont des inverses à gauche de x .

Donc, $y \otimes x = \varepsilon$ et $z \otimes x = \varepsilon$.

Ainsi $y \otimes x = z \otimes x$.

Or y est, par définition, un inverse à droite de x et, de plus, \otimes est associative.

Donc, par la propriété 1.5.3, x est simplifiable à droite.

Puis $y = z$.

□

Définition 1.5.2. *Soit \otimes une loi interne associative sur un ensemble A , qui admet un élément neutre ε . Si $x \in A$ est inversible, l'unique élément $y \in A$ tel que $x \otimes y = \varepsilon$ et $y \otimes x = \varepsilon$ est appelé inverse de x , et est noté x^{-1} .*

Propriété 1.5.4. *Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , qui admet un élément neutre. Si x est inversible, alors l'inverse de l'inverse de x est x .*

Preuve Soit \otimes une loi interne associative sur un ensemble A , qui admet un élément neutre ε , et x un élément inversible A . On note ε l'élément neutre. On sait que x^{-1} est l'inverse de x . En particulier, c'est l'inverse à droite de x , puis par la propriété 1.5.1, x est l'inverse à gauche de x^{-1} . De plus, x^{-1} est aussi l'inverse à gauche de x , puis par la propriété 1.5.1, x est l'inverse à droite de x^{-1} . Ainsi, x est l'inverse à droite et à gauche de x^{-1} . Donc x^{-1} est inversible, et son inverse est x .

□

Propriété 1.5.5. *Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux éléments inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :*

$$(x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}.$$

Preuve Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , qui admet un élément neutre ε .

Soient x et $y \in A$ deux éléments inversibles.

On a :

$$\begin{aligned}
(y^{-1} \otimes x^{-1}) \otimes (x \otimes y) &= y^{-1} \otimes (x^{-1} \otimes (x \otimes y)) && \text{(par associativité)} \\
(y^{-1} \otimes x^{-1}) \otimes (x \otimes y) &= y^{-1} \otimes ((x^{-1} \otimes x) \otimes y) && \text{(par associativité)} \\
(y^{-1} \otimes x^{-1}) \otimes (x \otimes y) &= y^{-1} \otimes (\varepsilon \otimes y) && \text{(car } x^{-1} \text{ est l'inverse de } x) \\
(y^{-1} \otimes x^{-1}) \otimes (x \otimes y) &= y^{-1} \otimes y && \text{(car } \varepsilon \text{ est un élément neutre)} \\
(y^{-1} \otimes x^{-1}) \otimes (x \otimes y) &= \varepsilon && \text{(car } y^{-1} \text{ est l'inverse de } y)
\end{aligned}$$

Et, quitte à remplacer y par x^{-1} et x par y^{-1} dans le calcul précédent, et en appliquant $(x^{-1})^{-1} = x$ et $(y^{-1})^{-1} = y$, on a également : $(x \otimes y) \otimes (y^{-1} \otimes x^{-1}) = \varepsilon$.

Donc $(y^{-1} \otimes x^{-1})$ est bien l'inverse de $x \otimes y$.

□

Propriété 1.5.6. Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative et commutative sur A , qui admet un élément neutre. Soient x et $y \in A$ deux éléments inversibles. Alors $x \otimes y$ est inversible, de plus :

$$(x \otimes y)^{-1} = x^{-1} \otimes y^{-1}.$$

Preuve Soit A un ensemble, soit \otimes une loi interne associative sur A , qui admet un élément neutre ε .

Soient x et $y \in A$ deux éléments inversibles.

D'après la propriété 1.5.5, $x \otimes y$ est un élément inversible de A , et de plus, on a : $(x \otimes y)^{-1} = (y^{-1}) \otimes (x^{-1})$.

Puis, comme \otimes est commutative, on obtient : $(x \otimes y)^{-1} = (x^{-1}) \otimes (y^{-1})$.

□

Propriété 1.5.7. La propriété 1.5.6 n'est pas satisfaite par toutes les lois associatives non commutatives, munies d'un élément neutre, et pour lesquels tous les éléments ont un inverse.

Preuve Par exemple, nous considérons un ensemble A à trois éléments $\{a, b, c\}$ distincts deux à deux. Nous considérons $Bij(A)$ l'ensemble des bijections de A dans A , muni de la composition \circ des fonctions.

1. La loi \circ est bien une loi interne, car la composée de deux bijection de A dans A , est bien une bijection de A dans A .
2. De plus, la composition est bien associative.
3. Enfin, la fonction identité sur A est une bijection, et c'est l'élément neutre de la loi \circ sur $Bij(A)$.
4. Enfin chaque bijection admet un inverse, qui est aussi une bijection de A dans A .
5. Notons :

$$f : \begin{cases} A \rightarrow A \\ a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \end{cases} \quad g : \begin{cases} A \rightarrow A \\ a \mapsto c \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \end{cases}$$

On a :

$$\begin{array}{llll} (f \circ f)(a) = f(f(a)) & (f \circ g)(a) = f(g(a)) & (g \circ f)(a) = g(f(a)) & (g \circ g)(a) = g(g(a)) \\ (f \circ f)(a) = f(b) & (f \circ g)(a) = f(c) & (g \circ f)(a) = g(b) & (g \circ g)(a) = g(c) \\ (f \circ f)(a) = a & (f \circ g)(a) = c & (g \circ f)(a) = b & (g \circ g)(a) = a \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} (f \circ f)(b) = f(f(b)) & (f \circ g)(b) = f(g(b)) & (g \circ f)(b) = g(f(b)) & (g \circ g)(b) = g(g(b)) \\ (f \circ f)(b) = f(a) & (f \circ g)(b) = f(b) & (g \circ f)(b) = g(a) & (g \circ g)(b) = g(b) \\ (f \circ f)(b) = b & (f \circ g)(b) = a & (g \circ f)(b) = c & (g \circ g)(b) = b \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} (f \circ f)(c) = f(f(c)) & (f \circ g)(c) = f(g(c)) & (g \circ f)(c) = g(f(c)) & (g \circ g)(c) = g(g(c)) \\ (f \circ f)(c) = f(c) & (f \circ g)(c) = f(a) & (g \circ f)(c) = g(c) & (g \circ g)(c) = g(a) \\ (f \circ f)(c) = c & (f \circ g)(c) = b & (g \circ f)(c) = a & (g \circ g)(c) = c \end{array}$$

Ainsi, $f \circ g \neq g \circ f$.

De plus, $f \circ f = Id_A$, donc $f^{-1} = f$.

De même, $g \circ g = Id_A$, donc $g^{-1} = g$.

D'après la propriété 1.5.5, on a : $(f \circ g)^{-1} = (g^{-1}) \circ (f^{-1})$.

Puis, $(f \circ g)^{-1} = g \circ f$.

Or $g \circ f \neq f \circ g$.

Et $f \circ g = (f^{-1}) \circ (g^{-1})$.

Donc $(f \circ g)^{-1} \neq (f^{-1}) \circ (g^{-1})$.

□

Proposition 1.5.2. *Soit \otimes une loi interne associative sur un ensemble A , qui admet un élément neutre. Si tous les éléments de A ont un inverse à droite, alors tous les éléments de A sont inversibles.*

Preuve Soit \otimes une loi interne sur un ensemble A , qui admet un élément neutre.

On suppose que tous les éléments de A ont un inverse à droite pour la loi \otimes . Soit x un élément de A .

Soit $x_d \in A$ un inverse à droite de x pour la loi \otimes .

Soit x_{dd} un inverse à droite de x_d pour la loi \otimes .

On a :

$$\begin{aligned}x_{dd} &= \varepsilon \otimes x_{dd} && \text{(car } \varepsilon \text{ est neutre)} \\x_{dd} &= (x \otimes x_d) \otimes x_{dd} && \text{(car } x_d \text{ est un inverse à droite de } x) \\x_{dd} &= x \otimes (x_d \otimes x_{dd}) && \text{(par associativité)} \\x_{dd} &= x \otimes \varepsilon && \text{(car } x_{dd} \text{ est un inverse à droite de } x_d) \\x_{dd} &= x && \text{(car } \varepsilon \text{ est neutre)}\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}x_d \otimes x &= x_d \otimes x_{dd} \\x_d \otimes x &= \varepsilon && \text{(car } x_{dd} \text{ est un inverse à droite de } x_d)\end{aligned}$$

Donc x_d est aussi un inverse à gauche de x . Puis c'est l'inverse de x .

□

1.6 Groupes

Définition 1.6.1. *Un groupe est une paire (G, \times) telle que G soit un ensemble, et \times soit une loi interne associative sur G qui admet un élément neutre, et telle que tout élément de x soit inversible.*

Propriété 1.6.1. *Un groupe est non vide.*

Preuve En effet, il possède un élément neutre.

□

Définition 1.6.2. *Un groupe $(G, +)$ est dit abélien, si la loi $+$ est commutative.*

Notation 1.6.1. *Lorsque $(G, +)$ est un groupe abélien, l'élément neutre est souvent noté 0_G et l'inverse d'un élément x est noté $-x$.*

Exemple 1.6.1. *Un ensemble à un élément, x , est un groupe abélien pour la loi $+$ définie par $x + x \triangleq x$.*

Preuve

1. $+$ est associative (Exemple 1.2.2).
2. $+$ est commutative (Exemple 1.3.2).
3. x est un élément neutre car pour tout $y \in \{x\}$, on a : $y = x$, puis $y + x = x$ (par définition de $+$), d'où $y + x = x$.
4. x est inversible et son inverse est x , car $x + x = x$ (et x est l'élément neutre).

□

Exemple 1.6.2. Aucune des paires $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot) , ou (\mathbb{R}, \cdot) n'est un groupe.

Exemple 1.6.3. Les paires $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sont des groupes abéliens.

Exemple 1.6.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif. Soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ l'ensemble des entiers entre 0 et $n-1$ muni de l'addition modulo n , est un groupe. L'élément neutre est 0. De plus, pour tout entier $i \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq i < n$, l'inverse de i est $n-i$.

Exemple 1.6.5. Si A est un ensemble avec un ou deux éléments. La paire $(\text{Bij}(A), \circ)$, où $\text{Bij}(A)$ est l'ensemble des bijections de A dans A , est un groupe abélien.

Exemple 1.6.6. Si A est un ensemble avec au moins trois éléments. La paire $(\text{Bij}(A), \circ)$, où $\text{Bij}(A)$ est l'ensemble des bijections de A dans A est un groupe non abélien.

Preuve (On prouve à la fois les énoncés de l'exemple 1.6.5 et de l'exemple 1.6.6)

Soit A un ensemble non vide.

1. La composée de deux bijections est une bijection. Donc \circ est bien une loi interne sur $\text{Bij}(A)$.
2. La loi \circ est associative, car pour toute $f, g, h \in \text{Bij}(A)$, $[f \circ g] \circ h$ et $f \circ [g \circ h]$ sont deux fonctions de A dans A , et, de plus, pour tout $x \in A$.

$$\begin{aligned} [[f \circ g] \circ h](x) &= f(g(h(x))) \\ [[f \circ g] \circ h](x) &= [f \circ [g \circ h]](x). \end{aligned}$$

Ainsi $[f \circ g] \circ h = f \circ [g \circ h]$.

3. La fonction identité Id_A est un élément neutre.
4. Soit f une bijection de A dans A .
La fonction g de A dans A qui à $y \in A$ associe l'unique antécédent de y par x est une bijection et $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_A$, donc f est inversible et son inverse est g .
5. Supposons que A soit un singleton.
Alors l'ensemble $\text{Bij}(A)$ ne contient que la fonction identité. C'est donc un groupe abélien (Exemple 1.6.1).
6. Supposons que A soit un ensemble à deux éléments distincts.
On les note a et b .
Il y a deux bijections, la fonction identité Id_A et la fonction σ définie par $\sigma(a) \triangleq b$ et $\sigma(b) \triangleq a$.
Soient f et g deux bijections sur A .
 - (a) si $f = g$, on a : $f \circ g = g \circ f$.
 - (b) sinon, on peut supposer que $f = Id_A$ et $g = \sigma$,
puis

$$\begin{aligned} f \circ g &= Id_A \circ \sigma \\ f \circ g &= \sigma \\ f \circ g &= \sigma \circ Id_A \\ f \circ g &= g \circ f \end{aligned}$$

7. Supposons que A soit un ensemble avec au moins trois éléments.
Notons a, b, c trois éléments distincts de A .

Nous notons :

$$f : \begin{cases} A \rightarrow A \\ a \mapsto b \\ b \mapsto a \\ x \mapsto x \quad \text{si } x \notin \{a, b\} \end{cases} \qquad g : \begin{cases} A \rightarrow A \\ a \mapsto c \\ c \mapsto a \\ x \mapsto x \quad \text{si } x \notin \{a, b\} \end{cases}$$

f et g sont bien des bijections de A dans A .
De plus,

$$[f \circ g](a) = f(g(a))$$

$$[f \circ g](a) = f(c)$$

$$[f \circ g](a) = c.$$

Et :

$$[g \circ f](a) = g(f(a))$$

$$[g \circ f](a) = g(b)$$

$$[g \circ f](a) = b.$$

Or, $c \neq b$.

D'où, $f \circ g \neq g \circ f$.

Puis \circ n'est pas commutative sur $\text{Bij}(A)$.

□

Proposition 1.6.1. *Si (G, \cdot) est un groupe d'élément neutre ε_G et tel que pour tout $x \in G$, $x.x = \varepsilon_G$, alors (G, \cdot) est abélien.*

Preuve Si (G, \cdot) est un groupe d'élément neutre ε_G et tel que pour tout $x \in G$, $x.x = \varepsilon_G$.

1. Soit $x \in G$.

On a $\underline{x}.x = \varepsilon_G$ et $x.\underline{x} = \varepsilon_G$. Donc $x^{-1} = x$.

2. Soient x et y deux éléments de G .

– Par le point précédent, $(x.y)^{-1} = x.y$.

– De plus, par la Proposition 1.5.5, $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$.

Or par le point précédent, $x^{-1} = x$ et $y^{-1} = y$.

Ainsi, $(x.y)^{-1} = y.x$.

D'où, $x.y = y.x$.

□

2 Espaces vectoriels

Dans la suite, \mathbb{K} est soit l'ensemble \mathbb{Q} , soit l'ensemble \mathbb{R} , soit l'ensemble \mathbb{C} .

2.1 Définition

Définition 2.1.1. *Un \mathbb{K} -espace vectoriel est un triplet $(E, +, \bullet)$ tel que :*

1. $(E, +)$ soit un groupe abélien, dont on note l'élément neutre 0_E ;
2. \bullet soit une loi externe de $\mathbb{K} \times E$ dans E ;

3. pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$ on ait :

- (a) $(\lambda + \mu) \bullet u = (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u)$;
- (b) $\lambda \bullet (u + v) = (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v)$;
- (c) $\lambda \bullet (\mu \bullet u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet u$;
- (d) $1 \bullet u = u$.

Exemple 2.1.1. $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve

- 1. $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien ;
- 2. \cdot est une loi de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans \mathbb{K} ;
- 3. pour tout $\lambda, \mu, u, v \in \mathbb{K}$, on a :
 - (a) $(\lambda + \mu) \cdot u = (\lambda \cdot u) + (\mu \cdot u)$;
 - (b) $\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$;
 - (c) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \cdot \mu) \cdot u$;
 - (d) $1 \cdot u = u$.

□

Exemple 2.1.2. Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Le triplet $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\dot{+}$ applique la loi $+$ composante par composante et $\dot{\bullet}$ applique la loi \bullet composante par composante, est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve

1. Montrons que $(E^n, \dot{+})$ est un groupe abélien :

Soient $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$, $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$ trois familles à valeur dans E indexées par l'ensemble des entiers qui sont compris entre 1 et n .

(a) Montrons que $\dot{+}$ est bien une loi interne.

Pour $1 \leq i \leq n$, on a : $u_i + v_i \in E$ (car $+$ est une loi interne sur E), ainsi $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille à valeur dans E indexée par l'ensemble des entiers qui sont compris entre 1 et n .

Puis $\dot{+}$ est bien une loi interne.

(b) Montrons que $\dot{+}$ est associative.

Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n} &= ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n})_i + w_i && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n} &= (u_i + v_i) + w_i && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n} &= u_i + (v_i + w_i) && \text{(car } + \text{ est associative dans } E \text{)} \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n} &= u_i + ((v_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n})_i && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n} &= ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} ((v_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n}))_i && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n} = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} ((v_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (w_i)_{1 \leq i \leq n})$ et $\dot{+}$ est associative.

(c) Montrons que $\dot{+}$ est commutative.

Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= u_i + v_i && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= v_i + u_i && \text{(car } + \text{ est commutative dans } E \text{)} \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= ((v_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n} = (v_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\dot{+}$ est commutative.

(d) Montrons que $(0_E)_{1 \leq i \leq n}$ est un élément neutre :

- On a : $0_E \in E$, puis, $(0_E)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$.
- Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (0_E)_{1 \leq i \leq n})_i &= u_i + 0_E \quad (\text{par définition de } \dot{+}) \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (0_E)_{1 \leq i \leq n})_i &= u_i \quad (\text{car } 0_E \text{ est neutre pour } \dot{+} \text{ dans } E) \end{aligned}$$

Puis, $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (0_E)_{1 \leq i \leq n} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Donc $(0_E)_{1 \leq i \leq n}$ est un élément neutre pour la loi $\dot{+}$.

(e) Montrons que $(-u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l'inverse de $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$:

- Pour $1 \leq i \leq n$, on a : $-u_i \in E$ (car $(E, +)$ est un groupe et $u \in E$), puis $(-u_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$.
- Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (-u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= u_i + (-u_i) \quad (\text{par définition de } \dot{+}) \\ ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (-u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= (0_E)_{1 \leq i \leq n} \quad (\text{car } -u_i \text{ est l'inverse de } u_i) \end{aligned}$$

Puis, $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (-u_i)_{1 \leq i \leq n} = (0_E)_{1 \leq i \leq n}$.

Donc $(-u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est l'inverse de $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ pour la loi $\dot{+}$.

Donc $(E^n, \dot{+})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que \bullet est bien une loi externe.

Pour $1 \leq i \leq n$, on a : $\lambda \bullet u_i \in E$ (car \bullet est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E), ainsi $\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille à valeur dans E indexée par l'ensemble des entiers qui sont compris entre 1 et n .

Puis \bullet est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda + \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n} = (\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (\mu \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})$:

Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} ((\lambda + \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= (\lambda + \mu) \bullet u_i && (\text{par définition de } \bullet) \\ ((\lambda + \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= (\lambda \bullet u_i) + (\mu \bullet u_i) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3a)} \end{array} \right) \\ ((\lambda + \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= (\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i + (\mu \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i && (\text{par définition de } \bullet) \\ ((\lambda + \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= ((\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (\mu \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}))_i && (\text{par définition de } \dot{+}) \end{aligned}$$

Donc $(\lambda + \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n} = (\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (\mu \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})$.

(b) Montrons que $\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) = (\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (\lambda \bullet (v_i)_{1 \leq i \leq n})$:

Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}))_i &= \lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n})_i && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}))_i &= \lambda \bullet (u_i + v_i) && (\text{par définition de } \dot{+}) \\ (\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}))_i &= (\lambda \bullet u_i) + (\lambda \bullet v_i) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3b)} \end{array} \right) \\ (\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}))_i &= (\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i + (\lambda \bullet (v_i)_{1 \leq i \leq n})_i && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}))_i &= ((\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (\lambda \bullet (v_i)_{1 \leq i \leq n}))_i && (\text{par définition de } \dot{+}) \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n} \dot{+} (v_i)_{1 \leq i \leq n}) = (\lambda \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) \dot{+} (\lambda \bullet (v_i)_{1 \leq i \leq n})$.

(c) Montrons que $\lambda \bullet (\mu \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) = (\lambda \cdot \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}$:

Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n})))_i &= \lambda \bullet (\mu \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n}))_i && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n})))_i &= \lambda \bullet (\mu \bullet u_i) && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n})))_i &= (\lambda \cdot \mu) \bullet u_i && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3c)} \end{array} \right) \\ (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_i)_{1 \leq i \leq n})))_i &= ((\lambda \cdot \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i && (\text{par définition de } \bullet) \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet (\mu \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}) = (\lambda \cdot \mu) \bullet (u_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- (d) Montrons que $1 \dot{\bullet} (u_i)_{1 \leq i \leq n} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$:
 Pour $1 \leq i \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} (1 \dot{\bullet} (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= 1 \bullet u_i && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (1 \dot{\bullet} (u_i)_{1 \leq i \leq n})_i &= ((u_i)_{1 \leq i \leq n})_i && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3d)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Puis, $1 \dot{\bullet} (u_i)_{1 \leq i \leq n} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Ainsi $(E^n, \dot{+}, \dot{\bullet})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

□

Exemple 2.1.3. Soit A un ensemble et $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors $(\mathcal{F}(A, E), \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\mathcal{F}(A, E)$ est l'ensemble des fonctions de A dans E , $\dot{+}$ applique la loi $+$ point à point, et $\dot{\bullet}$ applique la loi \bullet point à point est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Preuve

1. Montrons que $(E^A, \dot{+})$ est un groupe abélien :

Soient f, g , et h trois fonctions de A dans E .

- (a) Montrons que $\dot{+}$ est bien une loi interne.

Pour $a \in A$, on a : $f(a) + g(a) \in E$ (car $+$ est une loi interne sur E), ainsi $f \dot{+} g$ est une fonction de A dans E .

Puis $\dot{+}$ est bien une loi interne.

- (b) Montrons que $\dot{+}$ est associative.

Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} ((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= (f \dot{+} g)(a) + h(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= (f(a) + g(a)) + h(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= f(a) + (g(a) + h(a)) && \text{(car } + \text{ est associative dans } E \text{)} \\ ((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= f(a) + (g \dot{+} h)(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((f \dot{+} g) \dot{+} h)(a) &= (f \dot{+} (g \dot{+} h))(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $(f \dot{+} g) \dot{+} h = f \dot{+} (g \dot{+} h)$ et $\dot{+}$ est associative.

- (c) Montrons que $\dot{+}$ est commutative.

Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} (f \dot{+} g)(a) &= f(a) + g(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (f \dot{+} g)(a) &= g(a) + f(a) && \text{(car } + \text{ est commutative dans } E \text{)} \\ (f \dot{+} g)(a) &= (g \dot{+} f)(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $f \dot{+} g = g \dot{+} f$ et $\dot{+}$ est commutative.

- (d) Montrons que $[a \in A \mapsto 0_E \in E]$ est un élément neutre :

– On a : $0_E \in E$, puis, $[a \in A \mapsto 0_E \in E] \in E^A$.

– Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} (f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E])(a) &= f(a) + [a \in A \mapsto 0_E \in E](a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E])(a) &= f(a) + 0_E \\ (f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E])(a) &= f(a) && \text{(car } 0_E \text{ est neutre pour } \dot{+} \text{ dans } E \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $f \dot{+} [a \in A \mapsto 0_E \in E] = f$.

Donc $[a \in A \mapsto 0_E \in E]$ est un élément neutre pour la loi $\dot{+}$.

(e) Montrons que $(\dot{-} f)$ est l'inverse de f :

- Pour $a \in A$, on a : on a $(\dot{-} f)(a) = -f(a)$ et $-f(a) \in E$ (car $(E, +)$ est un groupe et $f(a) \in E$), puis $\dot{-} f \in E^A$.
- Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) &= f(a) + ((\dot{-} f)(a)) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) &= f(a) + (-f(a)) && \text{(par définition de } \dot{-} \text{)} \\ (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) &= 0_E && \text{(car } -f(a) \text{ est l'inverse de } f(a) \text{)} \\ (f \dot{+} (\dot{-} f))(a) &= [a \in A \mapsto 0_E \in E](a) \end{aligned}$$

Puis, $f \dot{+} (\dot{-} f) = [a \in A \mapsto 0_E \in E]$.

Donc $(\dot{-} f)$ est l'inverse de f pour la loi $\dot{+}$.

Donc $(E^A, \dot{+})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.

Pour $a \in A$, on a : $\lambda \bullet f(a) \in E$ (car \bullet est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E), ainsi $\lambda \dot{\bullet} f$ est une fonction de A dans E .

Puis $\dot{\bullet}$ est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda + \mu) \dot{\bullet} f = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} f)$:

Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) &= (\lambda + \mu) \bullet f(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) &= (\lambda \bullet f(a)) + (\mu \bullet f(a)) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3a)} \end{array} \right) \\ ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) &= (\lambda \dot{\bullet} f)(a) + (\mu \dot{\bullet} f)(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ ((\lambda + \mu) \dot{\bullet} f)(a) &= ((\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} f))(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Donc $(\lambda + \mu) \dot{\bullet} f = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\mu \dot{\bullet} f)$.

(b) Montrons que $\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g) = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} g)$:

Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= \lambda \bullet (f \dot{+} g)(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= \lambda \bullet (f(a) + g(a)) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= (\lambda \bullet f(a)) + (\lambda \bullet g(a)) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3b)} \end{array} \right) \\ (\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= (\lambda \dot{\bullet} f)(a) + (\lambda \dot{\bullet} g)(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g))(a) &= ((\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} g))(a) && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} (f \dot{+} g) = (\lambda \dot{\bullet} f) \dot{+} (\lambda \dot{\bullet} g)$.

(c) Montrons que $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} f$:

Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f))(a) &= \lambda \bullet (\mu \dot{\bullet} f)(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f))(a) &= \lambda \bullet (\mu \bullet f(a)) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f))(a) &= (\lambda \cdot \mu) \bullet f(a) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3c)} \end{array} \right) \\ (\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f))(a) &= ((\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} f)(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \end{aligned}$$

Donc $\lambda \dot{\bullet} (\mu \dot{\bullet} f) = (\lambda \cdot \mu) \dot{\bullet} f$.

- (d) Montrons que $1 \dot{\bullet} f = f$:
 Pour $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} (1 \dot{\bullet} f)(a) &= 1 \bullet f(a) && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (1 \dot{\bullet} f)(a) &= (f)(a) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3d)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Puis, $1 \dot{\bullet} f = f$.

Ainsi $(E^A, \dot{+}, \dot{\bullet})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

□

Exemple 2.1.4. *L'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de l'addition point à point et de la multiplication point à point est un \mathbb{R} -espace vectoriel.*

Preuve D'après l'exemple 2.1.1, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel. Puis, par l'exemple 2.1.3, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \dot{+}, \dot{\cdot})$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

□

Exemple 2.1.5. *Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$ où $\dot{+}$ applique la loi $+$ composante par composante, et $\dot{\bullet}$ applique la loi \bullet composante par composante est un \mathbb{K} -espace vectoriel.*

Preuve

1. Montrons que $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+})$ est un groupe abélien :

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites d'entiers naturels.

- (a) Montrons que $\dot{+}$ est bien une loi interne.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n + v_n \in E$ (car $+$ est une loi interne sur E), ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels.

Puis $\dot{+}$ est bien une loi interne.

- (b) Montrons que $\dot{+}$ est associative.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}})_n + w_n && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= (u_n + v_n) + w_n && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= u_n + (v_n + w_n) && \text{(car } + \text{ est associative dans } E \text{)} \\ (((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= u_n + ((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ (((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} ((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} ((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (w_n)_{n \in \mathbb{N}})$ et $\dot{+}$ est associative.

- (c) Montrons que $\dot{+}$ est commutative.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= u_n + v_n && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \\ ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= v_n + u_n && \text{(car } + \text{ est commutative dans } E \text{)} \\ ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= ((v_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && \text{(par définition de } \dot{+} \text{)} \end{aligned}$$

Puis, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\dot{+}$ est commutative.

- (d) Montrons que $(0_E)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément neutre :

– On a : $0_E \in E$, puis, $(0_E)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

– Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (0_E)_{n \in \mathbb{N}})_n &= u_n + 0_E \quad (\text{par définition de } \dot{+}) \\ ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (0_E)_{n \in \mathbb{N}})_n &= u_n \quad (\text{car } 0_E \text{ est neutre pour } \dot{+} \text{ dans } E) \end{aligned}$$

Puis, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (0_E)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Donc $(0_E)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément neutre pour la loi $\dot{+}$.

(e) Montrons que $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'inverse de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

– Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $-u_n \in E$ (car $(E, +)$ est un groupe et $u \in E$), puis $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

– Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (-u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= u_n + (-u_n) \quad (\text{par définition de } \dot{+}) \\ ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (-u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= (0_E)_{n \in \mathbb{N}} \quad (\text{car } -u_n \text{ est l'inverse de } u_n) \end{aligned}$$

Puis, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (-u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (0_E)_{n \in \mathbb{N}}$.

Donc $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'inverse de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour la loi $\dot{+}$.

Donc $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+})$ est un groupe abélien.

2. Montrons que \bullet est bien une loi externe.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\lambda \bullet u_n \in E$ (car \bullet est une loi de $\mathbb{K} \times E$ dans E), ainsi $\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels.

Puis \bullet est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda + \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (\mu \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})$:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} ((\lambda + \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= (\lambda + \mu) \bullet u_n && (\text{par définition de } \bullet) \\ ((\lambda + \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= (\lambda \bullet u_n) + (\mu \bullet u_n) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3a)} \end{array} \right) \\ ((\lambda + \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= (\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n + (\mu \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && (\text{par définition de } \bullet) \\ ((\lambda + \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= ((\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (\mu \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n && (\text{par définition de } \dot{+}) \end{aligned}$$

Donc $(\lambda + \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (\mu \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

(b) Montrons que $\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (\lambda \bullet (v_n)_{n \in \mathbb{N}})$:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n &= \lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n &= \lambda \bullet (u_n + v_n) && (\text{par définition de } \dot{+}) \\ (\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n &= (\lambda \bullet u_n) + (\lambda \bullet v_n) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3b)} \end{array} \right) \\ (\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n &= (\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n + (\lambda \bullet (v_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n &= ((\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (\lambda \bullet (v_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n && (\text{par définition de } \dot{+}) \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \dot{+} (v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) \dot{+} (\lambda \bullet (v_n)_{n \in \mathbb{N}})$.

(c) Montrons que $\lambda \bullet (\mu \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda \cdot \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}})))_n &= \lambda \bullet (\mu \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}}))_n && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}})))_n &= \lambda \bullet (\mu \bullet u_n) && (\text{par définition de } \bullet) \\ (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}})))_n &= (\lambda \cdot \mu) \bullet u_n && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3c)} \end{array} \right) \\ (\lambda \bullet (\mu \bullet ((u_n)_{n \in \mathbb{N}})))_n &= ((\lambda \cdot \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && (\text{par définition de } \bullet) \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet (\mu \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (\lambda \cdot \mu) \bullet (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (d) Montrons que $1 \dot{\bullet} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
 Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} (1 \dot{\bullet} (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= 1 \bullet u_n && \text{(par définition de } \dot{\bullet} \text{)} \\ (1 \dot{\bullet} (u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n &= ((u_n)_{n \in \mathbb{N}})_n && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3d)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Puis, $1 \dot{\bullet} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi $(E^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\bullet})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

□

Propriété 2.1.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit u un élément de E . On a : $0 \bullet u = 0_E$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit u un élément de E .

On a :

$$\begin{aligned} 0 \bullet u &= (0 \bullet u) + 0_E && \text{(car } 0_E \text{ est neutre)} \\ 0 \bullet u &= (0 \bullet u) + ((0 \bullet u) + (- (0 \bullet u))) && \text{(car } - (0 \bullet u) \text{ est l'inverse de } 0 \bullet u \text{)} \\ 0 \bullet u &= ((0 \bullet u) + (0 \bullet u)) + (- (0 \bullet u)) && \text{(par associativité)} \\ 0 \bullet u &= ((0 + 0) \bullet u) + (- (0 \bullet u)) && \text{(Par la définition 2.1.1.(3a))} \\ 0 \bullet u &= (0 \bullet u) + (- (0 \bullet u)) && \\ 0 \bullet u &= 0_E && \text{(car } - (0 \bullet u) \text{ est l'inverse de } 0 \bullet u \text{)} \end{aligned}$$

□

Propriété 2.1.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, d'élément neutre 0_E et soit λ un élément de \mathbb{K} . On a : $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit λ un élément de \mathbb{K} .

1. Si $\lambda = 0$, alors, par la propriété 2.1.1, $\lambda \bullet 0_E = 0_E$;

2. Sinon.

Soit u un élément de E .

On a :

$$\begin{aligned} \lambda \bullet 0_E + u &= (\lambda \bullet 0_E) + (1 \bullet u) && \text{(par la définition 2.1.1.(3d))} \\ \lambda \bullet 0_E + u &= (\lambda \bullet 0_E) + ((\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}) \bullet u) && \text{(car } \lambda \neq 0 \text{)} \\ \lambda \bullet 0_E + u &= (\lambda \bullet 0_E) + (\lambda \bullet (\frac{1}{\lambda} \bullet u)) && \text{(par la définition 2.1.1.(3c))} \\ \lambda \bullet 0_E + u &= \lambda \bullet (0_E + (\frac{1}{\lambda} \bullet u)) && \text{(par la définition 2.1.1.(3b))} \\ \lambda \bullet 0_E + u &= \lambda \bullet (\frac{1}{\lambda} \bullet u) && \text{(car } 0_E \text{ est neutre)} \\ \lambda \bullet 0_E + u &= (\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}) \bullet u && \text{(par la définition 2.1.1.(3c))} \\ \lambda \bullet 0_E + u &= 1 \bullet u && \\ \lambda \bullet 0_E + u &= u && \text{(par la définition 2.1.1.(3d))} \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet 0_E$ est un élément neutre.

Puis par la proposition 1.4.2, $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.

Dans les deux cas, on a : $\lambda \bullet 0_E = 0_E$.

□

Propriété 2.1.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit u un élément de E . On a : $(-1) \bullet u = -u$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Soit u un élément de E . On a :

$$\begin{aligned} u + ((-1) \bullet u) &= (1 \bullet u) + ((-1) \bullet u) && \text{(par la définition 2.1.1.(3d))} \\ u + ((-1) \bullet u) &= (1 + (-1)) \bullet u && \text{(par la définition 2.1.1.(3a))} \\ u + ((-1) \bullet u) &= 0 \bullet 0_E && \\ u + ((-1) \bullet u) &= 0_E && \text{(par la propriété 2.1.1)} \end{aligned}$$

Donc $(-1) \bullet u$ est l'inverse de u .

□

Propriété 2.1.4. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit u un élément de E , et soit λ un élément de \mathbb{K} . Si $\lambda \bullet u = 0_E$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Soit u un élément de E , et soit λ un élément de \mathbb{K} . On suppose que $\lambda \bullet u = 0_E$.

1. Si $\lambda = 0$, alors $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
2. Si $\lambda \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} u &= 1 \bullet u && \text{(par la définition 2.1.1.(3d))} \\ u &= \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) \bullet u && \text{(car } \lambda \neq 0) \\ u &= \frac{1}{\lambda} \bullet (\lambda \bullet u) && \text{(par la définition 2.1.1.(3c))} \\ u &= \frac{1}{\lambda} \bullet 0_E && \text{(car } \lambda \bullet u = 0_E) \\ u &= 0_E && \text{(par la propriété 2.1.2).} \end{aligned}$$

Puis $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

Ainsi, dans les deux cas, on a : $u = 0_E$ ou $\lambda = 0$.

□

2.2 Sous-espaces

Définition 2.2.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle sous-espace vectoriel de E tout sous-ensemble non vide¹ $F \subseteq E$, tel que :

1. pour tout $u, v \in F$, $(u + v) \in F$;
2. pour tout $u \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \bullet u) \in F$.

Propriété 2.2.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F contient l'élément neutre 0_E de la loi $+$ définie sur E .

Preuve Par la définition 2.2.1, F est non vide.
Soit u un élément de F .

Par la définition 2.2.1.(2), comme $-1 \in \mathbb{K}$ et $u \in F$, on a : $(-1) \bullet u \in F$. Puis, par la définition, on a : 2.2.1.(1), $u + (-1) \bullet u \in F$. Mais, par la propriété 2.1.3, on a : $(-1) \bullet u = -u$. Puis, par la définition 2.2.1.(2), on a : $u + (-u) \in F$. Or comme E est un groupe, $u + (-u) = 0_E$, donc $0_E \in F$.

□

1. Il me semble avoir oublié ce point dans la définition que j'ai donné lundi, or c'est nécessaire pour montrer que tout sous-espace vectoriel contient l'élément neutre...

Propriété 2.2.2. Soit F un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \bullet)$. On note $+|_F$ la loi interne qui associe à une paire (u, v) d'éléments dans F , l'élément $u + v$, et $\cdot|_F$ la loi externe qui associe à un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ et à un élément $u \in F$, l'élément $\lambda \bullet u$. Alors $(F, +|_F, \cdot|_F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel d'élément neutre 0_E .

Preuve

1. Montrons que $(F, +|_F)$ est un groupe abélien :

Soient u, v , et w trois éléments de F .

(a) Montrons que $+|_F$ est bien une loi interne.

On a : $u +|_F v = u + v$ par définition de $+|_F$, or, $u + v \in F$ (par définition 2.2.1.(1) et comme $u \in F$ et $v \in F$), ainsi $u +|_F v$ est un élément de F .

Puis $+|_F$ est bien une loi interne.

(b) Montrons que $+|_F$ est associative.

On a :

$$\begin{aligned} ((u +|_F v) +|_F w) &= (u +|_F v) + w && \text{(par définition de } +|_F) \\ ((u +|_F v) +|_F w) &= (u + v) + w && \text{(par définition de } +|_F) \\ ((u +|_F v) +|_F w) &= u + (v + w) && \text{(car } + \text{ est associative dans } E) \\ ((u +|_F v) +|_F w) &= u + (v +|_F w) && \text{(par définition de } +|_F) \\ ((u +|_F v) +|_F w) &= (u +|_F (v +|_F w)) && \text{(par définition de } +|_F) \end{aligned}$$

Puis, $(u +|_F v) +|_F w = u +|_F (v +|_F w)$ et $+|_F$ est associative.

(c) Montrons que $+|_F$ est commutative.

On a :

$$\begin{aligned} (u +|_F v) &= u + v && \text{(par définition de } +|_F) \\ (u +|_F v) &= v + u && \text{(car } + \text{ est commutative dans } E) \\ (u +|_F v) &= (v +|_F u) && \text{(par définition de } +|_F) \end{aligned}$$

Puis, $u +|_F v = v +|_F u$ et $+|_F$ est commutative.

(d) Montrons que 0_E est un élément neutre :

– D'après, la propriété 2.2.1, $0_E \in E$. puis, $0_E \in F$.

– On a :

$$\begin{aligned} (u +|_F 0_E) &= u + 0_E && \text{(par définition de } +|_F) \\ (u +|_F 0_E) &= u && \text{(car } 0_E \text{ est neutre pour } +|_F \text{ dans } E) \end{aligned}$$

Puis, $u +|_F 0_E = u$.

Donc 0_E est un élément neutre pour la loi $+|_F$.

(e) Montrons que $-u$ est l'inverse de u :

– On a $-u = (-1) \bullet u$, car $u \in E$, E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, et par la propriété 2.1.3. Puis comme $-1 \in \mathbb{K}$, et $u \in F$, par la définition 2.2.1.(2), on obtient : $-u \in F$.

– On a :

$$\begin{aligned} (u +|_F -u) &= u + (-u) && \text{(par définition de } +|_F) \\ (u +|_F -u) &= 0_E && \text{(car } -u \text{ est l'inverse de } u) \end{aligned}$$

Puis, $u +|_F (-u) = 0_E$.

Donc $-u$ est l'inverse de u pour la loi $+|_F$.

Donc $(F, +|_F)$ est un groupe abélien.

2. Montrons que $\bullet|_F$ est bien une loi externe.

On a : $\lambda \bullet|_F u = \lambda \bullet u$ par définition de $\bullet|_F$, or, $\lambda \bullet u \in F$ (par définition 2.2.1.(2) et comme $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$), ainsi $\lambda \bullet|_F u$ est un élément de F .

Puis $\bullet|_F$ est bien une loi externe.

3. (a) Montrons que $(\lambda + \mu) \bullet_{|F} u = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)$:
On a :

$$\begin{aligned} ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= (\lambda + \mu) \bullet u && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= (\lambda \bullet u) + (\mu \bullet u) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3a)} \end{array} \right) \\ ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= (\lambda \bullet_{|F} u) + (\mu \bullet_{|F} u) && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ ((\lambda + \mu) \bullet_{|F} u) &= ((\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)) && \text{(par définition de } +_{|F}) \end{aligned}$$

Donc $(\lambda + \mu) \bullet_{|F} u = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)$.

- (b) Montrons que $\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v) = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\lambda \bullet_{|F} v)$:
On a :

$$\begin{aligned} (\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= \lambda \bullet (u +_{|F} v) && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ (\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= \lambda \bullet (u + v) && \text{(par définition de } +_{|F}) \\ (\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= (\lambda \bullet u) + (\lambda \bullet v) && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3b)} \end{array} \right) \\ (\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= (\lambda \bullet_{|F} u) + (\lambda \bullet_{|F} v) && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ (\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v)) &= ((\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\lambda \bullet_{|F} v)) && \text{(par définition de } +_{|F}) \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet_{|F} (u +_{|F} v) = (\lambda \bullet_{|F} u) +_{|F} (\lambda \bullet_{|F} v)$.

- (c) Montrons que $\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet_{|F} u$:
On a :

$$\begin{aligned} (\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)) &= \lambda \bullet (\mu \bullet_{|F} u) && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ (\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)) &= \lambda \bullet (\mu \bullet u) && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ (\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)) &= (\lambda \cdot \mu) \bullet u && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3c)} \end{array} \right) \\ (\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u)) &= ((\lambda \cdot \mu) \bullet_{|F} u) && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \end{aligned}$$

Donc $\lambda \bullet_{|F} (\mu \bullet_{|F} u) = (\lambda \cdot \mu) \bullet_{|F} u$.

- (d) Montrons que $1 \bullet_{|F} u = u$:
On a :

$$\begin{aligned} (1 \bullet_{|F} u) &= 1 \bullet u && \text{(par définition de } \bullet_{|F}) \\ (1 \bullet_{|F} u) &= u && \left(\begin{array}{l} \text{car } (E, +, \bullet) \text{ est un espace vectoriel} \\ \text{et par définition 2.1.1.(3d)} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Puis, $1 \bullet_{|F} u = u$.

Ainsi $(F, +_{|F}, \bullet_{|F})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

□

Propriété 2.2.3. Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E .

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1. Montrons que $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

(a) On a : $0_E \in \{0_E\}$ donc 0_E est non vide.

(b) On a $0_E \in E$, donc $\{0_E\} \in E$.

(c) Pour $u, v \in \{0_E\}$, on a $u = 0_E$ et $v = 0_E$. Puis, $u + v = 0_E + 0_E$. Or 0_E est un élément neutre pour la loi $+$ définie sur E , donc $u + v = 0_E$. D'où $u + v \in \{0_E\}$.

(d) Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, on a $u = 0_E$. Puis $\lambda \bullet u = \lambda \bullet 0_E$. Puis par la propriété 2.1.2, $\lambda \bullet u = 0_E$. D'où, $\lambda \bullet u \in \{0_E\}$.

Donc $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

2. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

(a) On a $0_E \in E$, donc E est non vide.

(b) On a $E = E$ puis $E \subseteq E$.

(c) Pour $u, v \in E$, on a $u + v \in E$ car $+$ est une loi interne.

(d) Pour $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \bullet u \in E$, car \bullet est une loi externe.

Donc E est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.2.4. Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors l'intersection de deux sous-espaces de $(E, +, \bullet)$ est un sous-espace de $(E, +, \bullet)$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$.

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

1. On a $0_E \in F$ (par la propriété 2.2.1) et $0_E \in G$ (par la propriété 2.2.1), donc $0_E \in F \cap G$, puis $F \cap G$ est non vide.

2. On a $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$, donc $F \cap G \subseteq E$.

3. Soit $u, v \in F \cap G$,

On a $u \in F$ et $v \in F$, donc, par la définition 2.2.1.(1), on a $u + v \in F$.

De même, on a $u \in G$ et $v \in G$, donc, par la définition 2.2.1.(1), on a $u + v \in G$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, donc, par la définition 2.2.1.(2), on a $\lambda \bullet u \in F$. De même, on a $u \in G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, donc, par la définition 2.2.1.(2), on a $\lambda \bullet u \in G$.

Ainsi, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.2.5. Il existe un espace vectoriel $(E, +, \bullet)$ et deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$ tels que leur union ne soit pas un sous-espace vectoriel de $(E, +, \bullet)$.

Preuve On se place dans $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

Montrons que les ensembles F et G définis par $F \triangleq \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G \triangleq \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \dot{\cdot})$, mais $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^2, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

1. (a) On a $F \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) On a $(0, 0) \in F$, donc F est non vide.

(c) Soient $u, v \in F$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = (x, 0)$ et $v = (y, 0)$.

On a $u \dot{+} v = (x + y, 0 + 0)$.

Puis, $u \dot{+} v = (x + y, 0)$.

Donc $u \dot{+} v \in F$.

(d) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in F$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x, 0)$.

On a $\lambda \dot{\cdot} u = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot 0)$.

Puis $\lambda \dot{\cdot} u = (\lambda \cdot x, 0)$.

Donc $\lambda \dot{\cdot} u \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $(E, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

2. (a) On a $G \subseteq \mathbb{R}^2$.
- (b) On a $(0, 0) \in G$, donc G est non vide.
- (c) Soient $u, v \in G$.
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $u = (0, x)$ et $v = (0, y)$.
On a : $u \dot{+} v = (0 + 0, x + y)$.
Puis, $u \dot{+} v = (0, x + y)$.
Donc $u \dot{+} v \in G$.
- (d) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in G$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $u = (0, x)$.
On a : $\lambda \cdot u = (\lambda \cdot 0, \lambda \cdot x)$.
Puis $\lambda \cdot u = (0, \lambda \cdot x)$.
Donc $\lambda \cdot u \in G$.
- (e) On a : $(1, 0) \in F$ et $(0, 1) \in G$. Donc $(1, 0) \in F \cup G$ et $(0, 1) \in F \cup G$. On a : $(1, 0) \dot{+} (0, 1) = (1, 1)$,
et $(1, 1) \notin F$ et $(1, 1) \notin G$.
Donc $(1, 1) \notin F \cup G$. Donc $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
Donc G est un sous-espace vectoriel de $(E, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

□

Exemple 2.2.1. \mathbb{K} et $\{0_{\mathbb{K}}\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

Preuve

1. Montrons que $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$:
 - (a) On a : $0_{\mathbb{K}} \in \{0_{\mathbb{K}}\}$, donc $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est non vide.
 - (b) On a : $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, donc $\{0_{\mathbb{K}}\} \subseteq \mathbb{K}$.
 - (c) Soient $u, v \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
On a : $u = 0_{\mathbb{K}}$ et $v = 0_{\mathbb{K}}$.
Puis, $u + v = 0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}$. D'où, $u + v = 0_{\mathbb{K}}$.
Puis, $u + v \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
 - (d) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
On a : $u = 0_{\mathbb{K}}$.
Puis, $\lambda \bullet u = 0 \bullet 0_{\mathbb{K}}$. D'où, en utilisant la propriété 2.1.2, $\lambda \bullet u = 0_{\mathbb{K}}$.
Puis, $\lambda \bullet u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Donc, $\{0_{\mathbb{K}}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

2. Montrons que \mathbb{K} est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$:
 - (a) On a : $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, donc \mathbb{K} est non vide.
 - (b) On a : $\mathbb{K} = \mathbb{K}$, donc $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}$.
 - (c) Soient $u, v \in \mathbb{K}$.
Par la définition 2.1.1.(1), $u + v \in \mathbb{K}$.
 - (d) Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.
Par la définition 2.1.1.(2), $\lambda \bullet u \in \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Donc, \mathbb{K} est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.
Montrons que $F = \{0_{\mathbb{K}}\}$ ou $F = \mathbb{K}$: Distinguons deux cas :

- si il existe $x \in F$ tel $x \neq 0_E$,
Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda = 1 \cdot \lambda$.

Puis $\lambda = (x \cdot \frac{1}{x}) \cdot \lambda$.

Puis, comme \cdot est associative et commutative, $\lambda = (\lambda \cdot \frac{1}{x}) \cdot x$.

Donc, par la définition 2.2.1.(2), $\lambda \in F$.

Puis $\mathbb{K} \subseteq F$.

Or $F \subseteq \mathbb{K}$.

Donc $F = \mathbb{K}$.

- Par la propriété 2.2.1, $0_{\mathbb{K}} \in F$, on a : $F = \{0_{\mathbb{K}}\}$.

Ainsi $\{0_{\mathbb{K}}\}$ et \mathbb{K} sont les seuls sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

□

Exemple 2.2.2. *L'ensemble des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.*

Preuve Montrons que l'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est bien une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , donc $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. La fonction constante égale à zéro est une fonction continue de \mathcal{R} dans \mathcal{R} donc $\mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{R}) \neq \emptyset$.
3. La somme, point à point, de deux fonctions continues de \mathcal{R} dans \mathcal{R} est une fonction continue de \mathcal{R} dans \mathcal{R} .
4. Le produit externe, point à point, d'une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par un scalaire dans \mathbb{R} est bien une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Donc $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est bien un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

□

Exemple 2.2.3. *L'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.*

Preuve Montrons que l'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} -espace vectoriel.

1. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui converge est bien une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. La suite constante égale à zéro converge.
3. La somme point à point de deux suites qui convergent, converge (vers la somme des deux limites).
4. Le produit externe d'une suite qui converge par un scalaire par un scalaire, converge (vers le produit entre le scalaire et la limite de la suite).

Donc l'ensemble des suites réelles qui convergent est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.

□

Exemple 2.2.4. *Si $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors l'ensemble des suites à valeur dans E qui stationnent est un sous-espace vectoriel de $(E^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.*

Preuve Montrons que l'ensemble des suites réelles qui stationnent est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} -espace vectoriel.

1. Une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui stationne est bien une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. La suite constance égale à zéro stationne.
3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeur dans E , qui stationnent. Soit n_u et n_v deux entiers naturels tels que pour tout $n > n_u$, $u_n = u_{n_u}$ et pour tout $n > n_v$, $v_n = v_{n_v}$. On a pour $n > \max n_u, n_v$, $u_n + v_n = u_{n_u} + v_{n_v}$. Donc la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite à valeur dans E , qui stationne. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit n_u un entier naturel tel que pour tout $n > n_u$, $u_n = u_{n_u}$. On a pour $n > n_u$, $\lambda \bullet u_n = \lambda \bullet u_{n_u}$. Donc la suite $(\lambda \bullet u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne.

Donc l'ensemble des suites réelles qui stationnent est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \bullet)$.
 \square

Exemple 2.2.5. L'ensemble des couples de fonctions (x, y) de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , telles que x et y soient dérivables et vérifient :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un \mathbb{R} espace vectoriel pour l'addition point à point composante par composante, et le produit externe point à point et composante par composante.

Preuve Montrons que l'ensemble des solutions dérivables du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel des paires de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition point à point et composante par composante, et du produit externe point à point et composante par composante.

1. Une solution de ce système est bien une paire de fonction dérivable.
2. La paire de fonction constante égale à 0 est solution.
3. Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux solutions. x_1 et x_2 sont deux fonctions dérivables. Donc $x_1 \dot{+} x_2$ est une fonction dérivable. De même, $y_1 \dot{+} y_2$ est une fonction dérivable.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(x_1 \dot{+} x_2)(t)}{\delta t} &= \frac{\delta x_1(t)}{\delta t} + \frac{\delta x_2(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(x_1 \dot{+} x_2)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot x_1(t) - 3 \cdot y_1(t) + 2 \cdot x_2(t) - 3 \cdot y_2(t) \\ \frac{\delta(x_1 \dot{+} x_2)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (x_1(t) + x_2(t)) - 3 \cdot (y_1(t) + y_2(t)) \\ \frac{\delta(x_1 \dot{+} x_2)(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (x_1 \dot{+} x_2)(t) - 3 \cdot (y_1 \dot{+} y_2)(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(y_1 \dot{+} y_2)(t)}{\delta t} &= \frac{\delta y_1(t)}{\delta t} + \frac{\delta y_2(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(y_1 \dot{+} y_2)(t)}{\delta t} &= 3 \cdot x_1(t) - 2 \cdot y_1(t) + 3 \cdot x_2(t) - 2 \cdot y_2(t) \\ \frac{\delta(y_1 \dot{+} y_2)(t)}{\delta t} &= 3 \cdot (x_1(t) + x_2(t)) - 2 \cdot (y_1(t) + y_2(t)) \\ \frac{\delta(y_1 \dot{+} y_2)(t)}{\delta t} &= 3 \cdot (x_1 \dot{+} x_2)(t) - 2 \cdot (y_1 \dot{+} y_2)(t) \end{aligned}$$

Donc la paire $(x_1 \dot{+} x_2, y_1 \dot{+} y_2)$ est une solution dérivable du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

4. Soit (x, y) une solution et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. x est une fonction dérivable. Donc $\lambda \dot{x}$ est une fonction dérivable. De même, $\lambda \dot{y}$ est une fonction dérivable.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\lambda \dot{x})(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot \frac{x(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(\lambda \dot{x})(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot (2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{x})(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \cdot x(t)) - 3 \cdot (\lambda \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{x})(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \dot{x})(t) - 3 \cdot (\lambda \dot{y})(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\lambda \dot{y})(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot \frac{y(t)}{\delta t} \\ \frac{\delta(\lambda \dot{y})(t)}{\delta t} &= \lambda \cdot (3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{y})(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \cdot x(t)) - 2 \cdot (\lambda \cdot y(t)) \\ \frac{\delta(\lambda \dot{y})(t)}{\delta t} &= 2 \cdot (\lambda \dot{x})(t) - 2 \cdot (\lambda \dot{y})(t) \end{aligned}$$

Donc la paire $(\lambda \dot{x}, \lambda \dot{y})$ est une solution dérivable du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions dérivables du système :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{\delta x(t)}{\delta t} = 2 \cdot x(t) - 3 \cdot y(t) \\ \frac{\delta y(t)}{\delta t} = 3 \cdot x(t) - 2 \cdot y(t), \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel des paires de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , muni de l'addition point à point et composante par composante, et du produit externe point à point et composante par composante.

□

Fin de la 2^e semaine.

2.3 Sous-espaces engendrés

Définition 2.3.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit $(\lambda_i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille finie de n couples dans $\mathbb{K} \times E$.

On définit les sommes partielles S_i pour $0 \leq i \leq n$ par :

$$\begin{cases} S_0 = 0_E \\ S_k = S_{k-1} + \lambda_k \bullet u_k \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

On appelle combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ par les coefficients de la famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, le vecteur $S_n \in E$.

Preuve Par récurrence sur k compris entre 0 et n , on montre que la somme partielle S_k est bien définie et que $S_k \in E$.

– On a : $S_0 = 0_E$. Puis S_0 est bien définie et $S_0 \in E$.

– Supposons qu'il existe k un entier tel que $0 \leq k < n$, et tel que S_k soit bien définie et $S_k \in E$. Alors $S_k \in E$. De plus, $\lambda_{k+1} \in \mathbb{K}$ et $u_{k+1} \in E$. Donc par la définition 2.1.1.(2), $\lambda_{k+1} \bullet u_{k+1} \in E$. Puis, par la définition 2.1.1.(1), $S_k + \lambda_{k+1} \bullet u_{k+1}$ est bien défini et est un élément de E .

Donc par récurrence, la somme S_n est bien définie et est un élément de E .

□

Notation 2.3.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

On note :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bullet u_i,$$

la combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ par les coefficients de la famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Propriété 2.3.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, n un entier naturel, $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de E , $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'éléments de \mathbb{K} , et σ une bijection de l'ensemble des entiers entre 1 et n dans lui-même.

Alors :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bullet u_i = \sum_{i=1}^n \lambda_{\sigma(i)} \bullet u_{\sigma(i)}.$$

Preuve

à faire en exercice

□

Notation 2.3.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble fini et $(\lambda_i, u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{K} \times E)^I$ une famille de couple dans $\mathbb{K} \times E$ indexée par I . On note :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i \triangleq \sum_{k=1}^n \lambda_{\sigma(k)} \bullet u_{\sigma(k)}.$$

où n est le cardinal de I , et σ une bijection de I dans $\{k \mid 1 \leq k \leq n\}$.

Propriété 2.3.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit $A \subseteq E$ une partie de E . Il existe un ensemble F tel que :

- F soit un sous-espace de $(E, +, \bullet)$;
- A soit un sous-ensemble de F ;

– pour tout sous-espace G de $(E, +, \bullet)$ tel que $A \subseteq G$, on ait $F \subseteq G$.
L'ensemble F est alors appelé le sous-espace de $(E, +, \bullet)$ engendré par A .

Preuve On note \mathcal{G} l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$ qui contiennent A . On sait que \mathcal{G} est non vide. En effet, par la propriété 2.2.3, E est un sous-espace de E et comme $A \subseteq E$, on a : $E \in \mathcal{G}$. On définit $\bigcap \mathcal{G} \triangleq \{u \in E \mid \forall F \in \mathcal{G}, u \in F\}$.

1. Montrons que $A \subseteq \bigcap \mathcal{G}$.

Soit $u \in A$.

Soit $G \in \mathcal{G}$, par définition, on a : $A \subseteq G$, donc $u \in G$.

Puis $u \in \bigcap \mathcal{G}$.

2. Montrons que $\bigcap \mathcal{G}$ est un sous-espace de E .²

(a) Soit $u \in \bigcap \mathcal{G}$. Pour tout $G \in \mathcal{G}$, on a : $u \in G$. Or $E \in \mathcal{G}$ (par la propriété 2.2.3), donc $u \in E$. Puis $\bigcap \mathcal{G} \subseteq E$.

(b) D'après la propriété 2.2.1, 0_E est un élément de tous les sous-espaces de E . Donc $0_E \in \bigcap \mathcal{G}$, puis \mathcal{G} est non vide.

(c) Soient u et v deux éléments de $\bigcap \mathcal{G}$.

Soit G , un sous-espace de E . On a : $u, v \in G$. Puis par la définition 2.2.1.(1), $u + v \in G$.

Ainsi, $u + v \in \bigcap \mathcal{G}$.

(d) Soient u un élément de $\bigcap \mathcal{G}$ et λ un scalaire dans \mathbb{K} .

Soit G , un sous-espace de E . On a : $u \in G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Puis par la définition 2.2.1.(2), $\lambda \bullet u \in G$.

Ainsi, $\lambda \bullet u \in \bigcap \mathcal{G}$.

Ainsi $\bigcap \mathcal{G}$ est un sous-espace de E .

3. Soit G' un autre sous-espace vectoriel de E contenant A . Montrons que $\bigcap \mathcal{G} \subseteq G'$.

Soit $u \in \bigcap \mathcal{G}$. Par définition, on a : $G' \in \mathcal{G}$, donc $u \in G'$.

Puis $\bigcap \mathcal{G} \subseteq G'$.

□

Notation 2.3.3. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E . Le sous-espace de $(E, +, \cdot)$ engendré par A est noté $\text{Vect}(A)$.

Propriété 2.3.3. Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et A une partie de E . Alors :

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \bullet u_i \mid n \in \mathbb{N}, (u_i) \in A^n, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Preuve On note $F \triangleq \{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \bullet u_i \mid n \in \mathbb{N}, (u_i) \in A^n, (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \}$. Montrons que F satisfait les hypothèses de la propriété 2.3.2.

1. Soit $a \in A$. Par la définition 2.1.1.(3d), on a $a = 1 \bullet a$. Posons, $a_1 \triangleq a$ et $\lambda_1 \triangleq 1$. On a : $a = \sum_{i \in \{1\}} \lambda_i \bullet a_i$. Puis $a \in F$.

Donc $A \subseteq F$.

2. Montrons que F est un sous-espace de $(E, +, \bullet)$.

(a) On a $0_E = \sum_{i \in \emptyset} _ \bullet _$. Donc F n'est pas vide.

2. On remarquera que ce n'est pas une conséquence de la propriété 2.2.4, car l'ensemble \mathcal{G} peut être infini!

- (b) Soit $u, u' \in F$. Soit n, n' deux entiers, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(\lambda'_i)_{1 \leq i \leq n'}$ deux familles de scalaires dans \mathbb{K} et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(u'_i)_{1 \leq i \leq n'}$ deux familles de vecteurs dans A , tel que : $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bullet u_i$ et $u' = \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i \bullet u'_i$. Nous notons $n'' \triangleq n + n'$. $(\lambda''_i)_{1 \leq i \leq n''}$ la famille de scalaires dans \mathbb{K} définie par :

$$\lambda''_i = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i \leq n \\ \lambda'_{i-n} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et $(u''_i)_{1 \leq i \leq n''}$ la famille d'éléments de A , définie par :

$$u''_i = \begin{cases} u_i & \text{si } i \leq n \\ u'_{i-n} & \text{sinon,} \end{cases}$$

On a, par associativité, $\sum_{i=1}^n \lambda_i \bullet u_i + \sum_{i=1}^{n'} \lambda'_i \bullet u'_i = \sum_{i=1}^{n''} \lambda''_i \bullet u''_i$. Puis $u + u' \in F$.

- (c) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire et soit $u \in F$ un élément.

□

Remarque 2.3.1. Si F est un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \bullet)$, alors $\text{Vect}(F) = F$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

– Par définition, on a $F \subseteq \text{Vect}(F)$.

De plus, on a :

1. $F \subseteq F$;
2. F est un sous-espace vectoriel ;
3. et $F \subseteq E$.

Or $\text{Vect}(F)$ est un sous-ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent F .

D'où $\text{Vect}(F) \subseteq F$.

Puis $\text{Vect}(F) = F$.

□

Exemple 2.3.1. Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ est le sous-espace de $(E, +, \bullet)$ engendré par $\{0_E\}$; de plus, E est le sous-espace vectoriel engendré par E .

Preuve D'après la propriété 2.2.3, $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Puis par la remarque 2.3.1, on a : $\text{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$ et $\text{Vect}(E) = E$.

□

Exemple 2.3.2. Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ engendré par $\{(1, 0, 0)\}$ est $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Preuve

1. Montrons que : $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Vect}(\{(1, 0, 0)\})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a : $(\lambda, 0, 0) = \lambda \bullet (1, 0, 0)$.

Donc $(\lambda, 0, 0)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\{(1, 0, 0)\}$.

Puis, par la propriété 2.3.3, $(\lambda, 0, 0) \in \text{Vect}(\{(1, 0, 0)\})$.

D'où, $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Vect}(\{(1, 0, 0)\})$.

2. Montrons que : $\text{Vect}(\{(1, 0, 0)\}) \subseteq \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Pour cela, il suffit de montrer que $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ qui contient $\{(1, 0, 0)\}$.

- (a) On a pour $\lambda = 1$, $(\lambda, 0, 0) = (1, 0, 0)$, donc $\{(1, 0, 0)\} \subseteq \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- (b) Montrons que $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.
- On a : $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, puisque $(1, 0, 0) \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - On a : $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\neq}$.
 - Soient $u, v \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, 0, 0)$ et $v = (\mu, 0, 0)$.
On a : $u \dot{+} v = (\lambda + \mu, 0, 0)$ et $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $u \dot{+} v \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - Soit $u \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $u = (\mu, 0, 0)$.
On a : $\lambda \dot{\bullet} u = (\lambda \cdot \mu, 0, 0)$ et $\lambda \cdot \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $\lambda \dot{\bullet} u \in \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Puis par la propriété 2.3.2, on a : $\text{Vect}(\{(1, 0, 0)\}) \subseteq \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Puis $\text{Vect}(\{(1, 0, 0)\}) = \{(\lambda, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

□

Exemple 2.3.3. *Le sous-espace de $(\mathbb{K}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par $\{(1, 1, 0)\}$ est $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.*

Preuve

- Montrons que : $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Vect}(\{(1, 1, 0)\})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a : $(\lambda, \lambda, 0) = \lambda \dot{\bullet} (1, 1, 0)$.
Donc $(\lambda, \lambda, 0)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\{(1, 1, 0)\}$.
Puis, par la propriété 2.3.3, $(\lambda, \lambda, 0) \in \text{Vect}(\{(1, 1, 0)\})$.
D'où, $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Vect}(\{(1, 1, 0)\})$.
- Montrons que : $\text{Vect}(\{(1, 1, 0)\}) \subseteq \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Pour cela, il suffit de montrer que $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ qui contient $\{(1, 1, 0)\}$.

- On a pour $\lambda = 1$, $(\lambda, \lambda, 0) = (1, 1, 0)$, donc $\{(1, 1, 0)\} \subseteq \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Montrons que $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

 - On a : $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, puisque $(1, 1, 0) \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - On a : $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\neq}$.
 - Soient $u, v \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, \lambda, 0)$ et $v = (\mu, \mu, 0)$.
On a : $u \dot{+} v = (\lambda + \mu, \lambda + \mu, 0)$ et $\lambda + \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $u \dot{+} v \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
 - Soit $u \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\mu \in \mathbb{R}$, tel que $u = (\mu, \mu, 0)$.
On a : $\lambda \dot{\bullet} u = (\lambda \cdot \mu, \lambda \cdot \mu, 0)$ et $\lambda \cdot \mu \in \mathbb{R}$.
D'où : $\lambda \dot{\bullet} u \in \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Puis par la propriété 2.3.2, on a : $\text{Vect}(\{(1, 1, 0)\}) \subseteq \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Puis $\text{Vect}(\{(1, 1, 0)\}) = \{(\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

□

Exemple 2.3.4. *Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ engendré par $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ est $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.*

Preuve

1. Montrons que : $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \text{Vect}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a : $(\lambda, \mu, 0) = \lambda \dot{\bullet} (1, 0, 0) \dot{+} \mu \dot{\bullet} (0, 1, 0)$.

Donc $(\lambda, \mu, 0)$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

Puis, par la propriété 2.3.3, $(\lambda, \mu, 0) \in \text{Vect}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$.

D'où, $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \in \text{Vect}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\})$.

2. Montrons que : $\text{Vect}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Pour cela, il suffit de montrer que $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$ qui contient $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$.

(a) On a pour $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, $(\lambda, \mu, 0) = (1, 0, 0)$, donc $\{(1, 0, 0)\} \subseteq \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(b) On a pour $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, $(\lambda, \mu, 0) = (0, 1, 0)$, donc $\{(0, 1, 0)\} \subseteq \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

(c) Montrons que $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

i. On a : $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$, puisque $(1, 0, 0) \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

ii. On a : $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\#}$.

iii. Soient $u, u' \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u = (\lambda, \mu, 0)$.

Soient $\lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tels que $u' = (\lambda', \mu', 0)$.

On a : $u \dot{+} u' = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', 0)$ et $\lambda + \lambda' \in \mathbb{R}$ et $\mu + \mu' \in \mathbb{R}$.

D'où : $u \dot{+} u' \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

iv. Soit $u \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ et $\nu \in \mathbb{R}$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tel que $u = (\lambda, \mu, 0)$.

On a : $\nu \dot{\bullet} u = (\nu \cdot \lambda, \nu \cdot \mu, 0)$ et $\nu \cdot \lambda \in \mathbb{R}$ et $\nu \cdot \mu \in \mathbb{R}$.

D'où : $\nu \dot{\bullet} u \in \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Donc $\{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\bullet})$.

Puis par la propriété 2.3.2, on a : $\text{Vect}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) \subseteq \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

Puis $\text{Vect}(\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}) = \{(\lambda, \mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

□

Exemple 2.3.5. *Pour $k \in \mathbb{N}$, δ^k est la suite définie par :*

$$\begin{cases} \delta_n^k = 1 & \text{si } k = n \\ \delta_n^k = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le sous-espace de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \dot{+}, \dot{\cdot})$ engendré par les suites $\{\delta^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui stationnent en 0.

Preuve

– (\subseteq) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Vect}(\{\delta^k \mid k \in \mathbb{N}\})$.

Par la définition 2.3.3, on peut choisir I un sous ensemble fini de \mathbb{N} et $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une famille de scalaires indexée par I , tel que $(u_n) = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i$.

Comme I est une partie finie de \mathbb{N} , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in I$, $i < n_0$.

Puis, pour $n > n_0$, on a : $u_n = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta_n^i$; or pour $i \in I$, on a : $i < n_0$, puis $i \neq n_0$. Donc $u_n = 0$.

Ainsi, (u_n) stationne en 0.

- (\supseteq) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui stationne en 0.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un indice tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = 0$.
On prend $I = \{i \mid 1 \leq i \leq n_0\}$ et la famille $(\lambda_k)_{k \in I} \in \mathbb{K}^I$ de scalaires indexée par I définie par $\lambda_i \triangleq u_i$, pour $i \in I$.
On considère la suite $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i$.
Pour $n \in \mathbb{N}$,
 - si $n \leq n_0$,
on a : $(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i)_n = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta_n^i$; puis, $(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i)_n = \lambda_n$; puis, $(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i)_n = u_n$.
 - si $n > n_0$,
on a : $u_n = 0$ et pour $i \in I$, $\delta_n^i = 0$, donc $(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i)_n = 0$; puis $(\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i)_n = u_n$.
 Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i$.
Puis, $(u_n) \in \text{Vect}(\{\delta^k \mid k \in \mathbb{N}\})$.

□

2.4 Familles libres

Définition 2.4.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite libre si et seulement si pour tout ensemble fini $J \subseteq I$ et toute famille de scalaire $(\lambda_j)_{j \in J}$, on a :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E \Leftrightarrow \forall j \in J, \lambda_j = 0.$$

Définition 2.4.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel et f une famille d'éléments de E . On dit que f est liée si et seulement si elle n'est pas libre.

Remarque 2.4.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble fini. Une famille $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ d'éléments de E est libre si et seulement si pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$, on a :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0.$$

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble fini. Une famille $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ d'éléments de E .

- (\Rightarrow) Si $(u_i)_{i \in I}$ est libre.
 I est un sous-ensemble fini de I .
Puis par la définition 2.4.1, pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$, on a : $\sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
- (\Leftarrow) On suppose que pour tout toute famille de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$, on a : $\sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.
Soit J un sous ensemble fini de I .
Soit $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaire.
On pose pour $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.
On a :

$$\forall j \in J, \lambda_j = 0 \Leftrightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0,$$

puisque pour tout $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$. Et, par hypothèse,

$$\forall i \in I, \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E.$$

Donc :

$$\forall j \in J, \lambda_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$$

Or :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \bullet u_i = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j$$

Donc :

$$\forall j \in J, \lambda_j = 0 \Leftrightarrow \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E.$$

Puis, par la définition 2.4.1, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

□

Propriété 2.4.1. *Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors les familles libres ne contiennent pas l'élément 0_E .*

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . On suppose qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que $u_{i_0} = 0_E$. Alors $1 \bullet u_{i_0}$ est une combinaison linéaire d'éléments de $(u_i)_{i \in I}$ avec un coefficient non nul (1). Or $1 \bullet u_{i_0} = 1 \bullet 0_E$, puis, par la propriété 2.1.2, $1 \bullet u_{i_0} = 0_E$. Donc la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée dans E .

□

Exemple 2.4.1. *Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors toute famille formée d'un élément de $E \setminus \{0_E\}$ est libre.*

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un singleton $\{i_0\}$ et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'un élément de E indexée par I . On suppose que $u_{i_0} \neq 0_E$. Soit $J \subseteq I$, et $(\lambda_j)_{j \in J} \in E^J$ une famille de scalaires indexée par J telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$.

1. Si $J = \emptyset$, alors pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.

2. Sinon, $J = \{i_0\}$, puis, $\lambda_{i_0} \bullet u_{i_0} = 0_E$. Donc, d'après la propriété 2.1.4, $\lambda_{i_0} = 0$ ou $u_{i_0} = 0_E$, puis, comme $u_{i_0} \neq 0_E$, $\lambda_{i_0} = 0$.

Donc dans tous les cas, pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.

Puis, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

□

Exemple 2.4.2. *La famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.*

Preuve Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda \dot{\cdot} (1, 1, 0) \dot{+} \mu \dot{\cdot} (-1, 1, 0) = (0, 0, 0)$.

On a sur la première coordonnée : $\lambda - \mu = 0$;

et sur la seconde coordonnée : $\lambda + \mu = 0$.

Ainsi :

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ \lambda + \mu = 0. \end{cases}$$

Puis par substitution :

$$\begin{cases} \lambda = \mu \\ 2 \cdot \mu = 0. \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0. \end{cases}$$

Ainsi la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre dans $(\mathbb{R}^3, \dot{+}, \dot{\cdot})$.

□

Exemple 2.4.3. La famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Preuve On a :

$$(-5) \cdot (1, 1, 0) + (-1) \cdot (-1, 1, 0) + 2 \cdot (2, 3, 0) = ((-5) + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2, (-5) + (-1) + 2 \cdot 3, 0)$$

$$(-5) \cdot (1, 1, 0) + (-1) \cdot (-1, 1, 0) + 2 \cdot (2, 3, 0) = (-5 + 1 + 4, -5 - 1 + 6, 0)$$

$$(-5) \cdot (1, 1, 0) + (-1) \cdot (-1, 1, 0) + 2 \cdot (2, 3, 0) = (0, 0, 0)$$

Donc la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ est liée.

□

Exemple 2.4.4. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des n -uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k -ième coordonnée qui vaut 1 est libre.

Preuve Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires telle que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \delta^k = (0)_{1 \leq k \leq n}$. Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq j \leq n$, on a sur la j -ième coordonnée, $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \delta_j^k = 0$. Or $\delta_j^k = 0$ pour tout k tel que $j \neq k$. Puis $\lambda_k \cdot 1 = 0$ et $\lambda_k = 0$. Donc la famille $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ est libre.

□

Propriété 2.4.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I . Soit J un sous ensemble de I . Alors, la famille $(u_j)_{j \in J}$ est libre.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre d'éléments de E indexée par I . Soit J un sous ensemble de I .

Montrons que $(u_j)_{j \in J}$ est une famille libre.

Soit K un sous ensemble fini de J et $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K . Comme $J \subseteq I$, K est un sous ensemble fini de I . Donc, par la définition 2.4.1, $\sum_{k \in K} \lambda_k \bullet u_k = 0_E \Leftrightarrow \forall k \in K, \lambda_k = 0$. Puis, par la définition 2.4.1, la famille $(u_j)_{j \in J}$ est libre.

□

Propriété 2.4.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit σ une bijection de I dans I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ v_i \triangleq u_{\sigma(i)}. \right.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit σ une bijection de I dans I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ v_i \triangleq u_{\sigma(i)}. \right.$$

– (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

Montrons que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Soit J un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J tel que : $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet v_j = 0_E$. Il faut montrer que pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.

Pour $j \in J$, on a : $v_j = u_{\sigma(j)}$.

Donc $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_{\sigma(j)}$. Puis, comme σ est une bijection, on peut faire le changement de variable $j' = \sigma(j)$.

D'où $\sum_{j' \in \{\sigma(j) \mid j \in J\}} \lambda_{\sigma^{-1}(j')} \bullet u_{j'}$. Or l'ensemble $\{\sigma(j) \mid j \in J\}$ est fini et la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre, donc par la définition 2.4.1, on a : pour $j' \in \{\sigma(j) \mid j \in J\}$, $\lambda_{\sigma^{-1}(j')} = 0$. Puis en posant $j \in J$, $\lambda_{\sigma^{-1}(\sigma(j))} = 0$,

et $\lambda_j = 0$.

Ainsi, par la définition 2.4.1, la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

– (\Leftarrow) On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ en appliquant le point précédent en remplaçant $(u_i)_{i \in I}$ par $(v_i)_{i \in I}$ et réciproquement, puis en remplaçant σ par σ^{-1} .

□

Propriété 2.4.4. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i \triangleq u_i \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i \triangleq u_i \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}. \end{cases}$$

– (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

Montrons que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Soit J un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J tel que : $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet v_j = 0_E$. Il faut montrer que pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.

On pose, pour $j \in J$, $\lambda'_j \triangleq \lambda_j$ si $j \neq i_0$, et $\lambda'_j \triangleq \lambda \cdot \lambda_j$ si $j = i_0$.

On a donc : $\sum_{j \in J} \lambda'_j \bullet u_j = 0$.

Or la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre, donc par la définition 2.4.1, on sait que, pour tout $j \in J$, $\lambda'_j = 0$.

Puis pour $j \in J$,

– si $j \neq i_0$,

$$\lambda'_j = \lambda_j, \text{ puis } \lambda_j = 0;$$

– si $j = i_0$,

$$\lambda'_j = \lambda \cdot \lambda_j \text{ et } \lambda \neq 0, \text{ donc } \lambda_j = 0;$$

donc dans les deux cas, $\lambda_j = 0$.

Puis par la définition 2.4.1, la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

– (\Leftarrow) On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre. On montre que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre en appliquant le point précédent en remplaçant la famille $(u_i)_{i \in I}$ par la famille $(v_i)_{i \in I}$ et réciproquement, et en remplaçant λ par son inverse (puisque $\lambda \neq 0$).

□

Propriété 2.4.5. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + u_{j_0} \\ v_i \triangleq u_i \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$v_i \triangleq u_i + \delta_{i_0}^i \cdot u_{j_0} \quad \text{pour } i \in I.$$

1. si $i_0 = j_0$, $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si $(v_i)_{i \in I}$ est libre d'après la propriété 2.4.4 (avec $\lambda = 2$).
2. on suppose que $i_0 \neq j_0$:

(a) (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I .

Soit $(\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J , telle que $\sum_{i \in J} \lambda_i \bullet v_i = 0_E$.

On a donc $\sum_{i \in J} \lambda_i \bullet (u_i + \delta_{i_0}^i \cdot u_{j_0}) = 0_E$.

Puis, $\lambda_{i_0} \cdot u_{j_0} + \sum_{i \in J} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$.

Puis, $\sum_{i \in J} (\lambda_i + \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0}) \cdot u_i = 0_E$.

Comme $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$, pour tout $i \in J$, $\lambda_i + \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0} = 0$.

Donc pour $i \in J \setminus \{j_0\}$, $\lambda_i = 0$.

De plus, on a : $\lambda_{j_0} + \lambda_{i_0} = 0$.

Comme $j_0 \neq i_0$, on a $\lambda_{i_0} = 0$, donc $\lambda_{j_0} = 0$. Puis, $(v_i)_{i \in I}$ est une famille libre de $(E, +, \bullet)$.

(b) (\Leftarrow) On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I .

Soit $(\lambda_i)_{i \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J , telle que $\sum_{i \in J} \lambda_i \bullet u_i = 0_E$.

On a donc $\sum_{i \in J} \lambda_i \bullet (v_i - \delta_{i_0}^i \cdot u_{j_0}) = 0_E$.

Or $v_{j_0} = u_{j_0}$ car $i_0 \neq j_0$.

Donc $\sum_{i \in J} \lambda_i \bullet (v_i - \delta_{i_0}^i \cdot v_{j_0}) = 0_E$. Puis, $\sum_{i \in J} (\lambda_i - \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0}) \cdot v_i = 0_E$.

Comme $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$, pour tout $i \in J$, $\lambda_i - \delta_{j_0}^i \cdot \lambda_{i_0} = 0$.

Donc pour $i \in J \setminus \{j_0\}$, $\lambda_i = 0$.

De plus, On a : $\lambda_{j_0} - \lambda_{i_0} = 0$, donc $\lambda_{j_0} = 0$. Puis $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre de $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.4.6. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} \\ v_i \triangleq u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

Preuve On définit la famille $(w_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w_{j_0} \triangleq \lambda \bullet u_{j_0} \\ w_i \triangleq u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\}$$

Puis, la famille $(w'_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w'_{i_0} \triangleq w_{i_0} + w_{j_0} \\ w'_i \triangleq w_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}$$

Et, la famille $(w''_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w''_{j_0} \triangleq \frac{1}{\lambda} \bullet w'_{j_0} \\ w''_i \triangleq w'_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\}$$

puis la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 2.4.4, la famille $(w_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 2.4.5, la famille $(w'_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 2.4.4, la famille $(w''_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$.

Or, pour $i \in I$ on a :

1.

$$\begin{aligned} w''_{i_0} &= w'_{i_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= w_{i_0} + w_{j_0} \\ w''_{i_0} &= u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= v_{i_0} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} \\ w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \\ w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \bullet u_{j_0}) \\ w''_{j_0} &= u_{j_0} \\ w''_{j_0} &= v_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \end{aligned}$$

3. et pour $i \in I \setminus \{i_0, j_0\}$:

$$\begin{aligned} w''_i &= w'_i && (\text{car } i \neq j_0) \\ w''_i &= w_i && (\text{car } i \neq i_0) \\ w''_i &= u_i && (\text{car } i \neq j_0) \\ w''_i &= v_i && (\text{car } i \neq i_0) \end{aligned}$$

Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$ si et seulement si $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.4.7. Soient m et n deux entiers positifs dans \mathbb{N} . Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs du \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$. Si pour tout i entre 1 et m , il existe une coordonnée j_i telle que pour tout indice i' entre 1 et m , la j_i -ième coordonnée de $u_{i'}$ soit égale à 0 si et seulement si $i' \neq i$, alors la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre.

Preuve Soient $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{K}^m$ une famille de m scalaires tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i \bullet u_i = (0)_{1 \leq j \leq n}$.
Soit i entre 1 et m .

Soit j_i entre 1 et n tel que pour tout i' entre 1 et m on ait : la j_i -ième coordonnée de $u_{i'}$ soit égale à zéro si et seulement si $i' \neq i$.

On a : $\sum_{i=1}^m \lambda_i \bullet u_i = (0)_{1 \leq j \leq n}$.

Donc, selon la j_i -ième coordonnée, on obtient : $\lambda_i \bullet u_i = 0$.

Puis, comme $u_i \neq 0$, $\lambda_i = 0$.

Donc la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre.

□

Algorithme 2.4.1. Soient m et n deux entiers positifs dans \mathbb{N} . Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de \mathbb{K}^n .

On note $u_{i,j}$ la j -ième coordonnée du i -ième vecteur de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est libre, ou liée.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = m$ alors la famille est libre.
2. si $p < m$ et s'il pour tout q entre 1 et n , $u_{p+1,q} = 0$, alors la famille est liée.
3. sinon, prendre q le plus petit entier tel que $u_{p+1,q} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_{p+1} par l'inverse de $u_{p+1,q}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{p'}$ pour $p' \neq p$ le vecteur u_{p+1} multiplié par $u_{p',q}$.
6. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
7. Retourner à l'étape 1.

Preuve À l'étape 1, on peut montrer par récurrence que pour tout les vecteurs u_k pour $1 \leq k \leq p$, il existe une coordonnée j_k tel que $u_{k',j_k} = 0$ pour k' entre 1 et m et $k' \neq k$. De plus, les transformations effectuées sur la famille de vecteur ne modifient pas le fait d'être lié ou libre (d'après la propriété 2.4.4 pour l'étape 4, la propriété 2.4.6 pour l'étape 5). Ainsi, si à l'étape 1, $p = m$, alors la famille satisfait la propriété 2.4.7, elle est donc libre. Par contre, si un vecteur est nul, d'après la propriété 2.4.1 la famille est liée. Dans les autres cas, on peut continuer à itérer l'algorithme.

□

Exemple 2.4.5. On utilise l'algorithme 2.4.1 pour savoir si la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre, ou non.

La famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (-1, 1, 0) \end{pmatrix}$ est libre,

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 2, 0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$),

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$),

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$).

Or cette dernière famille est libre, par la propriété 2.4.7, donc la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ est libre.

Exemple 2.4.6. On utilise l'algorithme 2.4.1 pour savoir si la famille $((1, 0, 1), (-1, 0, 1))$ est libre, ou non.

La famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (-1, 0, 1) \end{pmatrix}$ est libre,

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (0, 0, 2) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$),

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$),

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$).

Or cette dernière famille est libre, par la propriété 2.4.7, donc la famille $((1, 0, 1), (-1, 0, 1))$ est libre.

Exemple 2.4.7. On utilise l'algorithme 2.4.1 pour savoir si la famille $((1, 1, 0), (-1, -1, 0))$ est libre, ou non.

La famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (-1, -1, 0) \end{pmatrix}$ est libre,

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 0, 0) \end{pmatrix}$ est libre (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$).

Or cette dernière famille est liée, par la propriété 2.4.1, donc la famille $((1, 1, 0), (-1, -1, 0))$ est liée.

Fin de la 3^e semaine.

2.5 Familles génératrices

Définition 2.5.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est dite génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si pour tout élément $u \in E$, il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j \in J}$, tels que :

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = u.$$

Propriété 2.5.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel, soit I un ensemble, et soit $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . La famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si $\text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) = E$.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et soit $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I .

1. (\Rightarrow) On suppose que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

On sait, d'après la définition 2.3.2 que : $\text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) \subseteq E$.

Montrons que : $E \subseteq \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

Soit $u \in E$.

$(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E .

Donc, il existe $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et une famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ de scalaires indexée par J , tel que : $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j$.

Puis par la propriété 2.3.3, $u \in \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

D'où $E \subseteq \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

Puis $E = \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

2. (\Leftarrow) On suppose que $\text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\}) = E$.

Montrons que : $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E .

Soit $u \in E$.

On a : $u \in \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

Puis, par la propriété 2.3.3, il existe $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et une famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ de scalaires indexée par J , tel que : $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j$.

Donc $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E .

□

Exemple 2.5.1. Pour tout élément non nul, $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, la famille (λ) est une famille génératrice de \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

Preuve Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$.

Soit $\mu \in \mathbb{K}$. On a, comme $\lambda \neq 0$, $\mu = \frac{\mu}{\lambda} \cdot \lambda$.

Donc (λ) est une famille génératrice de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$.

□

Exemple 2.5.2. Si $(E, +, \bullet)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors la famille $(u)_{u \in E}$ de tous les vecteurs de E est une famille génératrice.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Pour $u \in E$, on a, par la définition 2.1.1.(3d), $u = 1 \bullet u$.

Donc $(u)_{u \in E}$ est une famille génératrice de E .

□

Exemple 2.5.3. La famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Preuve Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

On a : $\frac{x+y+2z}{2} : (1, 1, 0) + \frac{y-x}{2} : (-1, 1, 0) + z : (1, 1, 1) = \left(\frac{x+y+2z}{2} - \frac{y-x}{2} + z, \frac{x+y+2z}{2} + \frac{y-x}{2} + z, z \right)$.

Puis, $\frac{x+y+2z}{2} : (1, 1, 0) + \frac{y-x}{2} : (-1, 1, 0) + z : (1, 1, 1) = (x, y, z)$.

Donc, la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

□

Exemple 2.5.4. La famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Preuve Montrons que $(0, 0, 1) \notin \text{Vect}(\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0)\})$.

Par l'absurde, soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda : (1, 1, 0) + \mu : (-1, 1, 0) + \nu : (2, 3, 0) = (0, 0, 1)$.

Pour la troisième coordonnée, on aurait : $\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = 1$.

Puis $1 = 0$, ce qui est absurde.

Donc la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (2, 3, 0))$ n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

□

Exemple 2.5.5. La famille des suites $(\delta^k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une famille génératrice de l'espace des suites à valeur dans \mathbb{R} .

Preuve Montrons que la suite $(n)_{n \in \mathbb{N}} \notin \text{Vect}((\delta^k)_{k \in \mathbb{N}})$. Par l'absurde, soit I un sous ensemble fini de \mathbb{N} et $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille finie de scalaire indexée par I , tel que : $(n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{i \in I} \lambda_i : \delta^i$.

I serait une partie finie de \mathbb{N} .

Donc il existerait un entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $i \in I$, $i < n_0$.

Au rang n_0 , on aurait $n_0 = \sum_{i \in I} \lambda_i : \delta_{n_0}^i$.

Or pour $i \in I$, $i < n_0$ donc $i \neq n_0$, puis $\delta_{n_0}^i = 0$.

D'où, $n_0 = 0$ (ce qui est absurde).

Donc la famille $(\delta^k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas une famille génératrice des suites à valeur dans \mathbb{R} .

□

Propriété 2.5.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{K}^n telle qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout indice $i \in I$, la coordonnée i_0 de u_i soit égale à 0. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas génératrice.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de \mathbb{K}^n telle qu'il existe un indice $i_0 \in I$ tel que pour tout indice $i \in I$, la coordonnée i_0 de u_i soit égale à 0.

Soit $\delta^{i_0} \in \mathbb{K}^n$, le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 0, sauf la i_0 -ième coordonnée qui vaut 1.

Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J . On suppose par l'absurde que $\delta^{i_0} = \sum_{j \in J} \lambda_j : u_j$. Sur la i_0 -ième coordonnée, on aurait : $1 = 0$, ce qui est absurde.

Donc la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas une famille génératrice.

□

Propriété 2.5.3. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de m éléments de \mathbb{K}^n . On suppose qu'il existe un indice i_0 tel que $1 \leq i_0 \leq \min(m-1, n)$, et tel que pour tout i entre 1 et i_0 , la j -ième coordonnée du vecteur u_i vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, et tel que pour tout $i > i_0$ la $i_0 + 1$ -ième coordonnée du vecteur u_i vaut 0. Alors la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ n'est pas génératrice.

Preuve Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels. Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ une famille de m éléments de \mathbb{K}^n . Soit i_0 un indice tel que $1 \leq i_0 \leq \min(m-1, n)$, et tel que pour tout i entre 1 et i_0 , la j -ième coordonnée du vecteur

u_i vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, et tel que pour tout $i > i_0$ la $i_0 + 1$ -ième coordonnée du vecteur u_i vaut 0. On note $u_{i,j}$ la valeur de la j -ième coordonnée du vecteur u_i . Posons $(v_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$ le vecteur défini par :

$$\begin{cases} v_j = 1 & \text{si } j \neq i_0 \\ v_j = 1 + \sum_{k=1}^{i_0} u_{k,i_0} & \text{si } j = i_0 \end{cases}$$

On suppose par l'absurde qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m} \in \mathbb{K}^m$ une famille de m scalaires tels que $\sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i \cdot u_i = (v_j)_{1 \leq j \leq n}$. Pour $j < i_0$, on aurait, sur la j -ième coordonnée, $v_j = \lambda_j$, puis $\lambda_j = 1$. Mais, sur la i_0 -ième coordonnée, on aurait $v_{i_0} = \sum_{k=1}^{i_0} \lambda_k \cdot u_{k,i_0}$, puis $1 + \sum_{k=1}^{i_0} u_{k,i_0} = \sum_{k=1}^{i_0} \lambda_k \cdot u_{k,i_0}$, et $1 = 0$ (ce qui est absurde).

Donc la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ n'est pas génératrice.

□

Exemple 2.5.6. D'après la propriété 2.5.3, la famille :

$$\begin{pmatrix} (1, 0, 0, 3) \\ (0, 1, 0, 2) \\ (0, 0, 1, 2) \\ (0, 0, 0, 0) \end{pmatrix}$$

n'est pas une famille génératrice de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Exemple 2.5.7. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des n -uplets de scalaires, muni de l'addition et la multiplication coordonnée par coordonnée. La famille $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ de vecteurs telle que δ_k a toutes ses coordonnées égales à 0, sauf la k -ième coordonnée qui vaut 1 est génératrice.

Preuve Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$.

Posons $y = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \cdot \delta^k$.

Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq n$,

la j -ième coordonnée de $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ vaut x_j .

la j -ième coordonnée de y vaut $\sum_{1 \leq k \leq n} x_k \cdot \delta_j^k$, puis la j -ième coordonnée de y vaut x_j .

Ainsi $(x_i)_{i \in I} = \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \cdot \delta^k$. Donc $(\delta^k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de \mathbb{K}^n .

□

Propriété 2.5.4. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit J un sous ensemble de I . Alors, si la famille $(u_j)_{j \in J}$ est génératrice de E , alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice de E .

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit J un sous ensemble de I . Alors, si la famille $(u_j)_{j \in J}$ est génératrice de E .

Soit $x \in E$, Soit $K \subseteq J$ un ensemble fini d'indices, et $(\lambda_k)_{k \in K} \in E^K$, une famille de scalaires indexée par K telle que $x = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet u_k$. On a $J \subseteq I$, donc K est un sous ensemble fini de I et $x = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet u_k$. Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.5.5. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit σ une bijection de I dans I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\{v_i \triangleq u_{\sigma(i)}\}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit σ une bijection de I dans I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ v_i \triangleq u_{\sigma(i)}. \right.$$

1. (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.

Soit $x \in E$.

Soit $J \subseteq I$ et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J telle que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j$.

On a donc : $x = \sum_{j \in J} \lambda_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} \bullet u_{\sigma(\sigma^{-1}(j))}$.

Puis : $x = \sum_{j \in J} \lambda_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} \bullet v_{\sigma^{-1}(j)}$.

Enfin : $x = \sum_{j' \in \{k \in I \mid \sigma(k) \in J\}} \lambda_{\sigma(k)} \bullet v_k$.

Or $\{k \in I \mid \sigma(k) \in J\}$ est un sous-ensemble fini de I , puis $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

2. (\Leftarrow) On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice. Alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ l'est également, en appliquant le point précédent en remplaçant $(u_i)_{i \in I}$ par $(v_i)_{i \in I}$, et réciproquement et σ par σ^{-1} .

□

Propriété 2.5.6. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{i_0} \triangleq \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i \triangleq u_i \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{array} \right.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{i_0} \triangleq \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i \triangleq u_i \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{array} \right.$$

1. (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Soit $x \in E$,

Comme $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice, il existe un sous-ensemble $J \subseteq I$ fini de I et une famille de scalaires $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ indexée par J de sorte que : $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet u_j$.

Or, pour $i \in I$, on a : $u_i = \frac{1}{1 + (\lambda - 1) \times \delta_i^{i_0}} \bullet v_i$.

D'où $x = \sum_{j \in J} \frac{\mu_j}{1 + (\lambda - 1) \times \delta_j^{i_0}} \bullet v_j$.

Puis (v_i) est une famille génératrice.

2. (\Leftarrow) On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

On a pour $i \in I$, comme $\lambda \neq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i = \frac{1}{\lambda} \bullet v_i \quad \text{si } i = i_0 \\ u_i = v_i \quad \text{sinon ;} \end{array} \right.$$

Or $\frac{1}{\lambda} \neq 0$, par le point précédent, la famille (u_i) est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.5.7. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + u_{j_0} \\ v_i \triangleq u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} \triangleq u_{i_0} + u_{j_0} \\ v_i \triangleq u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}.$$

1. si $i_0 = j_0$, alors $v_{i_0} = 2 \bullet u_{i_0}$, puis d'après la propriété 2.5.6, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice si et seulement si $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.

2. si $i_0 \neq j_0$:

(a) (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Soit $x \in E$ un vecteur de E .

Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J et telle que $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet u_j$.

On a, pour $i \in I$, $v_i = u_i + \delta_i^{i_0} \bullet u_{j_0}$.

Puis comme $i_0 \neq j_0$, $v_{j_0} = u_{i_0}$ et, pour $i \in I$, $v_i = u_i + \delta_i^{i_0} \bullet v_{j_0}$.

Ainsi, pour $i \in I$, $u_i = v_i - \delta_i^{i_0} \bullet u_{j_0}$.

D'où, $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet (v_j - \delta_j^{i_0} \bullet u_{j_0})$. Et, $x = \sum_{j \in J} (\mu_j - \delta_j^{i_0} \times \mu_{i_0}) \bullet v_j$.

Donc la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

(b) (\Leftarrow) On suppose que la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Soit $x \in E$ un vecteur de E .

Soit $J \subseteq I$ un sous ensemble fini de I et $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J et telle que $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet v_j$.

On a donc, $x = \sum_{j \in J} \mu_j \bullet (u_j + \delta_j^{i_0} \bullet u_{j_0})$. Puis, $x = \sum_{j \in J} (\mu_j + \delta_j^{i_0} \mu_{i_0}) \bullet u_j$. Puis $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.5.8. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} \\ v_i = u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice.

Preuve On définit la famille $(w_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w_{j_0} \triangleq \lambda \bullet u_{j_0} \\ w_i \triangleq u_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\}$$

Puis, la famille $(w'_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w'_{i_0} \triangleq w_{i_0} + w_{j_0} \\ w'_i \triangleq w_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\}$$

Et, la famille $(w'_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} w''_{j_0} \triangleq \frac{1}{\lambda} \bullet w'_{j_0} \\ w''_i \triangleq w'_i \end{cases} \quad \text{pour } i \in I \setminus \{j_0\}$$

puis la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 2.5.6, la famille $(w_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 2.5.7, la famille $(w'_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$,
si et seulement si, par la propriété 2.5.6, la famille $(w''_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Or, pour $i \in I$ on a :

1.

$$\begin{aligned} w''_{i_0} &= w'_{i_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= w_{i_0} + w_{j_0} \\ w''_{i_0} &= u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} && (\text{car } i_0 \neq j_0) \\ w''_{i_0} &= v_{i_0} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} \\ w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot w'_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \\ w''_{j_0} &= \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \bullet u_{j_0}) \\ w''_{j_0} &= u_{j_0} \\ w''_{j_0} &= v_{j_0} && (\text{car } j_0 \neq i_0) \end{aligned}$$

3. et pour $i \in I \setminus \{i_0, j_0\}$:

$$\begin{aligned} w''_i &= w'_i && (\text{car } i \neq j_0) \\ w''_i &= w_i && (\text{car } i \neq i_0) \\ w''_i &= u_i && (\text{car } i \neq j_0) \\ w''_i &= v_i && (\text{car } i \neq i_0) \end{aligned}$$

Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$ si et seulement si $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +, \bullet)$.

□

□

Algorithme 2.5.1. Soient m et n deux entiers positifs dans \mathbb{N} . Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^m$ une famille de m vecteurs de \mathbb{K}^n .

On note $u_{i,j}$ la j -ième coordonnée du i -ième vecteur de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est génératrice, ou non.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est génératrice.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq m$, on a : $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas génératrice.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.

6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k .
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.

Preuve À l'étape 1, on peut montrer par récurrence que pour tout k et tout l tels que $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq p$, $u_{k,l} = 0$ si $k \neq l$, et $u_{k,l} = 1$ si $k = l$. De plus, les transformations effectuées sur la famille de vecteur ne modifient pas le fait d'être une famille génératrice, ou non (d'après la propriété 2.5.6 pour l'étape 4, d'après la propriété 2.5.7 pour l'étape 5, d'après la propriété 2.5.5 pour l'étape 6). Ainsi, si à l'étape 1, $p = n$, la famille est celle de l'exemple 2.5.7, elle est donc génératrice. Par contre, si le test de l'étape (2) échoue, la famille ne peut pas être génératrice soit par la propriété 2.5.2, soit par la propriété 2.5.3. \square

Exemple 2.5.8. On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une famille génératrice, ou non. La famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (-1, 1, 0) \\ (1, 1, 1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 2, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)

Or cette dernière famille est génératrice car elle satisfait la propriété 2.5.2. Donc la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une famille génératrice.

Exemple 2.5.9. On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille $((1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 2))$ est une famille génératrice, ou non. La famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 1) \\ (-1, 1, -1) \\ (2, 0, 2) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 1) \\ (0, 2, 0) \\ (0, -2, 0) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 1) \\ (0, 1, 0) \\ (0, -2, 0) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 0) \end{pmatrix}$ est une famille génératrice (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)

Or cette dernière famille n'est pas génératrice car pour tout $(x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0))$, on a $x = z$. Puis $(0, 0, 1) \notin \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 0))$.

Donc la famille $((1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 2))$ n'est pas une famille génératrice.

2.6 Bases et dimensions

Définition 2.6.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle base de E toute famille d'éléments de E qui est à la fois libre et génératrice de E .

Théorème 2.6.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I , tel que $(u_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Alors pour tout vecteur $u \in E$, il existe un unique sous-ensemble $J \subseteq I$ et une unique famille $(\lambda_j)_{j \in J}$ de scalaires non nuls tel que :

$$u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j.$$

Ainsi tout vecteur admet une décomposition unique dans une base.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I , tel que $(u_i)_{i \in I}$ soit une base de E .

Soit $u \in E$.

- La famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice. Il existe donc un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ de scalaires dans \mathbb{K} tel que $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j$.
- Soient J' un sous-ensemble de I , et $(\lambda'_j)_{j' \in J'} \in \mathbb{K}^{J'}$ une famille de scalaires non nuls telle que : $u = \sum_{j' \in J'} \lambda_{j'} \bullet u_{j'}$. On définit, pour $j' \in J \setminus J'$, $\lambda'_{j'} = 0$ et pour $j \in J' \setminus J$, $\lambda_j = 0$. On a donc : $u = \sum_{j \in J \cup J'} \lambda_j \bullet u_j$ et $u = \sum_{j \in J \cup J'} \lambda'_j \bullet u_j$. Puis $\sum_{j \in J \cup J'} \lambda_j \bullet u_j = \sum_{j \in J \cup J'} \lambda'_j \bullet u_j$. D'où : $\sum_{j \in J \cup J'} (\lambda_j - \lambda'_j) \bullet u_j$. Or $J \cup J'$ est un ensemble fini, et la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre. Donc pour tout $j \in J \cup J'$, $\lambda_j - \lambda'_j = 0$. Puis pour tout $j \in J \cup J'$, $\lambda_j = \lambda'_j$. On en déduit que $J = J'$, et pour tout $j \in J$, $\lambda_j = \lambda'_j$.

□

Exemple 2.6.1. Tout élément non nul de \mathbb{K} est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

Preuve Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. D'après l'exemple 2.4.1, (λ) est une famille libre du \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$. D'après l'exemple 2.5.1, (λ) est une famille génératrice du \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$. Ainsi, (λ) est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $(\mathbb{K}, +, \bullet)$.

□

Exemple 2.6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de \mathbb{K}^n telle que la j -ième coordonnée du i -ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. Alors $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ est une base de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ (on dit que c'est la base canonique de \mathbb{K}^n).

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ la famille de n vecteurs de \mathbb{K}^n telle que la j -ième coordonnée du i -ième vecteur soit égale à 0 si $i \neq j$ et à 1 sinon. D'après l'exemple 2.4.4, la famille $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$. De plus, d'après l'exemple 2.5.7, la famille $(\delta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$. Par la définition 2.6.1, c'est donc une base de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$.

□

Exemple 2.6.3. Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de E . La famille $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ définie par $e_{i,j}$ est un vecteur de n composantes dont la k -ième composante est égale b_i si $j = k$ ou 0_E sinon, est une base de $(E^n, +, \bullet)$.

Preuve Soit n un entier et $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de E . La famille $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ définie par $e_{i,j}$ est un vecteur de n composantes dont la k -ième composante est égale b_i si $j = k$ ou 0_E sinon.

1. famille libre :

Soit K un sous-ensemble fini de $I \times \{k \in \mathbb{K} \mid 1 \leq k \leq n\}$ et soit $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K tel que : $\sum_{(i,j) \in K} \lambda_{i,j} \cdot e_{i,j} = 0_{E^n}$.

Soit k un entier entre 1 et n , on a, sur la k -ième composante, $\sum_{(i,j) \in K} \lambda_{i,j} \cdot \delta_j^k \cdot b_i = 0_E$; puis $\sum_{i \in I, (i,k) \in K} \lambda_{i,k} \cdot b_i = 0_E$; or l'ensemble $\{i \in I \mid (i,k) \in K\}$ est un sous-ensemble fini de I et la famille $(b_i)_{i \in I} \in E^I$ est libre (car c'est une base), donc pour $i' \in \{i \in I \mid (i,k) \in K\}$, $\lambda_{i,k} = 0$.

Ainsi, pour $(i,j) \in K$, on a : $\lambda_{i,j} = 0$.

Puis la famille $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ est une famille libre de $(E^n, +, \bullet)$.

2. famille génératrice :

Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in E^n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$.

On sait que $(b_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.

Il existe donc un sous-ensemble fini $K_k \subseteq I$ et une famille de scalaires $(\lambda_{i,k})_{i \in K_k}$ telle que $x_k = \sum_{i \in K_k} \lambda_{i,k} \cdot b_i$.

On considère le vecteur x' de E^n défini par : $x' \triangleq \sum_{1 \leq j \leq n, i \in K_j} \lambda_{i,j} \cdot e_{i,j}$.

L'ensemble $\{(i,j) \mid 1 \leq j \leq n, i \in K_j\}$ est un sous-ensemble fini de $I \times J$.

De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, la k -ième coordonnée x'_k de x' vaut $\sum_{1 \leq j \leq n, i \in K_j} \lambda_{i,j} \cdot \delta_k^j \cdot b_i$. On a donc : $x'_k = \sum_{i \in K_k} \lambda_{i,k} \cdot b_i$. Puis $x'_k = x_k$.

Ainsi $(x'_j)_{1 \leq j \leq n} = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$.

Donc $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ est une famille génératrice.

Puis $(e_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq n}$ est une base de $(E^n, +, \bullet)$.

□

Exemple 2.6.4. Soit A un ensemble fini et $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de E . La famille $(f_{i,j})_{i \in I, j \in A}$ définie par $f_{i,j}(a) = b_i$ si $a = j$, et $f_{i,j}(a) = 0_E$ sinon, est une base de $(\mathcal{F}(A, E), +, \bullet)$.

Preuve Soit A un ensemble fini et $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(b_i)_{i \in I}$ une base de E . La famille $(f_{i,j})_{i \in I, j \in A}$ définie par $f_{i,j}(a) = b_i$ si $a = j$, et $f_{i,j}(a) = 0_E$ sinon, est une base de $(\mathcal{F}(A, E), +, \bullet)$.

1. famille libre :

Soit K un sous-ensemble fini de $I \times A$ et soit $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K tel que : $\sum_{(i,j) \in K} \lambda_{i,j} \cdot f_{i,j} = 0_{\mathcal{F}(A, E)}$.

Soit $a \in A$, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= (0_{\mathcal{F}(A, E)})(a) \\ 0 &= \left(\sum_{(i,j) \in K} \lambda_{i,j} \cdot f_{i,j} \right)(a) \\ 0 &= \sum_{(i,j) \in K} \lambda_{i,j} \cdot f_{i,j}(a) \\ 0 &= \sum_{(i,j) \in K} \lambda_{i,j} \cdot \delta_a^j \cdot b_i \\ 0 &= \sum_{i \in I, (i,a) \in K} \lambda_{i,a} \cdot b_i. \end{aligned}$$

Or la famille $(b_i)_{i \in I}$ est une famille libre (car c'est une base).

Donc pour $i \in I$ tel que $(i,a) \in K$, on a : $\lambda_{i,a} = 0$.

Puis pour tout $(i,j) \in K$, $\lambda_{i,j} = 0$.

Puis la famille $(f_{i,j})_{i \in I, j \in A}$ est une famille libre de $(\mathcal{F}[A, E], +, \bullet)$.

2. famille génératrice :

Soit $g \in \mathcal{F}(A, E)$.

Soit $a \in A$.

On sait que $(b_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Il existe donc un sous-ensemble fini $K_a \subseteq I$ et une famille de scalaires $(\lambda_{i,a})_{i \in K_a}$ telle que $g(a) =$

$$\sum_{i \in K_a} \lambda_{i,a} \cdot b_i.$$

On considère la fonction $g' \in \mathcal{F}(A, E)$ définie par : $g' \triangleq \sum_{a \in A, i \in K_a} \lambda_{i,a} \cdot f_{i,a}$.

L'ensemble $\{(i, a) \mid a \in A, i \in K_a\}$ est un sous-ensemble fini de $I \times J$.

De plus, pour tout élément $a \in A$, $g'(a)$ vaut $\sum_{a' \in A, i \in K_a} \lambda_{i,a'} \cdot \delta_{a'}^a \cdot b_{a'}$. On a donc : $g'(a) = \sum_{i \in K_a} \lambda_{i,a} \cdot b_i$.

Puis $g'(a) = g(a)$.

Ainsi $g' = g$.

Donc $(f_{i,j})_{i \in I, j \in A}$ est une famille génératrice.

Puis $(f_{i,j})_{i \in I, j \in A}$ est une base de $(\mathcal{F}(A, E), +, \bullet)$

□

Exemple 2.6.5. La famille des suites $(\delta^k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel des suites qui stationnent en 0.

Preuve

1. famille libre : Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ un ensemble fini d'entiers.

Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ une famille de scalaires indexée par I et telle que : $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta^i = (0)_{i \in \mathbb{N}}$. Soit $k \in I$, on obtient au rang k , $\sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \delta_k^i = 0$. Puis $\lambda_k = 0$.

2. famille génératrice : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} qui stationne en 0.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $u_n = 0$.

On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n_0} u_k \cdot \delta_n^k$.

Puis $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{n_0} u_k \cdot \delta^k$.

Ainsi, $(\delta^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel des suites à valeur dans \mathbb{K} , qui stationnent en 0, pour la somme et le produit externe point à point.

□

Propriété 2.6.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une famille d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille libre maximale.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I .

– (\Rightarrow) On suppose que $(u_i)_{i \in I}$ est une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \bullet)$.

Par la définition 2.6.1, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

Soit J un ensemble tel que $I \subseteq J$ et $(v_j)_{j \in J}$ une famille libre de $(E, +, \bullet)$ telle que pour tout $i \in I$, $u_i = v_i$.

Supposons par l'absurde que $I \neq J$.

Il existerait $j_0 \in J \setminus I$.

Or, par la définition 2.6.1, $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Puis, il existerait un sous-ensemble fini J' de I et une famille de scalaires $(\lambda_{j'})_{j' \in J'} \in E^{J'}$ tels que

$$v_{j_0} = \sum_{j' \in J'} \lambda_{j'} \cdot u_{j'}.$$

Puis, $v_{j_0} = \sum_{j' \in J'} \lambda_{j'} \cdot v_{j'}$. Ce qui est absurde car $(v_j)_{j \in J}$ est libre et $j_0 \notin J'$.

Donc $J = I$, et $(u_i)_{i \in I}$ est bien une famille libre maximale.

– (\Leftarrow) On suppose que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre maximale de $(E, +, \bullet)$.

Par l'absurde, soit $u \in E$ un vecteur tel que $u \notin \text{Vect}(u_i \mid i \in I)$.

Soit I' un ensemble tel que $I' = I \cup \{i_0\}$ (où i_0 est un indice qui n'est pas dans I).

On pose $u_{i_0} \triangleq u$. Montrons que la famille $(u_{i'})_{i' \in I'}$ serait une famille libre.

Soit J un sous-ensemble fini de I' et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires, tel que : $\sum_{j \in J} \lambda_j \cdot u_j = 0_E$.

1. Si $i_0 \in J$ et $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors $u_{i_0} = \sum_{j \in J \setminus \{i_0\}} \frac{\lambda_j}{\lambda_{i_0}} \cdot u_j$. Ce qui est absurde car $u_{i_0} \notin \text{Vect}(\{u_i \mid i \in I\})$.

2. Sinon. On a $\sum_{j \in J \setminus \{i_0\}} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$. Puis, comme la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre, pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$. Donc la famille $(u_{i'})_{i' \in I'}$ est libre.

Donc la famille $(u_{i'})_{i' \in I'}$ est libre, ce qui est absurde car la famille $(u_i)_{i \in I}$ est maximale pour cette propriété.

□

Propriété 2.6.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une famille d'éléments de E est une base de E si et seulement si c'est une famille génératrice minimale.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E indexée par I .

– (\Rightarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de $(E, +, \bullet)$.

Par la définition 2.6.1, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.

On suppose par l'absurde que cette famille n'est pas minimale.

Il existerait donc $J \subset I$ tel que $(u_j)_{j \in J}$ soit une famille génératrice de E .

Soit $i \in I \setminus J$.

Comme la famille $(u_j)_{j \in J}$ est une famille génératrice, il existerait un ensemble fini $K \subseteq J$ et une famille de scalaires $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ indexée par K , tel que $u_i = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet u_k$.

En posant $\lambda_i \triangleq (-1)$, on aurait : $\sum_{k \in K \cup \{i\}} \lambda_k \bullet u_k = 0_E$.

Or l'ensemble $K \cup \{i\}$ est fini, $K \cup \{i\} \subseteq I$, et, par la définition 2.6.1, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre. Donc pour $k \in K \cup \{i\}$, on aurait : $\lambda_k = 0$. Ce qui est absurde, car, en particulier, $\lambda_i = -1$.

– (\Leftarrow) On suppose que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale.

Montrons que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre.

Soit J un ensemble fini d'indices et $(\lambda_j) \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet u_j = 0_E$.

Par l'absurde, on suppose qu'il existe un indice $j_0 \in J$, tel que $\lambda_{j_0} \neq 0$.

On aurait donc, $u_{j_0} = \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \frac{\lambda_j}{\lambda_{j_0}} \bullet u_j$.

On pourrait alors montrer que la famille $(u_j)_{j \in J \setminus \{j_0\}}$ serait génératrice :

Soit $u \in E$.

Comme $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice, il existe un ensemble fini d'indices K et une famille de scalaires $(\mu_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ indexée par K tel que $u = \sum_{k \in K} \mu_k \bullet u_k$.

Pour $k \in K \setminus J$, on pose $\lambda_k \triangleq 0$.

Pour $j \in J \setminus K$, on pose $\mu_j \triangleq 0$.

On aurait donc $u = \sum_{l \in (J \cup K) \setminus \{j_0\}} (\mu_{j_0} \cdot \lambda_l + \mu_l) \bullet u_l$.

Donc la famille $(u_i)_{i \in I \setminus \{j_0\}}$ serait une famille génératrice ce qui est absurde car $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice minimale.

□

Propriété 2.6.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit σ une bijection de I dans I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\left\{ v_i = u_{\sigma(i)} \right.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E .

Preuve On procède par équivalence :
la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E

\Leftrightarrow la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 2.6.1)
 \Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 2.4.3) et génératrice de E (d'après la propriété 2.5.5)
 \Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E (d'après la définition 2.6.1).

□

Propriété 2.6.4. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda \neq 0$ et $i_0 \in I$ un élément de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = \lambda \bullet u_{i_0} \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E .

Preuve On procède par équivalence :

la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E

\Leftrightarrow la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 2.6.1)

\Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 2.4.4) et génératrice de E (d'après la propriété 2.5.6)

\Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E (d'après la définition 2.6.1).

□

Propriété 2.6.5. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I . Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + u_{j_0} \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est base de E si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E .

Preuve On procède par équivalence : la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E

\Leftrightarrow la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 2.6.1)

\Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 2.4.5) et génératrice de E (d'après la propriété 2.5.7)

\Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E (d'après la définition 2.6.1).

□

Propriété 2.6.6. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit I un ensemble. Si $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille d'éléments de E indexée par I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient $i_0 \in I$ et $j_0 \in I$ deux éléments de I tels que $i_0 \neq j_0$. Soit $(v_i)_{i \in I} \in E^I$ la famille d'éléments de E définie par :

$$\begin{cases} v_{i_0} = u_{i_0} + \lambda \bullet u_{j_0} \\ v_i = u_i & \text{pour } i \in I \setminus \{i_0\} \end{cases}$$

Alors, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base.

Preuve On procède par équivalence : la famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E

\Leftrightarrow la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre dans E et génératrice de E (d'après la définition 2.6.1)

\Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre dans E (d'après la propriété 2.4.6) et génératrice de E (d'après la propriété 2.5.8)

\Leftrightarrow la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E (d'après la définition 2.6.1).

□

Théorème 2.6.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J . Soit $(u_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de E , tel que la famille $(u_i)_{i \in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j \in J}$ soit une famille génératrice de E . Alors il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et la famille $(u_k)_{k \in K}$ est une base de E .

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit J un ensemble fini. Soit I un sous-ensemble de J . Soit $(u_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de E , tel que la famille $(u_i)_{i \in I}$ soit une famille libre et la famille $(u_j)_{j \in J}$ soit une famille génératrice de E .

On suppose que la famille $(u_j)_{j \in J}$ n'est pas une base de E . On considère l'ensemble de tous les ensembles J' tels que $I \subseteq J' \subseteq J$, et $(u_{j'})_{j' \in J'}$ soit une famille génératrice. Cet ensemble possède un élément minimal K pour l'inclusion.

Ainsi, la famille $(u_k)_{k \in K}$ est libre dans E .

Par l'absurde, supposons que ce ne soit pas le cas.

Il existerait donc une famille de scalaires $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ non tous nuls telle que $\sum_{k \in K} \lambda_k \bullet u_k = 0_E$.

Puis il existerait nécessairement un indice $k_0 \in K \setminus I$ tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$ (puisque $(u_i)_{i \in I}$ est libre).

Prenons $k_0 \in K \setminus I$ tel que $\lambda_{k_0} \neq 0$.

On aurait donc $u_{k_0} = \sum_{k \in K \setminus \{k_0\}} \lambda_k \bullet u_k$.

Soit $u \in E$.

Comme $(u_k)_{k \in K}$ est une famille génératrice, il existerait une famille de scalaires $(\mu_k)_{k \in K}$ telle que $u = \sum_{k \in K} \mu_k \bullet u_k$.

Puis $u = \sum_{k \in K \setminus \{k_0\}} (\mu_k + \mu_{k_0} \times \lambda_k) \bullet u_k$. Donc la famille $(u_k)_{k \in K \setminus \{k_0\}}$ est une famille génératrice de E . Ce qui est absurde (par minimalité de K).

□

Fin de la 4^e semaine.

Corollaire 2.6.1. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre finie de $(E, +, \bullet)$ s'étend en une base.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, soit I un ensemble fini et $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre. Soit J un ensemble fini tel que $I \cap J = \emptyset$ et $(u_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de E . On a $(u_i)_{i \in I \cup J}$ est une famille génératrice de E et $I \subseteq I \cup J$. De plus, l'ensemble $I \cup J$ est fini. Donc il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et $(u_k)_{k \in K}$ soit une base de E .

□

Corollaire 2.6.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Toute famille génératrice finie de $(E, +, \bullet)$ contient une base.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit J un ensemble fini et $(u_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de E . On note $I = \emptyset$. On a $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre et $I \subseteq J$. Donc il existe un ensemble K tel que $I \subseteq K \subseteq J$ et $(u_k)_{k \in K}$ soit une base de E .

□

Corollaire 2.6.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors, toute famille libre finie de $(E, +, \bullet)$ s'étend en une base.

Preuve Soit I, J deux ensembles finis tels que $I \cap J = \emptyset$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre de $(E, +, \bullet)$ et $(u_j)_{j \in J}$ une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$. Par la propriété 2.5.4, la famille $(u_k)_{k \in I \cup J}$ est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$. De plus, $I \cup J$ est un ensemble fini. Donc d'après le théorème 2.6.2, il existe K tel

que $I \subseteq K \subseteq I \cup J$ et tel que $(u_k)_{k \in K}$ soit une base de E . Puis $(u_i)_{i \in I}$ s'étend en une base du \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \bullet)$.

□

Propriété 2.6.7. *Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui possède une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille qui possède au moins $n + 1$ éléments de E est liée.*

Preuve On procède par l'absurde. On prends le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe un \mathbb{K} -espace vectoriel, avec une famille génératrice de n éléments et une famille libre d'au moins $n + 1$ éléments. Soit $(E, +, \bullet)$ un tel \mathbb{K} -espace vectoriel. Soient I un ensemble, $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre d'éléments de E et $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ une famille génératrice de E . Prenons un sous ensemble de I avec $n + 1$ éléments, que l'on note k_1, \dots, k_{n+1} .

Comme $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille génératrice, on peut choisir une famille $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq n}$ de scalaires de \mathbb{K} telle que pour tout i entre 1 et $n + 1$, on ait :

$$u_{k_i} = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_{i,j} \bullet v_j.$$

1. Si tous les scalaires $\lambda_{i,j}$ étaient nuls. Alors on aurait $u_1 = 0_E$ ce qui est absurde, par la propriété 2.6.7 et car la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

2. Soit, donc, i_0 entre 1 et m et j_0 entre 1 et n tel que $\lambda_{i_0, j_0} \neq 0$.

La famille $(u_{k_i})_{1 \leq i \leq n+1}$ est libre.

Donc la famille $(w_i)_{1 \leq i \leq n+1}$ où :

$$\begin{cases} w_{i_0} = u_{k_{i_0}} \\ w_i = \lambda_{i_0, j_0} \bullet u_{k_i} - \lambda_{i, i_0} \bullet u_{i_0} & \text{si } i \neq i_0 \end{cases}$$

Puis, la famille libre $(w_i)_{1 \leq i \leq n+1, i \neq i_0}$ est dans l'espace engendré par $(v_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq j_0}$.

Ce qui est absurde car on a formé un \mathbb{K} -espace vectoriel avec une famille génératrice de $n - 1$ vecteurs et une famille libre d'au moins n vecteurs.

□

Théorème 2.6.3. *Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Alors toutes les bases de $(E, +, \bullet)$ ont le même cardinal.*

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases $(E, +, \bullet)$. Par la définition 2.6.1, \mathcal{B} est une famille libre dans $(E, +, \bullet)$ et \mathcal{B}' est une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$. Ainsi, comme $(E, +, \bullet)$ admet une famille génératrice finie, par la propriété 2.6.7, $\text{CARD}(\mathcal{B}) \leq \text{CARD}(\mathcal{B}')$. Puis en remplaçant \mathcal{B} par \mathcal{B}' et réciproquement, on optient : $\text{CARD}(\mathcal{B}) = \text{CARD}(\mathcal{B}')$.

□

Définition 2.6.2. *Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie. On dit que $(E, +, \bullet)$ est de dimension finie et on appelle dimension de $(E, +, \bullet)$ le cardinal des bases de E .*

Propriété 2.6.8. *Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini égale à n . Alors toute famille libre de n élément est une base.*

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini égale à n . Soit I un ensemble de n éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille libre de $(E, +, \bullet)$.

Donc par le corollaire 2.6.3, $(u_i)_{i \in I}$ s'étend en une base de $(E, +, \bullet)$. Or d'après le théorème 2.6.3, le cardinal de cette base est égale à n , il s'agit donc de $(u_i)_{i \in I}$. Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est une base.

□

Propriété 2.6.9. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini égale à n . Alors toute famille génératrice de n éléments est une base.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel et soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension fini égale à n .

Soit I un ensemble de n éléments et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de $(E, +, \bullet)$.

Par le corollaire 2.6.2, $(u_i)_{i \in I}$ contient une base de $(E, +, \bullet)$. Or d'après le théorème 2.6.3, le cardinal de cette base est égale à n . Il s'agit donc de la famille $(u_i)_{i \in I}$. Ainsi $(u_i)_{i \in I}$ est une base.

□

Propriété 2.6.10. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriels de $(E, +, \bullet)$. Si E et F sont de dimensions finies et égales. Alors $E = F$.

Preuve

à faire en exercice

□

Exemple 2.6.6. Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ engendré par l'ensemble $\{(1, 1, 0), (2, 2, 0)\}$ est dimension fini égal à 1.

Exemple 2.6.7. Le sous-espace de $(\mathbb{R}^3, +, \bullet)$ engendré par l'ensemble $\{(1, 1, 0), (2, 1, 0)\}$ est dimension fini égal à 2.

Algorithme 2.6.1. Soient n un entier positif dans \mathbb{N} . Soit $(u_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{K}^n)^n$ une famille de n vecteurs de \mathbb{K}^n .

On note $u_{i,j}$ la j -ième coordonnée du i -ième vecteur de la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$. L'algorithme suivant permet de décider si $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, ou liée.

Prendre $p \leftarrow 0$.

1. si $p = n$ alors la famille est une base.
2. si $p < n$ et si pour tout k tel que $p < k \leq n$, on ait $u_{k,p+1} = 0$ alors la famille n'est pas une base.
3. sinon, prendre k le plus petit entier strictement supérieur à p tel que $u_{k,p+1} \neq 0$.
4. Multiplier le vecteur u_k par l'inverse de $u_{k,p+1}$.
5. Soustraire à chaque vecteur $u_{k'}$ pour $k' \neq k$ le vecteur u_k multiplié par $u_{k,p+1}$.
6. Permuter le vecteur u_{p+1} et u_k .
7. Prendre $p \leftarrow p + 1$.
8. Retourner à l'étape 1.

Preuve Toutes les transformations préservent le fait d'être une base. On peut montrer, par récurrence, qu'à l'étape 1 $u_{k,l} = 0$ pour tout k, l tels que $k \neq l$, $1 \leq k \leq p$, $1 \leq l \leq n$. Donc si $p = n$, on reconnaît l'exemple 2.6.2. Si le test de la seconde étape échoue, la famille n'est pas génératrice, donc elle n'est pas une base. Enfin, toutes les étapes de transformation préservent le fait d'être une base.

□

Exemple 2.6.8. On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une

base, ou non. La famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (-1, 1, 0) \\ (1, 1, 1) \end{pmatrix}$ est une base

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 2, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$$

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 1) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)

Or cette dernière famille est une base (c'est l'exemple 2.6.2).

Donc la famille $((1, 1, 0), (-1, 1, 0), (1, 1, 1))$ est une base.

Exemple 2.6.9. On utilise l'algorithme 2.5.1 pour savoir si la famille $((1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 2))$ est une

base, ou non. La famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 1) \\ (-1, 1, -1) \\ (2, 0, 2) \end{pmatrix}$ est une base

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 1) \\ (0, 2, 0) \\ (0, -2, 0) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant les transformations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2 \cdot L_1)$$

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 1, 1) \\ (0, 1, 0) \\ (0, -2, 0) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_2 \leftarrow L_2/2$)

si et seulement si la famille $\begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (0, 1, 0) \\ (0, 0, 0) \end{pmatrix}$ est une base (en utilisant la transformation $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$)

Or cette dernière famille n'est pas une base car elle n'est pas libre (par la propriété 2.4.1).

Donc la famille $((1, 1, 1), (-1, 1, -1), (2, 0, 2))$ n'est pas une famille génératrice, puis ce n'est pas une base.

3 Applications linéaires

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 (Applications linéaires). Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ est une fonction ϕ de E dans F qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. (additivité) $\forall u, v \in E$, on a : $\phi(u +_E v) = \phi(u) +_F \phi(v)$;
2. (homogénéité) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in E$, on a : $\phi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \phi(u)$.

L'ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ est noté $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 3.1.2 (Homomorphismes). Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une application linéaire de $(E, +, \bullet)$ dans $(E, +, \bullet)$ dans lui même est appelée un homomorphisme.

L'ensemble des homomorphismes de $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.

Définition 3.1.3 (Isomorphismes). Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

L'ensemble des isomorphismes entre un espace vectoriel $(E, +_E, \bullet_E)$ et un autre $(F, +_F, \bullet_F)$ est noté $\text{Isom}(E, F)$.

Définition 3.1.4 (Automorphismes). Un automorphisme est un homomorphisme bijectif. L'ensemble des automorphismes d'un espace linéaire $(E, +, \bullet)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$.

Définition 3.1.5 (Forme linéaire). Une application linéaire d'un espace dans l'espace $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est appelée une forme linéaire.

Exemple 3.1.1. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Alors la fonction ϕ de E dans F qui associe à tout vecteur $u \in E$ le vecteur 0_F est une application linéaire.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Alors la fonction ϕ de E dans F qui associe à tout vecteur $u \in E$ le vecteur 0_F .

– ϕ est une fonction de E dans F .

– Soient $u, v \in E$. On a : $\phi(u +_E v) = 0_F$, puis $0_F = 0_F +_F 0_F$, et $0_F +_F 0_F = \phi(u) +_F \phi(v)$. Donc $\phi(u +_E v) = \phi(u) +_F \phi(v)$.

– Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a : $\phi(\lambda \bullet_E u) = 0_F$, puis $0_F = \lambda \bullet_F 0_F$, et $\lambda \bullet_F 0_F = \lambda \bullet \phi(u)$. Donc $\phi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \phi(u)$.

□

Exemple 3.1.2. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors la fonction Id_E est un automorphisme de E .

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

– La fonction Id_E est une fonction de E dans E .

– La fonction Id_E est une bijection.

– Soit $u \in E, v \in E$,

on a : $Id_E(u + v) = u + v$; or $Id_E(u) = u$ et $Id_E(v) = v$. et $\lambda \in \mathbb{K}$; donc $Id_E(u + v) = Id_E(u) + Id_E(v)$.

– Soit $u \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$,

on a : $Id_E(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet u$; or $Id_E(u) = u$; donc $Id_E(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet Id_E(u)$.

Donc $Id_E \in \mathcal{GL}(E)$.

□

Exemple 3.1.3. La fonction ϕ définie par :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K}^2 \\ (x, y) & \mapsto (y, x) \end{cases}$$

est un automorphisme de $(\mathbb{K}^2, +, \bullet)$

Exemple 3.1.4. La fonction ϕ définie par :

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto x + 2 \cdot y \end{cases}$$

est une forme linéaire de \mathbb{K}^2 .

Exemple 3.1.5. La fonction $diff$ définie par :

$$diff : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ f & \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{\delta f(t)}{\delta t}, \end{cases} \end{cases}$$

est une application linéaire de l'espace des fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de l'addition et du produit externe point à point, dans l'espace des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} muni de l'addition et du produit externe point à point.

Exemple 3.1.6. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . La fonction \int_I de l'espace des fonctions de I dans \mathbb{R} intégrables muni de l'addition et du produit externe point à point dans l'espace $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, et qui associe à toute fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ intégrable, le réel $\int_I f$, est une application linéaire.

Exemple 3.1.7. Toute fonction ϕ de \mathbb{Q} dans \mathbb{Q} , qui vérifie $\phi(q + q') = \phi(q) + \phi(q')$ est une forme linéaire.

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 3.1.1. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et ϕ une fonction de E dans F . Alors $\phi(0_E) = 0_F$.

Preuve Soit $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels.

On a, par la propriété 2.1.1, $0_E = 0 \bullet_E 0_E$.

Puis $\phi(0_E) = \phi(0 \bullet_E 0_E)$.

Et par la définition 3.1.1.(2), $\phi(0_E) = 0 \bullet_F \phi(0_E)$.

Puis par la propriété 2.1.1, $0 \bullet_F \phi(0_E) = 0_F$.

Donc $\phi(0_E) = 0_F$.

□

Propriété 3.1.2. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et ϕ une fonction de E dans F . Soit $u \in E$, Alors $\phi(-_E u) = -_F \phi(u)$.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et ϕ une fonction de E dans F . Soit $u \in E$.

Par la définition 2.1.1.(1), on a $u +_E (-_E u) = 0_E$.

Or, comme $u +_E (-_E u) = 0_E$ et par la propriété 3.1.1, $\phi(u +_E (-_E u)) = 0_F$.

D'autre part, par la définition 3.1.1.(1), on a : $\phi(u +_E (-_E u)) = \phi(u) +_F \phi(-_E u)$.

D'où : $\phi(u) +_F \phi(-_E u) = 0_F$.

Donc par la définition 2.1.1.(1), $-_F \phi(u) = \phi(-_E u)$.

□

Propriété 3.1.3. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et ϕ une fonction de E dans F . Alors ϕ est une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$ si et seulement si, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, tout couple de vecteurs $(u, v) \in E^2$, on a : $\phi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \phi(u) +_F \lambda \bullet_F \phi(v)$.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit ϕ une fonction de E dans F .

- (\Rightarrow) On suppose que ϕ est une application linéaire.

Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par la définition 3.1.1.(1), on a : $\phi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \phi(u) +_F \phi(\lambda \bullet_E v)$.

Par la définition 3.1.1.(2), on a : $\phi(\lambda \bullet_E v) = \lambda \bullet_F \phi(v)$.

Puis, $\phi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \phi(u) +_F \lambda \bullet_F \phi(v)$.

- (\Leftarrow) On suppose que ϕ satisfait $\phi(u +_E \lambda \bullet_E v) = \phi(u) +_F \lambda \bullet_F \phi(v)$, pour tout $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Soient u et v deux vecteurs de E .

On a, par la définition 2.1.1.(3d), $v = 1 \bullet_E v$.

Puis, $\phi(u +_E v) = \phi(u +_E 1 \bullet_E v)$.

Puis par hypothèse, $\phi(u +_E 1 \bullet_E v) = \phi(u) +_F 1 \bullet_F \phi(v)$.

Or, par la définition 2.1.1.(3d), $\phi(v) = 1 \bullet_F \phi(v)$.

Puis, $\phi(u) +_F 1 \bullet_F \phi(v) = \phi(u) +_F \phi(v)$.

Donc, $\phi(u +_E v) = \phi(u) +_F \phi(v)$.

2. Soit $u \in E$ un vecteur et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

On a : par la définition 2.1.1.(1), $\lambda \bullet_E u = 0_E +_E \lambda \bullet_E u$.

D'où, $\phi(\lambda \bullet_E u) = \phi(0_E +_E \lambda \bullet_E u)$.

Puis, par hypothèse, $\phi(0_E +_E \lambda \bullet_E u) = \phi(0_E) +_F \lambda \bullet_F \phi(u)$.

Puis, par la propriété 3.1.1, on a $\phi(0_E) = 0_F$.
 Donc, $\phi(0_E +_E \lambda \bullet_E u) = 0_F +_F \lambda \bullet_F \phi(u)$.
 Or par la définition 2.1.1.(1), $0_F +_F \lambda \bullet_F \phi(u) = \lambda \bullet_F \phi(u)$.
 Puis, $\phi(\lambda \bullet_E u) = \lambda \bullet_F \phi(u)$.

□

Propriété 3.1.4. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$. Alors, ϕ est injective si et seulement si pour tout vecteur $u \in E$ tel que $\phi(u) = 0_F$, on a : $u = 0_E$.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$.

– (\Rightarrow) On suppose que ϕ est injective.

Soit $u \in E$ tel que $\phi(u) = 0_F$.

On sait, par la propriété 3.1.1, que : $\phi(0_E) = 0_F$.

On a donc $x \in E$ et $0_E \in E$ et $\phi(u) = \phi(0_E)$.

Puis comme ϕ est injective, $u = 0_E$.

– (\Leftarrow) On suppose que pour tout $u \in E$ tel que $\phi(u) = 0_F$, on a : $u = 0_E$.

Montrons que ϕ est injective :

Soient $x, y \in E$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$. On a : $\phi(x) -_F \phi(y) = 0_F$.

Puis, par la propriété 3.1.2, $-_F \phi(y) = \phi(-_E y)$.

Donc, $\phi(x) +_F \phi(-_E y) = 0_F$.

Puis, par la définition 3.1.1.(1), $\phi(x -_E y) = 0_F$.

Donc par hypothèse, $x -_E y = 0_E$.

Puis $x = y$.

□

Propriété 3.1.5. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel. Alors $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la composition.

Preuve Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

– Montrons que la composition \circ est une loi interne sur $\mathcal{GL}(E)$. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{GL}(E)$.

– $\phi \circ \psi$ est une fonction de E dans E comme composition de fonctions de E dans E .

– $\phi \circ \psi$ est une bijection comme composition de bijections.

– Soient $u \in E$, $v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$[\phi \circ \psi](u + \lambda \bullet v) = \phi(\psi(u + \lambda \bullet v)) \text{ (par définition de la composition)}$$

$$[\phi \circ \psi](u + \lambda \bullet v) = \phi(\psi(u)) + \lambda \bullet \phi(\psi(v)) \text{ (par la propriété 3.1.3)}$$

$$[\phi \circ \psi](u + \lambda \bullet v) = [\phi \circ \psi](u) + \lambda \bullet [\phi \circ \psi](v) \text{ (par définition de la composition)}$$

Puis, par la propriété 3.1.3, la fonction $\phi \circ \psi$ est une application linéaire.

Donc $\phi \circ \psi \in \mathcal{GL}(E)$.

– Soit $\phi, \psi, \xi \in \mathcal{GL}(E)$.

Montrons que $[\phi \circ \psi] \circ \xi = \phi \circ [\psi \circ \xi]$.

$[\phi \circ \psi] \circ \xi$ et $\phi \circ [\psi \circ \xi]$ sont deux fonctions de E dans E .

De plus, pour $u \in E$, on a :

$$[[\phi \circ \psi] \circ \xi](u) = [\phi \circ \psi](\xi(u))$$

$$[[\phi \circ \psi] \circ \xi](u) = \phi(\psi(\xi(u)))$$

$$[[\phi \circ \psi] \circ \xi](u) = \phi([\psi \circ \xi](u))$$

$$[[\phi \circ \psi] \circ \xi](u) = [\phi \circ [\psi \circ \xi]](u)$$

Donc $[\phi \circ \psi] \circ \xi = \phi \circ [\psi \circ \xi]$.

– D’après l’exemple 3.1.2, la fonction $Id_E \in \mathcal{GL}(E)$. De plus, on sait que : $\phi \in \mathcal{GL}(E)$, on a : $\phi \circ Id_E = \phi$ et $Id_E \circ \phi = \phi$.

– Soit $\phi \in \mathcal{GL}(E)$. On a $\phi \circ \phi^{-1} = Id_E$ et $\phi^{-1} \circ \phi = Id_E$. Montrons que $\phi^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$.

– ϕ^{-1} est une bijection de E dans E .

– Soit $u \in E$, soit $v \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a :

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(u + \lambda \bullet v) &= \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(u)) + \lambda \bullet \phi(\phi^{-1}(v))) && \text{car } \phi \circ \phi^{-1} = Id_E \\ \phi^{-1}(u + \lambda \bullet v) &= \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(u) + \lambda \bullet \phi^{-1}(v))) && \text{par la propriété 3.1.3} \\ \phi^{-1}(u + \lambda \bullet v) &= \phi^{-1}(u) + \lambda \bullet \phi^{-1}(v) && \text{car } \phi^{-1} \circ \phi = Id_E \end{aligned}$$

□

Propriété 3.1.6. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Alors l’ensemble des applications linéaires de $(E, +_E, \bullet_E)$ dans $(F, +_F, \bullet_F)$, muni de la somme $+_F$ point à point et du produit externe \bullet_F point à point, est un espace vectoriel.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Montrons que $(\mathcal{L}(E, F), +_F, \bullet_F)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{F}(E, F), +_F, \bullet_F)$.

– Par l’exemple 2.1.3, $(\mathcal{F}(E, F), +_F, \bullet_F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

– On a : $\mathcal{L}(E, F) \subseteq \mathcal{F}(E, F)$.

– Par l’exemple 3.1.1, la fonction constante de E dans F , qui à tout élément $u \in E$ associe 0_F est une application linéaire de E dans F .

– Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\phi +_F \psi$ est une fonction de E dans F .

De plus, pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} [\phi +_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) &= \phi(u +_E \lambda \bullet_E v) +_F \psi(u +_E \lambda \bullet_E v) \\ [\phi +_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) &= \phi(u) +_F \lambda \bullet_F \phi(v) +_F \psi(u) +_F \lambda \bullet_F \psi(v) && \text{(par la propriété 3.1.3)} \\ [\phi +_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) &= \phi(u) +_F \psi(u) +_F \lambda \bullet_F (\phi(v) +_F \psi(v)) \\ [\phi +_F \psi](u +_E \lambda \bullet_E v) &= [\phi +_F \psi](u) +_F \lambda \bullet_F [\phi +_F \psi](v) \end{aligned}$$

– Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \bullet_F \phi$ est une fonction de E dans F .

De plus, pour $u, v \in E$ et $\mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned} [\lambda \bullet_F \phi](u +_E \mu \bullet_E v) &= \lambda \bullet_F \phi(u +_E \mu \bullet_E v) \\ [\lambda \bullet_F \phi](u +_E \mu \bullet_E v) &= \lambda \bullet_F (\phi(u) +_F \mu \bullet_F \phi(v)) && \text{(par la propriété 3.1.3)} \\ [\lambda \bullet_F \phi](u +_E \mu \bullet_E v) &= \lambda \bullet_F \phi(u) +_F \mu \bullet_F (\lambda \bullet_F (\phi(v))) \\ [\lambda \bullet_F \phi](u +_E \mu \bullet_E v) &= [\lambda \bullet_F \phi](u) +_F \mu \bullet_F [\lambda \bullet_F \phi](v) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$. Puis, d’après la propriété 2.2.2, $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

□

3.2 Image des familles de vecteurs

Propriété 3.2.1. L’image d’une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, soit ϕ une application linéaire injective entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$, soient I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre d’éléments

de E indexée par I .

Soit $J \subseteq I$ un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in F^J$ une famille de scalaires indexée par J et tel que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \phi(u_j) = 0_F.$$

On a, par linéarité, $\phi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j) = 0_F$.

Puis par la propriété 3.1.1, $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j = 0_E$.

Puis par la définition 2.4.1, pour tout $j \in J$, $\lambda_j = 0$.

Donc la famille $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est libre.

□

Propriété 3.2.2. Une application linéaire entre deux \mathbb{K} -espaces vectoriels $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ est injective si et seulement si l'image de toute famille libre (de E) est une famille libre (de F).

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

– (\Rightarrow) On suppose que ϕ est injective.

Soit I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille libre.

Alors par la propriété 3.2.1, $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est une famille libre de F .

– (\Leftarrow) On suppose que, pour tout ensemble I et toute famille libre $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ d'éléments de E indexée par I , la famille $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est libre.

Montrons que ϕ est injective.

Soient $u \in E$ tels que $\phi(u) = 0_F$. Il faut montrer que $u = 0_E$.

Par l'absurde, on suppose que $u \neq 0_E$.

La famille (u) serait donc une famille libre.

Puis par hypothèse, la famille $(\phi(u))$ serait une famille libre.

Puis, par la propriété 2.4.1, $\phi(u) \neq 0_F$ (ce qui est absurde).

Donc $u = 0_E$.

□

Propriété 3.2.3. Si l'image d'une base par une application linéaire est libre, alors cette application linéaire est injective.

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 3.2.4. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est une famille génératrice.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, soit ϕ une application linéaire surjective entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$, soient I un ensemble et $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ une famille génératrice de E indexée par I .

Soit $u \in F$.

Comme ϕ est surjective, prenons $v \in E$ tel que $u = \phi(v)$.

Comme $(u_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , il existe un sous-ensemble fini $J \subseteq I$ et une famille $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ de scalaires indexée par J , telle que $\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j = v$.

Puis $\phi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j) = \phi(v)$.

D'où $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \phi(u_j)$.

Ainsi, $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .

□

Propriété 3.2.5. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F . Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est surjective ;
2. L'image de chaque famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$;
3. Il existe une famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F .

- (1. \Rightarrow 2.) D'après la propriété 3.2.4, si ϕ est surjective, alors l'image de chaque famille génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une famille génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$.
- (2. \Rightarrow 3.) On suppose que l'image de chaque famille génératrice E est une famille génératrice de F . La famille $(u)_{u \in E}$ est une famille génératrice de E , donc son image est une famille génératrice de F .
- (3. \Rightarrow 1.) On suppose qu'il existe une famille $(u_i)_{i \in I} \in E^I$ génératrice de E indexée par un ensemble I , telle que la famille $(\phi(u_i))_{i \in I}$ soit une famille génératrice de F .

Montrons que ϕ est surjective.

Soit $u \in F$,

$(\phi(u_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F .

Donc soit J un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ une famille de scalaires indexée par J et tel que $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \phi(u_j)$.

On a donc, par linéarité, $u = \phi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j)$.

Ainsi ϕ est surjective.

□

Théorème 3.2.1. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F . On suppose, de plus, qu'il existe une base de E^3 . Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\phi \in \text{Isom}(E, F)$;
2. L'image de chaque base de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$;
3. Il existe une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F . On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ admet une base.

- (1. \Rightarrow 2.) On suppose que ϕ est bijective.
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une base de E indexée par un ensemble I .
La famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre et ϕ est injective. Donc par la propriété 3.2.1, la famille $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est libre. De plus, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice et ϕ est surjective. Donc la propriété 3.2.4, la famille $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est génératrice.
Ainsi, la famille $(\phi(u_i))_{i \in I}$ est une base.
- (2. \Rightarrow 3.) On suppose que l'image de chaque base de $(E, +_E, \bullet_E)$ par ϕ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Or on a supposé qu'il existait une base de $(E, +_E, \bullet_E)$. Donc il existe une base de $(E, +_E, \bullet_E)$ dont l'image par ϕ est une base de $(F, +_F, \bullet_F)$.
- (3. \Rightarrow 1.) On suppose qu'il existe une base $(b_i)_{i \in I} \in E^I$ de $(E, +_E, \bullet_E)$ indexée par un ensemble I , telle que la famille $(\phi(b_i))_{i \in I}$ soit une base de $(F, +_F, \bullet_F)$. Montrons que ϕ est un isomorphisme.

- La famille $(b_i)_{i \in I}$ est génératrice de $(E, +_E, \bullet_E)$ et la famille $(\phi(b_i))_{i \in I}$ est génératrice de $(F, +_F, \bullet_F)$, donc par la propriété 3.2.5, ϕ est une fonction surjective.
Montrons que ϕ est injective.

3. C'est toujours vrai, mais on ne l'a prouvé que si $(E, +_E, \bullet_E)$ admet une famille génératrice finie.

- Soit $u \in E$, tel que $\phi(u) = 0_F$.
 Comme $(b_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice, on peut choisir K un sous-ensemble fini de I et $(\lambda_k)_{k \in K} \in \mathbb{K}^K$ une famille de scalaires indexée par K , tel que $u = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_F b_k$.
 Puis $\phi(u) = \phi(\sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_F b_k)$.
 Puis $0_F = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_F \phi(b_k)$.
 Or $(\phi(b_i))_{i \in I}$ est une famille libre, donc pour $k \in K$, $\lambda_k = 0$.
 Or $u = \sum_{k \in K} \lambda_k \bullet_E b_k$, puis $u = 0_E$.

Donc $u = 0_E$ et ϕ est injective.

Puis ϕ est un isomorphisme entre $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$.

□

Théorème 3.2.2. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de E dans F . Si pour tout indice $i \in I$, $\phi(u_i) = \psi(u_i)$, alors $\phi = \psi$.

Preuve Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit I un ensemble d'indices et $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E . Soient $\phi, \psi \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires de E dans F telles que pour tout indice $i \in I$, $\phi(u_i) = \psi(u_i)$.

ϕ et ψ sont deux fonctions de E dans F .

De plus, pour $u \in E$,

comme la famille $(u_i)_{i \in I}$ est génératrice, il existe un sous-ensemble $J \in I$ et une famille de scalaires $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbb{K}^J$ tel que : $u = \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j$;

puis

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \phi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j) \\ \phi(u) &= \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \phi(u_j) \\ \phi(u) &= \sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_F \psi(u_j) \\ \phi(u) &= \psi(\sum_{j \in J} \lambda_j \bullet_E u_j) \\ \phi(u) &= \psi(u). \end{aligned}$$

Ainsi $\phi = \psi$.

□

Théorème 3.2.3. Soit $(E, +, \bullet)$ un \mathbb{K} espace vectoriel de dimension n , alors il existe un isomorphisme entre $(E, +, \bullet)$ et $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$.

Preuve

à faire en exercice

□

3.3 Noyau, Image et dimension

Définition 3.3.1 (Noyau). Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F .

On définit le noyau de ϕ , $Ker(\phi)$ par :

$$Ker(\phi) \triangleq \{x \in E \mid \phi(x) = 0_F\}.$$

Propriété 3.3.1. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F . Alors $Ker(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +_E, \bullet_E)$.

Preuve

à faire en exercice

□

Définition 3.3.2 (Image). Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F .

On définit l'image de ϕ , $Im(\phi)$ par :

$$Im(\phi) \triangleq \{\phi(x) \in F \mid x \in E\}.$$

Propriété 3.3.2. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F . Alors $Im(\phi)$ est un sous-espace vectoriel de $(F, +_F, \bullet_F)$.

Preuve

à faire en exercice

□

Théorème 3.3.1. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire entre E et F . On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension finie. Alors,

$$\dim(E) = \dim(Ker(\phi)) + \dim(Im(\phi))$$

Preuve

à faire en exercice

□

Corollaire 3.3.1. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. Si E ou F est de dimension finie et s'il existe un isomorphisme $\phi \in Isom(E, F)$, alors E et F sont de dimensions finies et égales.

Preuve

à faire en exercice

□

Corollaire 3.3.2. Soient $(E, +_E, \bullet_E)$ et $(F, +_F, \bullet_F)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels. On suppose que $(E, +_E, \bullet_E)$ est de dimension finie. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F .

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. ϕ est un isomorphisme ;
2. ϕ est injectif et $\dim E = \dim F$;
3. ϕ est surjectif et $\dim E = \dim F$.

Preuve

à faire en exercice

□

Fin de la 5^e semaine.

4 Matrices

4.1 Algèbre des matrices

Définition 4.1.1 (matrice). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On appelle une matrice d'éléments de \mathbb{K} à m lignes et à n colonnes une famille d'éléments $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ de \mathbb{K} indexée par les couple (i, j) où i varie entre 1 et m , et j varie entre 1 et n .

On dit aussi que $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une matrice de taille $m \times n$.

On note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de tailles $m \times n$ d'élément de \mathbb{K} .

Enfin, lorsque $m = n$, on dit que les matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont carrés de taille m .

Définition 4.1.2 (ligne). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit i_0 un entier entre 1 et m . On appelle i_0 -ième ligne de A , la famille de n éléments de \mathbb{K} $(a_{i_0,j})_{1 \leq j \leq n}$.

Définition 4.1.3 (colonne). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Soit j_0 un entier entre 1 et n . On appelle j_0 -ième colonne de A , la famille de m éléments de \mathbb{K} $(a_{i,j_0})_{1 \leq i \leq m}$.

Notation 4.1.1. On note habituellement les éléments d'une matrice sous forme de tableau. Par exemple, la matrice de taille 3×3 et d'éléments $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$ sera notée :

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

Définition 4.1.4 (somme). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B \triangleq (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la somme des deux matrices A et B . On la note $A + B$.

Exemple 4.1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 14 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

Définition 4.1.5 (produit externe). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(\lambda \cdot a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée le produit de la matrice A par le scalaire λ . On la note $\lambda \cdot A$.

Exemple 4.1.2.

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 20 & 4 & -2 \\ 10 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

Définition 4.1.6. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit k un entier entre 1 et m et soit k' un entier entre 1 et n . On note $E_{k,k'} \triangleq (\delta_i^k \cdot \delta_j^{k'})$ la matrice de taille $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls, sauf dans la case à la ligne k et à la colonne k' dans laquelle la valeur est 1.

Propriété 4.1.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $m \cdot n$. De plus, la famille des matrices élémentaire $(E_{i,j}^{m,n})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est une base de $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Preuve On sait, d'après l'exemple 2.1.1 que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Puis par l'exemple 2.1.3, $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. La famille $(E_{i,j})$ est une base car, d'après l'exemple 2.6.1, la famille (1) est une base de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ et d'après l'exemple 2.6.4.

□

Définition 4.1.7 (produit interne). Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B \triangleq (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq o}$. La matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ définie par :

$$c_{i,j} \triangleq \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot b_{k,j},$$

pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq o$, est appelée le produit entre A et B , et est notée $A \times B$.

Exemple 4.1.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 10 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 8 & 3 \\ 22 & 18 & 19 \\ 66 & 20 & 4 \end{bmatrix}$$

Preuve

		3	4	5
		10	2	-1
1	2	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 10$	$1 \cdot 4 + 2 \cdot 2$	$1 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)$
4	1	$3 \cdot 3 + 1 \cdot 10$	$3 \cdot 4 + 1 \cdot 2$	$1 \cdot 5 + 1 \cdot (-1)$
2	6	$2 \cdot 3 + 6 \cdot 10$	$2 \cdot 4 + 6 \cdot 2$	$1 \cdot 5 + 6 \cdot (-1)$

□

Propriété 4.1.2. Soient $m, n, o, p \in \mathbb{N}$ quatre entiers. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{o,p}(\mathbb{K})$ trois matrices à valeur dans \mathbb{K} .

Alors :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.1.3. Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . La fonction $\phi : \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ de taille $n \times o$ à valeur dans \mathbb{K} associe la matrice $A \times B$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Preuve

à faire en exercice

□

Définition 4.1.8 (transposée). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. La matrice $(a_{j,i})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m}$ est une matrice de taille $n \times m$ d'éléments de \mathbb{K} . Cette matrice est appelée la transposée de A et est noté ${}^T A$.

Exemple 4.1.4. On a :

$${}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.1.4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soient i un entier entre 1 et m et j un entier entre 1 et n . Alors ${}^T E_{i,j}^{m,n} = E_{j,i}^{n,m}$.

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.1.5. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ qui à chaque matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} associe sa transposée est un isomorphisme entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.1.6. Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers positifs. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles $m \times n$ et $n \times o$, et d'éléments de \mathbb{K} . Alors, on a :

$${}^T(M \times N) = {}^T N \times {}^T M.$$

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.1.7. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans \mathbb{K} et de taille $m \times n$. Alors, on a :

$${}^T({}^T A) = A.$$

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.1.8. Soient $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times o$ à valeur dans \mathbb{K} . La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} associe la matrice $B \times A$ est une application linéaire entre $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ et $(\mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.

Preuve Soit $m, n, o \in \mathbb{N}$ trois entiers naturels. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,o}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times o$ à valeur dans \mathbb{K} . La fonction $\phi : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,o}(\mathbb{K})$ qui à toute matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} associe la matrice $B \times A$. Soient $B, B' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ deux matrices de tailles $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} (B + \lambda \cdot B') \times A &= {}^T({}^T((B + \lambda \cdot B') \times A)) && \text{(par la propriété 4.1.7)} \\ (B + \lambda \cdot B') \times A &= {}^T({}^T A \times {}^T(B + \lambda \cdot B')) && \text{(par la propriété 4.1.6)} \\ (B + \lambda \cdot B') \times A &= {}^T({}^T A \times ({}^T B + \lambda \cdot ({}^T B'))) && \text{(par la propriété 4.1.5)} \\ (B + \lambda \cdot B') \times A &= {}^T({}^T A \times {}^T B + \lambda \cdot ({}^T A \times {}^T B')) && \text{(par la propriété 4.1.3)} \\ (B + \lambda \cdot B') \times A &= {}^T({}^T(B \times A) + \lambda \cdot {}^T(B' \times A)) && \text{(par la propriété 4.1.6)} \\ (B + \lambda \cdot B') \times A &= {}^T({}^T(B \times A)) + \lambda \cdot {}^T({}^T(B' \times A)) && \text{(par la propriété 4.1.5)} \\ (B + \lambda \cdot B') \times A &= B \times A + \lambda \cdot B' \times A && \text{(par la propriété 4.1.7)} \end{aligned}$$

Donc ϕ est une application linéaire.

□

4.2 Transformations élémentaires

4.2.1 Matrice identité

Définition 4.2.1 (identité). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. On note $I_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice carrée $(\delta_i^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

Exemple 4.2.1. Par exemple, on a :

$$I_{3,4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriété 4.2.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = I_{m,m} \times A$.

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. On note $I_{m,m} \times A \triangleq (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Soit $i \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et m , et $j \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et n .

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^m \delta_k^i \cdot a_{k,j}.$$

On a i entre 1 et m , la somme s'annule partout sauf, pour $k = i$.

$$b_{i,j} = a_{i,j}.$$

□

Propriété 4.2.2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a : $A = A \times I_{n,n}$.

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. On note $A \times I_{n,n} \triangleq (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Soit $i \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et m , et $j \in \mathbb{N}$ un entier entre 1 et n .

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot \delta_j^k.$$

On a j entre 1 et n , la somme s'annule partout sauf, pour $k = j$.

$$b_{i,j} = a_{i,j}.$$

□

Propriété 4.2.3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \leq n$, alors $I_{m,n} \times I_{n,m} = I_{m,m}$.

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \leq n$.

On note $I_{m,n} \times I_{n,m} \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$.

Soit i, j deux entiers entre 1 et m .

On a : $a_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_i^k \cdot \delta_k^j$.

1. si $i = j$, alors la somme s'annule partout, sauf pour $k = i$. Puis $a_{i,j} = 1$.

2. sinon, la somme s'annule partout. Puis $a_{i,j} = 0$.

□

4.2.2 Permutation de lignes et de colonnes

Définition 4.2.2 (matrice de permutation). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k et k' deux entiers entre 1 et n . On note $\text{SWAP}_n(k, k')$ la matrice $\text{I}_{n,n} - \text{E}_{k,k}^{n,n} - \text{E}_{k',k'}^{n,n} + \text{E}_{k,k'}^{n,n} + \text{E}_{k',k}^{n,n}$.

Exemple 4.2.2. Par exemple :

$$\text{SWAP}_3(2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n . On a :

$${}^T(\text{SWAP}_n(k, k')) = \text{SWAP}_n(k, k').$$

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n . On a :

$$\begin{aligned} {}^T(\text{SWAP}_n(k, k')) &= {}^T(\text{I}_{n,n} - \text{E}_{k,k}^{n,n} - \text{E}_{k',k'}^{n,n} + \text{E}_{k,k'}^{n,n} + \text{E}_{k',k}^{n,n}) \\ {}^T(\text{SWAP}_n(k, k')) &= {}^T\text{I}_{n,n} - {}^T\text{E}_{k,k}^{n,n} - {}^T\text{E}_{k',k'}^{n,n} + {}^T\text{E}_{k,k'}^{n,n} + {}^T\text{E}_{k',k}^{n,n} \\ {}^T(\text{SWAP}_n(k, k')) &= \text{I}_{n,n} - \text{E}_{k,k}^{n,n} - \text{E}_{k',k'}^{n,n} + \text{E}_{k,k'}^{n,n} + \text{E}_{k',k}^{n,n} \\ {}^T(\text{SWAP}_n(k, k')) &= \text{SWAP}_n(k, k'). \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.5 (permutation de lignes). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et m . Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . Alors la matrice $\text{SWAP}_m(k, k') \times A$ est la matrice dont la l -ième ligne est la l -ième ligne de A pour $l \notin \{k, k'\}$, la k -ième ligne est la k' -ième ligne de A , et la k' -ième ligne est la k -ième ligne de A .

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et m . Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m (\text{SWAP}_m(k, k'))_{i,l} \cdot a_{l,j} \\ (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m (\delta_i^l - \delta_i^k \cdot \delta_l^k - \delta_l^{k'} \cdot \delta_i^{k'} + \delta_i^{k'} \cdot \delta_l^k + \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'}) \cdot a_{l,j} \end{aligned}$$

Puis :

1. pour $i \notin \{k, k'\}$:

$$\delta_i^l - \delta_i^k \cdot \delta_l^k - \delta_l^{k'} \cdot \delta_i^{k'} + \delta_i^{k'} \cdot \delta_l^k + \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'} = \delta_i^l.$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m \delta_i^l \cdot a_{l,j} ; \\ (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{i,j} &= a_{i,j} \end{aligned}$$

2. pour $i = k$ et $i \neq k'$:

$$\delta_k^l - \delta_l^k + \delta_l^{k'} = \delta_l^{k'}$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{k,j} &= \sum_{l=1}^m \delta_l^{k'} \cdot a_{l,j} ; \\ (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{k,j} &= a_{k',j} \end{aligned}$$

3. pour $i = k'$ et $i \neq k$:

$$\delta_{k'}^l - \delta_l^{k'} + \delta_l^k = \delta_l^k$$

Puis :

$$(\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{k',j} = a_{k,j}$$

4. pour $i = k'$ et $i = k$:

$$\delta_k^l - \delta_l^k - \delta_i^{k'} + \delta_i^k + \delta_i^{k'} = \delta_k^l$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{k,j} &= a_{k,j} \\ (\text{SWAP}_m(k, k') \times A)_{k',j} &= a_{k',j} \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.6 (permutation de colonnes). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n . Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . Alors la matrice $A \times \text{SWAP}_n(k, k')$ est la matrice dont la l -ième colonne est la l -ième colonne de A pour $l \notin \{k, k'\}$, la k -ième colonne est la k' -ième colonne de A , et la k' -ième colonne est la k -ième colonne de A .

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers compris entre 1 et m . Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} .

On a : ${}^T(A \times \text{SWAP}_n(k, k')) = \text{SWAP}_n(k, k') \times {}^T A$.

Donc la transposée de $A \times \text{SWAP}_n(k, k')$ est la transposée de A donc on a permuté les lignes k et k' .

Puis $A \times \text{SWAP}_n(k, k')$ est la matrice A dans laquelle on a permuté les colonnes k et k' .

□

Exemple 4.2.3.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Propriété 4.2.7. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Soient k, k' deux entiers compris entre 1 et n . On a :

$$(\text{SWAP}_n(k, k'))^2 = I_{n,n}$$

4.2.3 Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire

Définition 4.2.3 (matrice de dilatation). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k un entier entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On note $\text{DILAT}_n(k, \lambda)$ la matrice $I_{n,n} + (\lambda - 1) \cdot E_{k,k}^{n,n}$.

Exemple 4.2.4. Par exemple,

$$\text{DILAT}_3(2, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.8. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k un entier compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On a : ${}^T(\text{DILAT}_n(k, \lambda)) = \text{DILAT}_n(k, \lambda)$.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k un entier compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. On a :

$$\begin{aligned} {}^T(\text{DILAT}_n(k, \lambda)) &= {}^T(I_{n,n} + (\lambda - 1) \cdot E_{k,k}^{n,n}) \\ {}^T(\text{DILAT}_n(k, \lambda)) &= {}^T(I_{n,n}) + {}^T((\lambda - 1) \cdot E_{k,k}^{n,n}) \\ {}^T(\text{DILAT}_n(k, \lambda)) &= {}^T(I_{n,n}) + (\lambda - 1) \cdot {}^T E_{k,k}^{n,n} \\ {}^T(\text{DILAT}_n(k, \lambda)) &= I_{n,n} + (\lambda - 1) \cdot E_{k,k}^{n,n} \\ {}^T(\text{DILAT}_n(k, \lambda)) &= \text{DILAT}_n(k, \lambda) \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.9 (dilatation de lignes). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k un entier compris entre 1 et m et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . Alors la matrice $\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A$ est la matrice dont la l -ième ligne est la l -ième ligne de A pour $l \neq k$, la k -ième ligne est la k -ième ligne de A multipliée par le scalaire λ .

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k un entier compris entre 1 et m et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m (\text{DILAT}_m(k, \lambda))_{i,l} \cdot a_{l,j} \\ (\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m (\delta_i^l + (\lambda - 1) \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^k) \cdot a_{l,j} \end{aligned}$$

Puis :

1. pour $i \neq k$:

$$\delta_i^l + (\lambda - 1) \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^k = \delta_i^l.$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m \delta_i^l \cdot a_{l,j} ; \\ (\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{i,j} &= a_{i,j} \end{aligned}$$

2. pour $i = k$:

$$\delta_i^l + (\lambda - 1) \cdot \delta_i^k = \lambda \cdot \delta_i^l$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{k,j} &= \sum_{l=1}^m \lambda \cdot \delta_l^i \cdot a_{l,j} ; \\ (\text{DILAT}_m(k, \lambda) \times A)_{k,j} &= \lambda \cdot a_{i,j}. \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.10 (dilatation de colonnes). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit k, k' deux entiers compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . Alors la matrice $A \times \text{DILAT}_n(k, \lambda)$ est la matrice dont la l -ième colonne est la l -ième colonne de A pour $l \neq k$, la k -ième colonne est la k -ième colonne de A multipliée par le scalaire λ .

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs, soit k un entier compris entre 1 et n , et soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ un scalaire non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} .

On a : ${}^T(A \times \text{DILAT}_n(k, \lambda)) = \text{DILAT}_n(k, \lambda) \times {}^T A$.

Donc la transposée de $A \times \text{DILAT}_n(k, \lambda)$ est la transposée de A donc on a multiplié la k -ième ligne par λ .

Puis $A \times \text{DILAT}_n(k, \lambda)$ est la matrice A dans laquelle on a multiplié la colonne k par n .

□

Exemple 4.2.5.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} . \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 10 & 6 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Propriété 4.2.11. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit k un entier entre 1 et n , et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ deux scalaires non nuls. Alors $\text{DILAT}_n(k, \lambda) \times \text{DILAT}_n(k, \mu) = \text{DILAT}_n(k, \lambda \cdot \mu)$.

Preuve

à faire en exercice

□

4.2.4 Ajout de lignes et de colonnes

Définition 4.2.4 (matrice de combinaison). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient k et k' deux entiers distincts entre 1 et n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On note $\text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ la matrice $\text{I}_{n,n} + \lambda \cdot \text{E}_{k,k'}^{n,n}$.

Exemple 4.2.6. Par exemple,

$$\text{ADD}_3(1, 2, 4) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.12. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a : $T(\text{ADD}_n(k, k', \lambda)) = \text{ADD}_n(k', k, \lambda)$.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a :

$$\begin{aligned} T(\text{ADD}_n(k, k', \lambda)) &= T(\text{I}_{n,n} + \lambda \cdot \text{E}_{k,k'}^{n,n}) \\ T(\text{ADD}_n(k, k', \lambda)) &= T(\text{I}_{n,n}) + T(\lambda \cdot \text{E}_{k,k'}^{n,n}) \\ T(\text{ADD}_n(k, k', \lambda)) &= \text{I}_{n,n} + \lambda \cdot T\text{E}_{k,k'}^{n,n} \\ T(\text{ADD}_n(k, k', \lambda)) &= \text{I}_{n,n} + \lambda \cdot \text{E}_{k',k}^{n,n} \\ T(\text{ADD}_n(k, k', \lambda)) &= \text{ADD}_n(k', k, \lambda). \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.13 (ajout d'une ligne). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et m , et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . Alors la matrice $\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A$ est la matrice dont la l -ième ligne est la l -ième ligne de A pour $l \neq k$, la k -ième ligne est la k -ième ligne de A plus la k' -ième ligne de A multipliée par le scalaire λ .

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soient k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et m et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On note $A \triangleq (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

On a :

$$\begin{aligned} (\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m (\text{ADD}_m(k, k', \lambda))_{i,l} \cdot a_{l,j} \\ (\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m (\delta_i^l + \lambda \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'}) \cdot a_{l,j} \end{aligned}$$

Puis :

1. pour $i \neq k$:

$$\delta_i^l + \lambda \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'} = \delta_i^l.$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A)_{i,j} &= \sum_{l=1}^m \delta_i^l \cdot a_{l,j} ; \\ (\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A)_{i,j} &= a_{i,j} \end{aligned}$$

2. pour $i = k$:

$$\delta_i^l + \lambda \cdot \delta_i^k \cdot \delta_l^{k'} = \delta_i^l + \lambda \cdot \delta_l^{k'}.$$

Puis :

$$\begin{aligned} (\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A)_{k,j} &= \sum_{l=1}^m \delta_i^l \cdot a_{l,j} + \sum_{l=1}^m \lambda \cdot \delta_l^{k'} \cdot a_{l,j} \\ (\text{ADD}_m(k, k', \lambda) \times A)_{k,j} &= a_{i,j} + \lambda \cdot a_{k',j}. \end{aligned}$$

□

Propriété 4.2.14 (ajout d'une colonne). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs et soit k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} . Alors la matrice $A \times \text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ est la matrice dont la l -ième colonne est la l -ième colonne de A pour $l \neq k'$, la k' -ième colonne est la k' -ième colonne de A plus la k -ième colonne de A multipliée par le scalaire λ .

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs, soit k, k' deux entiers distincts compris entre 1 et n , et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ d'éléments de \mathbb{K} .

On a : ${}^T(A \times \text{ADD}_n(k, k', \lambda)) = \text{ADD}_n(k', k, \lambda) \times {}^T A$.

Donc la transposée de $A \times \text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ est la transposée de A donc on a ajouté à la ligne k' la ligne k multipliée par le scalaire λ .

Puis $A \times \text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ est la matrice A dans laquelle on a ajouté à la colonne k' la colonne k multipliée par le scalaire λ .

□

Exemple 4.2.7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propriété 4.2.15. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, soit k, k' deux entiers distincts entre 1 et n , et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ deux scalaires. Alors $\text{ADD}_n(k, k', \lambda) \times \text{ADD}_n(k, k', \mu) = \text{ADD}_n(k, k', \lambda + \mu)$.

Preuve

à faire en exercice

□

4.3 Matrices inversibles

4.3.1 Inversibilité à gauche et à droite

Définition 4.3.1 (matrice inversible à gauche). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . On dit que A est inversible à gauche si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans \mathbb{K} telle que $B \times A = I_{n,n}$.

La matrice B est alors appelée un inverse à gauche de A .

Exemple 4.3.1. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

a plusieurs inverses à gauche.

Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+5 \cdot a}{3} & \frac{2-2 \cdot a}{3} & a \\ \frac{2-5 \cdot b}{3} & -\frac{1+2 \cdot b}{3} & b \end{bmatrix}$$

est un inverse à gauche de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Preuve

à faire en exercice

□

Définition 4.3.2 (matrice inversible à droite). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . On dit que A est inversible à droite si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans \mathbb{K} telle que $A \times B = I_{m,m}$. La matrice B est alors appelée un inverse à droite de A .

Exemple 4.3.2. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a des inverses à droite.

Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, la matrice :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+5 \cdot a}{3} & \frac{2-5 \cdot b}{3} \\ \frac{2-2 \cdot a}{3} & -\frac{1+2 \cdot b}{3} \\ a & b \end{bmatrix}$$

est un inverse à droite de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.3.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . La matrice A est inversible à gauche si et seulement si la matrice ${}^T A$ est inversible à droite.

De plus, soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans \mathbb{K} . Alors la matrice B est un inverse à gauche de A si et seulement si la matrice ${}^T B$ est un inverse à droite de ${}^T A$.

Preuve

à faire en exercice

□

Définition 4.3.3 (matrice inversible). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . On dit que A est inversible si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = I_{m,m}$ et $B \times A = I_{n,n}$.

La matrice B est alors appelée un inverse de A .

Notation 4.3.1. Si une matrice A est inversible, son inverse est noté A^{-1} .

Exemple 4.3.3. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

est inversible.

De plus, son inverse est :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{-7}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.3.2. Les matrices carrés de transformation élémentaire sont inversibles.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel.

1. Par la propriété 4.2.2, on a :

$$I_{n,n} \times I_{n,n} = I_{n,n}.$$

Donc $I_{n,n}$ est inversible et son inverse est $I_{n,n}$.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est une matrice de permutation. Alors, par la propriété 4.2.7, on a : $B \times B = I_{n,n}$.
Donc la matrice B est inversible et son inverse est B .

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$. Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Par la propriété 4.2.11, on a : $\text{DILAT}_n(k, \lambda) \times \text{DILAT}_n(k, \frac{1}{\lambda}) = \text{DILAT}_n(k, 1)$ et $\text{DILAT}_n(k, \frac{1}{\lambda}) \times \text{DILAT}_n(k, \lambda) = \text{DILAT}_n(k, 1)$. Or $\text{DILAT}_n(k, 1) = I_{n,n}$.

Donc $\text{DILAT}_n(k, \lambda)$ est inversible et son inverse est $\text{DILAT}_n(k, \frac{1}{\lambda})$.

4. Si il existe k, k' deux entiers distincts entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, par la propriété 4.2.15, on a : $\text{ADD}_n(k, k', \lambda) \times \text{ADD}_n(k, k', -\lambda) = \text{ADD}_n(k, k', 0)$ et $\text{ADD}_n(k, k', -\lambda) \times \text{ADD}_n(k, k', \lambda) = \text{ADD}_n(k, k', 0)$.
Or, $\text{ADD}_n(k, k', 0) = I_{n,n}$.

Donc $\text{ADD}_n(k, k', \lambda)$ est inversible et son inverse est $\text{ADD}_n(k, k', -\lambda)$.

□

Propriété 4.3.3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ qui a un inverse à droite $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et un inverse à gauche $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors $B = C$ (et A est inversible).

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ qui a un inverse à droite $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et un inverse à gauche $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

On a :

$$\begin{aligned} B &= B \times I_{m,m} && \text{(par la propriété 4.2.2)} \\ B &= B \times (A \times C) && \text{(par la définition 4.3.2)} \\ B &= (B \times A) \times C && \text{(par la propriété 4.1.2)} \\ B &= I_{n,n} \times C && \text{(par la définition 4.3.1)} \\ B &= C && \text{(par la propriété 4.2.1).} \end{aligned}$$

Donc $B = C$.

□

4.3.2 Inversion à gauche

Propriété 4.3.4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} telle que A soit inversible à gauche. Alors,

1. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de taille $n \times 1$ à valeur dans \mathbb{K} , on a : $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1} \implies X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$;
2. les colonnes de A forment une famille libre de \mathbb{R}^n .

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.3.5. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. La matrice identité $I_{m,n}$ est inversible à gauche si et seulement si $m \geq n$.

Preuve

1. (\Leftarrow) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \geq n$.
On a par la propriété ??, $I_{n,m} \times I_{m,n} = I_{n,n}$. Donc $I_{m,n}$ est inversible à gauche.
2. (\Rightarrow) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $I_{m,n}$ soit inversible à gauche. Les colonnes de $I_{m,n}$ forment une famille libre, donc il n'y a pas de colonne nulle, puis $m \geq n$.

□

Propriété 4.3.6. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs tels que $m \geq n$. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$. Alors A est un inverse à gauche de $I_{m,n}$ si et seulement si pour tout i entre 1 et n et tout j entre 1 et n , on a : $a_{i,j} = \delta_j^i$.

Preuve

à faire en exercice

□

Propriété 4.3.7. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible de taille $m \times m$. Alors A est inversible à gauche si et seulement si $B \times A$ est inversible à gauche.

Propriété 4.3.8. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible de taille $m \times m$. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $n \times m$ à valeur dans \mathbb{K} . Alors C est un inverse à gauche de A si et seulement si $C \times B^{-1}$ est un inverse à gauche de $B \times A$ est inversible à gauche.

Preuve On prouve les propriétés 4.3.7 et 4.3.8 en même temps.

1. (\Rightarrow) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible de taille m . On suppose que A est inversible à gauche. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche de A .

On a :

$$\begin{aligned} (C \times B^{-1}) \times (B \times A) &= (C \times (B^{-1} \times B)) \times A && \text{(par la propriété 4.1.2)} \\ (C \times B^{-1}) \times (B \times A) &= (C \times I_{m,m}) \times A && \text{(par la définition 4.3.3)} \\ (C \times B^{-1}) \times (B \times A) &= C \times A && \text{(par la propriété 4.2.2)} \\ (C \times B^{-1}) \times (B \times A) &= I_{n,n} && \text{(par la définition 4.3.1)} \end{aligned}$$

2. (\Leftarrow) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice inversible telle que $B \times A$ soit inversible. On a : B^{-1} est une matrice inversible et de plus $A = B^{-1} \times (B \times A)$. On peut donc appliquer la preuve du sens direct (\Rightarrow) de la propriété que l'on est en train de montrer. Ainsi, A est inversible à gauche.

□

Définition 4.3.4. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de taille $m \times n$ est dite échelonnée, si et seulement si il existe une fonction PIVOT qui associe à chaque indice de ligne de A non nulle un indice de colonne, tel que :

1. Pour chaque ligne non nulle d'indice i , la première colonne non nulle a pour indice $\text{PIVOT}(i)$.
2. Pour chaque ligne non nulle d'indice i , $A_{i, \text{PIVOT}(i)} = 1$.
3. Pour chaque ligne i non nulle, $A_{i, \text{PIVOT}(i)}$ est le seul élément non nul de la colonne $\text{PIVOT}(i)$.
4. Pour chaque paire de lignes non nulles, d'indice i et j , on a : $i < j \implies \text{PIVOT}(i) < \text{PIVOT}(j)$.
5. Les lignes nulles, si il y en a, sont à la fin de la matrice.

Exemple 4.3.4. La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est échelonnée. La fonction PIVOT associe 1 à 1 (le pivot de la première ligne est sur la première colonne), et 2 à 3 (le pivot de la seconde ligne est sur la troisième colonne).

Algorithme 4.3.1 (pivot de Gauss). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$. Alors, quitte à permuter les lignes de A , multiplier les lignes de A par une constante non nulle, et ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par une constante, alors on peut écrire A sous forme échelonnée.

On suppose $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

1. Posons $p \leftarrow 1$.
2. Si A n'est pas échelonnée, on prend la première colonne j_0 telle qu'il existe une ligne i_0 telle que $a_{i_0, j_0} \neq 0$, avec $i_0 \geq p$.
3. On permute la ligne p et la ligne i_0 .
4. On utilise la ligne p pour annuler le reste de la colonne j_0 .
5. On pose $p \leftarrow p + 1$.

Preuve On montre par récurrence que les $p - 1$ premières lignes de A forment une matrice échelonnée.

□

Propriété 4.3.9. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à valeur dans \mathbb{K} . Alors la matrice A a un inverse à gauche si et seulement si $A = I_{m,n}$ et $m \geq n$.

Preuve Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à valeur dans \mathbb{K} .

1. (\Leftarrow) Si $m \geq n$ et $A = I_{m,n}$.
Alors, par la propriété 4.3.5, A est inversible à gauche.
2. (\Rightarrow) Soit $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche de A . Supposons, par l'absurde, qu'il existe une colonne sans pivot. Prenons la colonne sans pivot d'indice minimal j_0 . On a :
 - (a) $j_0 \leq \min(m, n)$.

(b) Pour $k, k' \in \mathbb{K}$ tels que $1 \leq k < j_0$ et $1 \leq k' < j_0$, $a_{k,k'} = \delta_{k'}^k$.

(c) Pour $k \in \mathbb{K}$ tel que $j_0 \leq k \leq m$, on a : $a_{k,j_0} = 0$.

Puis, pour $i \in \mathbb{N}$ entre 1 et l , on a :

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = \sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot \delta_k^i.$$

On distingue deux cas :

(a) si $i < j_0$, on a :

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = a_{i,j_0}$$

(b) si $i \geq j_0$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} &= 0, \\ \sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,j} &= a_{i,j_0}. \end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$\sum_{k=1}^{j_0-1} a_{k,j_0} \cdot a_{i,k} = a_{i,j_0}.$$

Ainsi la colonne j_0 est la combinaison linéaire des colonnes 1 à $j_0 - 1$ avec les coefficients a_{1,j_0} à a_{j_0-1,j_0} .
Puis les colonnes de A ne sont pas libres.

Donc ??, A n'est pas inversible à gauche.

□

Propriété 4.3.10. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans \mathbb{K} . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A a un inverse à gauche ;
2. A peut s'écrire sous la forme $B \times I_{m,n}$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille m .

Preuve

à faire en exercice

□

Algorithme 4.3.2 (inversion à gauche). Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

1. On utilise l'algorithme 4.3.1 permet de vérifier si A a un inverse à gauche.
2. – soit la matrice n'est pas inversible ;
– soit la matrice est inversible :
 - (a) on a calculé une matrice $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ carrée de taille m et à valeur dans \mathbb{K} qui vérifie :
 $B \times A = I_{m,n}$;
 - (b) on calcule $B \times I_{m,m}$ en faisant agir les mêmes transformations élémentaires qui ont transformé A en $I_{m,n}$ sur $I_{m,m}$;
 - (c) l'ensemble des inverses à gauche de A est alors l'ensemble des matrices $C \times B \times I_{m,m}$ pour chaque matrice $C \triangleq (c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ de taille $n \times m$ à valeur dans \mathbb{K} et telle que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$ et pour tout j tel que $1 \leq i \leq n$, on ait $c_{i,j} = \delta_j^i$.

Preuve

à faire en exercice

□

Exemple 4.3.5. Reprenons l'exemple 4.3.1. On fait agir en parallèle les mêmes transformations sur la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

et la matrice $I_{m,m}$:

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3 \cdot L_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$ $L_3 \leftarrow L_3 + 2 \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix}$

Puis les inverses à gauche de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sont les matrices de la forme :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-5}{3} & \frac{-2}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Puis les inverses à gauche de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

sont les matrices :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1+5a}{3} & -\frac{2+2a}{3} & a \\ \frac{2-5b}{3} & -\frac{1+2b}{3} & b \end{bmatrix}$$

Lemme 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq k' \leq n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire et de taille n . Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ carrée de transformation élémentaire et telle que :

$$\text{SWAP}_n(k, k') \times B = C \times \text{SWAP}_n(k, k')$$

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soient $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq k' \leq n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire et de taille n .

On note :

$$\sigma \triangleq \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ l & \mapsto & l \quad \text{si } l \notin \{k, k'\} \\ l & \mapsto & k' \quad \text{si } l = k \\ l & \mapsto & k \quad \text{si } l = k'. \end{cases}$$

On distingue plusieurs cas sur la forme de B :

1. si $B = I_{n,n}$,
on a : $\text{SWAP}_n(k, k') \times I_{n,n} = I_{n,n} \times \text{SWAP}_n(k, k')$;
2. si B est une matrice de permutation,
soient l et l' entre 1 et n , tels que $B = \text{SWAP}_n(l, l')$,
on a : $\text{SWAP}_n(k, k') \times \text{SWAP}_n(l, l') = \text{SWAP}_n(\sigma l, \sigma l') \times \text{SWAP}_n(k, k')$;
3. si B est une matrice de dilatation,
soient l entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$,
on a : $\text{SWAP}_n(k, k') \times \text{DILAT}_n(l, \lambda) = \text{DILAT}_n(\sigma l, \lambda) \times \text{SWAP}_n(k, k')$;
4. si B est une matrice de d'ajout,
soient l, l' entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}$,
on a : $\text{SWAP}_n(k, k') \times \text{ADD}_n(l, l', \lambda) = \text{ADD}_n(\sigma l, \sigma l', \lambda)$.

□

Lemme 2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de transformation élémentaire, de taille m , qui n'est pas une matrice de permutation. Alors il existe une matrice carrée $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ de transformation élémentaire, de taille n telle que $B \times I_{m,n} = I_{m,n} \times C$.

Preuve

à faire en exercice

□

Théorème 4.3.1. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans \mathbb{K} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible à gauche ;
2. $m \geq n$ et A peut s'écrire sous la forme $B \times I_{m,n}$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille m ;

3. les lignes de A forment une famille génératrice de \mathbb{R}^n ;
4. les colonnes de A forment une famille libre dans \mathbb{R}^m ;
5. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$;
6. pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = Y$.

4.3.3 Inverse à droite

Algorithme 4.3.3 (inversion à droite). Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice de taille $m \times n$ à valeur dans \mathbb{K} . On utilise l'algorithme 4.3.2 pour décider si la transposée de A est inversible à gauche, et calculer ses inverses à gauche.

1. si ${}^T A$ n'est pas inversible à gauche, alors A n'est pas inversible à droite ;
2. les inverses à droites de A sont alors les transposées des inverses à gauche de ${}^T A$.

Preuve

à faire en exercice

□

Théorème 4.3.2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans \mathbb{K} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible à droite ;
2. $m \leq n$ et A peut s'écrire sous la forme $I_{m,n} \times B$ où B est le produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille n ;
3. les colonnes de A forment une famille génératrice de \mathbb{R}^m ;
4. les lignes de A forment une famille libre dans \mathbb{R}^n ;
5. pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$;
6. pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.

4.3.4 Inverses

Propriété 4.3.11. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} . Alors A est inversible à gauche si et seulement si A est inversible à droite.

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible à gauche ;
2. les lignes de A forment une famille génératrice de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$; (par le théorème ??)
3. les lignes de A forment une famille libre dans $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$; (pour des raisons de dimensions)
4. A est inversible à droite. (par le théorème ??)

□

Propriété 4.3.12. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} . Alors un inverse à gauche de A est aussi un inverse à droite de A (et réciproquement).

Preuve Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n et à valeur dans \mathbb{K} . Soit $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ un inverse à gauche de A . On sait que A est inversible à gauche. Donc il est aussi inversible à droite. Soit $C \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ un inverse à droite. On sait par la propriété 4.3.3, que $B = C$.

□

Propriété 4.3.13. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Alors les matrices inversibles de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ sont les matrices obtenues comme produit d'un nombre arbitraire de matrices élémentaires carrées de taille n .

Algorithme 4.3.4 (pivot de Gauss sur une matrice carrée). Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée de taille n à valeur dans \mathbb{K} .

On suppose que $n \geq 1$.

1. On pose $p = 1$, $X_0 = A$, et $Y_0 = I_{n,n}$.
2. Si $p = n + 1$, A est inversible, et son inverse est Y_n .
3. On note $X_{p-1} = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.
4. Si pour tout $i \geq p$, $x_{i,p} = 0$ alors la matrice A n'est pas inversible.
5. On prends le plus petit indice i_0 tel que $i_0 \geq p$ et tel que $x_{i_0,p} \neq 0$.
6. On permute la ligne p et la ligne i_0 à la fois dans la matrice X_{p-1} et dans la matrice Y_{p-1} .
7. On utilise la ligne p pour annuler le reste de la colonne j_0 dans la matrice X_{p-1} , tout en effectuant les mêmes transformations dans la matrice Y_{p-1} .
8. On pose X_p et Y_p les matrices obtenues.
9. $p \leftarrow p + 1$,

Preuve On a appliqué l'algorithme 4.3.1, en remarquant que si on forme une colonne qui s'annule sur toutes les lignes qui n'ont pas encore de pivots, alors on ne peut pas obtenir la matrice $I_{n,n}$ à la fin. On prouve, en case de succès de l'algorithme, que pour tout p , on a : $A = Y_p \times A_p$. Puis, Y_n est l'inverse de A . \square

Exemple 4.3.6. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas inversible.

En effet,

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow \frac{-1}{3} \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cette dernière matrice n'est pas inversible, car elle a une ligne nulle (donc ces lignes ne forment pas une famille libre de \mathbb{R}^3).

Exemple 4.3.7. La matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

est inversible.

On trouve son inverse par pivot de Gauss :

	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$L_2 \leftrightarrow L_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 - 2 \cdot L_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_3$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

On peut vérifier que la matrice :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

est l'inverse de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

			1	2	3
			1	2	4
			0	1	2
0	1	-2	1	2-2	4-4
2	-2	1	2-2	4-4+1	6-8+2
-1	1	0	-1+1	-2+2	-3+4

Théorème 4.3.3. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers positifs. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à valeur dans \mathbb{K} . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;

2. *A peut s'écrire sous la forme d'un produit de 0, une, ou plusieurs matrices de transformation élémentaire, toutes carrées et de taille n ;*
3. *$m \geq n$ et les colonnes de A forment une famille génératrice de \mathbb{R}^m ;*
4. *$m \leq n$ et les colonnes de A forment une famille libre de \mathbb{R}^m ;*
5. *$m \geq n$ et les lignes de A forment une famille libre dans \mathbb{R}^n ;*
6. *$m \leq n$ et les lignes de A forment une famille génératrice de \mathbb{R}^n .*
7. *$m \geq n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$;*
8. *$m \geq n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = Y$.*
9. *$m \leq n$ et pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $A \times X = (0)_{1 \leq i \leq m, j=1}$, on a $X = (0)_{1 \leq i \leq n, j=1}$;*
10. *$m \leq n$ et pour toute matrice $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, il existe une matrice $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ telle que ${}^T A \times X = Y$.*

Fin de la 6^e semaine.

4.4 Matrices d'application linéaires

(voir le DM)