Année scolaire 1999/2000

MAGISTÈRE

DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES & APPLIQUÉES

ET D'INFORMATIQUE

DE LA RÉGION PARISIENNE

Universités Paris VI, VII, IX, XI, XIII et École normale supérieure.

Édition du 5 novembre 1999 ($12^{\mathrm{H}}12$)

MAGISTÈRE
DE MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES & APPLIQUÉES
ET D'INFORMATIQUE
DE LA RÉGION PARISIENNE

Créé en 1985, le magistère M.M.F.A.I. est un diplôme à accréditation nationale préparé en 3 ans ; le M.M.F.A.I. est une formation inter-universitaire de haut niveau scientifique, aux effectifs réduits (une cinquantaine d'étudiants par an, dont des élèves de l'E.N.S.). Cette formation est axée sur les mathématiques, l'informatique et leurs applications. Les objectifs poursuivis visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. Ce magistère est commun aux Universités Paris VI, VII, IX, XI, XIII et à l'École normale supérieure.

Directeurs : Michel Duflo et Patrick Cousot

Secrétaire : Laurence Vincent

Adresse : École normale supérieure
45 rue d'Ulm - 75230 Paris cedex 05
Tél : 01 44 32 31 72
Fax : 01 44 32 32 28
Mél : mmfai@ens.fr

Directeurs des études :
Mathématiques : Jean-François Le Gall
Informatique : Patrick Cousot

Année scolaire 1999/2000

Table des matières

1. Objectifs

Le magistère vise à assurer une formation originale de mathématiciens purs et appliqués, ayant acquis de solides connaissances en informatique (ou en physique), et d'informaticiens connaissant des mathématiques pures et appliquées, de haut niveau, dans des secteurs variés. Il s'agit d'une formation à la recherche, par la recherche, mixte et donc moins spécialisée que les autres formations. Un rythme plus rapide est rendu possible grâce à un encadrement renforcé.

2. Débouchés

À la sortie du magistère, l'étudiant peut achever une thèse en mathématiques ou en informatique, en 2 ou 3 ans. Il peut également prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après 1, 2 ou 3 ans, une fois la thèse éventuelle achevée, les débouchés possibles sont les suivants :

- chercheur en mathématiques pures ou appliquées ou en informatique dans un organisme de recherche (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES, ...) ;
- enseignant-chercheur à l'Université ;
- ingénieur mathématicien ou informaticien dans l'industrie ;
- enseignant en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (IUT, CNAM, ...).

3. Conditions d'admission

Recrutement sur dossier ouvert aux étudiants titulaires d'un DEUG (ou d'un diplôme étranger de même niveau), ou d'une licence. Les élèves d'une grande école peuvent également présenter leur candidature.

Des étudiants peuvent être admis en cours d'études ; des passerelles avec d'autres magistères ou avec le cursus maths-physique de l'École sont prévues.

Des possibilités de sortie en cours de magistère vers les filières universitaires seront aménagées en accord avec les universités contractantes.

4. Candidatures pour 1999/2000

Les dossiers de candidature au magistère doivent être demandés par correspondance à compter du mois d'avril 1999 à l'adresse du secrétariat M.M.F.A.I.. Joindre cinq timbres au tarif lettre urgente en vigueur pour les frais d'envoi.

Les dossiers remplis doivent être retournés pour le 31 juillet 1999 accompagnés des pièces suivantes :

- un curriculum vitæ ;
- une lettre de motivation ;
- la photocopie des diplômes (baccalauréat et diplômes universitaires) ;
- un relevé des résultats des examens passés depuis l'entrée à l'Université, et notamment des contrôles subis durant l'année universitaire en cours ;
- pour les élèves des classes préparatoires, une copie des bulletins trimestriels depuis la première année, et éventuellement des résultats déjà obtenus aux concours (admissibilités et admissions) ;
- lettres de recommandation, si possible ;
- 2 photographies d'identité.

Des compléments (relevés de notes etc.) peuvent être joints au dossier après le 31 juillet 1999 mais avant le 1^{er} septembre 1999.

5. Inscription à l'Université

Après leur admission au magistère, les étudiants s'inscrivent auprès des services de scolarité des universités contractantes. Au cours de leurs études, ils doivent parallèlement obtenir les diplômes nationaux de $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ cycles, qui leur seront délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement du magistère. Ils s'inscrivent donc simultanément au magistère et aux diplômes nationaux universitaires : licence de mathématiques ou d'informatique, maîtrise de mathématiques pures ou appliquées, ou d'informatique, et dans les divers DEA proposés au niveau national dans la spécialité adoptée. Étant titulaires du DEA, les étudiants qui le désirent, peuvent au cours de la dernière année du magistère, ou à son issue, préparer une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un directeur de recherche.

6. Organisation du diplôme

Les études du Magistère sont structurées comme suit :

6.1 Première année

Les étudiants suivent des cours niveau licence et maîtrise constituant un enseignement de base en mathématiques ou en informatique. Le magistère valide également des cours de physique, d'économie et de biologie. Il permet également, sous certaines conditions, le suivi en première année d'un cursus spécifique de mathématiques-physique (voir page 31 en fin de brochure). Cette première année autorise donc une large variété de cursus, ceux-ci devant être néanmoins soumis à l'approbation du directeur des études. L'étendue des cours proposés est souvent renouvelée pour suivre de près l'actualité scientifique. On notera tout particulièrement la diversité des sujets de cours, ainsi que la diversité des origines des enseignants. Ceci essentiellement pour permettre une grande souplesse au niveau des débouchés possibles (domaines de recherche, localisation géographique etc.). Des stages en laboratoire (universitaire ou industriel) sont prévus en fin de première année, avec une priorité donnée à la province. De plus, des exposés sont prévus au deuxième semestre pour donner l'occasion aux étudiants de travailler par eux-mêmes (tout en étant, bien sûr, encadrés dans cette démarche) sur un sujet non vu en cours, leur permettant de s'initier à la recherche. À la fin de la première année, une commission des études statue sur les admissions en seconde année ; la maîtrise est délivrée à la fin de la première année ou à la fin de la seconde année suivant les cursus adoptés.

6.2 Deuxième année

Elle est constituée d'une part, de cours de fin de maîtrise pour ceux que cela concerne, d'autre part, de cours de niveau $3^{\text{ème}}$ cycle (DEA). Étant donnée la grande richesse des cours de $3^{\text{ème}}$ cycle dispensés dans les universités contractantes, les étudiants sont invités à s'y rendre, et nous ne donnons en appendice que la liste des cours spécifiques au magistère, étant sous-entendu que ces cours font partie des possibilités de cursus dès la $2^{\text{ème}}$ année. Il peut être judicieux, après accord avec les responsables des études, d'aller suivre un DEA en province, ceci pour favoriser l'insertion des étudiants dans le milieu de la recherche. Cette formation théorique est complétée par une initiation à la recherche, par la participation à des groupes de travail, des stages à l'étranger ou en province. La commission des études se réunit à nouveau en fin de seconde année pour décider des admissions en troisième année.

6.3 Troisième année

Il s'agit d'une année consacrée à un début de recherche : l'étudiant termine éventuellement son DEA et choisit son sujet de thèse. À ce niveau, les étudiants s'intègrent progressivement dans un laboratoire de recherche, où leur travail s'effectue. Les étudiants rédigent, en fin d'année, un mémoire de magistère faisant le point sur leur scolarité au magistère et sur l'avancement de leur recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale. Le diplôme de magistère est accordé après cette soutenance par la commission des études.

7. Cours de l'année scolaire 1999/2000

7.1 Première année

Les étudiants de première année ont à choisir parmi les cours suivants (les noms des professeurs en charge du cours sont composés en gras, ceux des chargés de TD en italique ; le programme détaillé du cours est donné à la page référencée entre crochets après le titre du cours) :

7.1.1 Cours de mathématiques

Premier semestre :

– *Algèbre 1* [LM, 10] (60h : 36h cours + 24h TD)	**A. Beauville** *J. Bellaïche*	Pr. E.N.S./Paris 11 AP E.N.S.
– *Analyse 1* [LM, 10] (60h : 36h cours + 24h TD)	**I. Ekeland** *N. Anantharaman*	Pr. Paris 9 AP E.N.S.
– *Intégration et probabilités 1* [LM, 10] (60h : 36h cours + 24h TD)	**F. Comets** *Y. Baraud*	Pr. Paris 7 CR CNRS
– *Groupe de lecture « Représentation des groupes »* [MMC, 11] (24h)	**Y. Benoist** **V. Lafforgue**	DR CNRS CR CNRS

Deuxième semestre :

– *Algèbre 2* [MMF, 11] (36h)	**L. Illusie**	Pr. Paris 11
– *Analyse 2* [MMF, 12] (50h : 30h cours + 20h TD)	**F. Bethuel** *L. Saint-Raymond*	Pr. E.N.S./Paris 6 AP E.N.S.
– *Analyse complexe* [LM, 12] (36h : 24h cours + 12h TD)	**J. Faraut** *C. Villani*	Pr. Paris 6 AP E.N.S.
– *Analyse et modèles mathématiques* [MMC, CM, 12] (30h)	**J-F. Le Gall**	Pr. E.N.S./Paris 6
– *Équations aux dérivées partielles et méthodes numériques* [MMC, 13] (40h : 20h cours + 20h TP)	**B. Perthame**	Pr. E.N.S./Paris 6

LM : cours de licence de mathématiques.
MMC : cours complémentaire de maîtrise de mathématiques.
MMF : cours fondamental de maîtrise de mathématiques.
CM : cours spécifique au cursus mixte.

– *Géométrie différentielle* [MMF, 13] (50h : 30h cours + 20h TD)	**J.-B. Bost** *F. Pierrot*	Pr. Paris 11 AP E.N.S.
– *Probabilités 2* [MMF, 14] (30h)	**J. Bertoin**	Pr. Paris 6
– *Théorie spectrale* [MMC, 14] (24h)	**M. Duflo**	Pr. E.N.S./Paris 7
– *Topologie algébrique élémentaire* [MMC, 15] (24h)	**P. Vogel**	Pr. Paris 7

7.1.2 Cours communs aux mathématiques et à l'informatique

Premier semestre :

– *Logique* [LM, LI, 15] (60h : 36h cours + 24h TD)	**A. Louveau** *J. Chroboczek*	Dr CNRS ATER DI

Deuxième semestre :

– *Bases mathématiques et algorithmes de base du traitement des images digitales* [MMC, MIC, 15] (36h : 24 cours + 12h TD)	**A. Chambolle**	CR CNRS
– *Introduction au calcul formel* [MMC, MIC, 16] (48h : 24h cours + 24h TD)	**D. Lazard**	Pr. Paris 6

7.1.3 Cours d'informatique

Premier semestre :

– *Prérequis d'algorithmique* [16] (12h cours)	**J. Stern**	Pr. E.N.S./Paris 7
– *Algorithmique et programmation* [LI, 17] (48h : 24h cours + 24h TD)	**J. Stern** *L. Granboulan* *L. Mauborgne*	Pr. E.N.S./Paris 7 MdC DI ATER DI
– *Langages de programmation et compilation* [LI, 18] (48h : 24h cours + 24h TD)	**P. Cousot** *L. Mauborgne*	Pr. E.N.S./Paris IX ATER DI
– *Théorie de l'information* [LI, 18] (35h : 15h cours + 20h TD)	**J. Vuillemin**	Pr. E.N.S.

Deuxième semestre :

Cours de licence :

– *Langages formels, calculabilité, complexité et analyse d'algorithmes* [LI, 19] (48h : 30h cours + 18h TD)	**P. Gastin** *M. Fernandez*	Pr. Paris 7 MdC DI

MMF : cours fondamental de maîtrise de mathématiques.
MMC : cours complémentaire de maîtrise de mathématiques.
LM : cours de licence de mathématiques.
LI : cours de licence d'informatique.
MIC : cours complémentaire de maîtrise d'informatique.

Cours de maîtrise :

– *Bases de données* [MIF, 20] (42h : 24h cours + 18h TD)	**N. Spyratos** *E. Waller*	Prof. Paris XI MdC Paris XI
– *Introduction à la géométrie algorithmique* [MIC, 2A, 27] (54h : 36h cours + 18h TD)	**M. Pocchiola**	MdC DI
– *Sémantique des langages de programmation* [MIF, 21] (54h : 36h cours + 18h TD)	**P. Cousot** *L. Mauborgne*	Pr. E.N.S./Paris IX ATER DI
– *Systèmes* [MIF, 22] (54h : 36h cours + 18h TD)	**J. Beigbeder** *L. Granboulan*	Responsable SPI MdC DI
– *Réalisation de systèmes matériels* [MIC, 2A, 29] (54h : 18h cours + 36h TD)	**M. Shand** **J. Vuillemin**	Chercheur E.N.S./COMPAQ Pr. E.N.S.

Exposé de mathématiques : un exposé est proposé aux étudiants de mathématiques à la fin du deuxième semestre pour s'initier à la recherche (responsables : N. Anantharaman, AP E.N.S. ; V. Lafforgue, CR CNRS & F. Pierrot, AP E.N.S.).

Stage d'informatique : un stage d'initiation de deux à trois mois dans un laboratoire de recherche public ou privé français ou européen est proposé aux étudiants informaticiens entre juin et septembre 2000 (responsable : M. Pocchiola, MdC DI).

7.1.4 Cours d'économie

– *Introduction à l'analyse économique* [MMC, 22] (24h)	**P-Y. Geoffard**	CR CNRS

7.1.5 Cours de physique

– *Ordre de grandeur en physique* [MMC, CM, 23] (30h : 20h cours + 10h TD)	**S. Fauve** **J. Hare**	Pr E.N.S. MdC E.N.S.

7.1.6 Cours de biologie

– *Introduction à la biologie* [MMC, +LM, 25] (24h)	**R. Ferrière** **P. Sonigo** **F. Taddei**	MdC E.N.S. DR Inst. Cochin de génétique moléculaire CR Inst. Jacques Monod

MIF : cours fondamental de maîtrise d'informatique.
MIC : cours complémentaire de maîtrise d'informatique.
2A : ce cours peut également être choisi en $2^{\text{ème}}$ année.
MIF : cours fondamental de maîtrise d'informatique.
MMC : cours complémentaire de maîtrise de mathématiques.
CM : cours spécifique au cursus mixte.
+LM : ce cours peut être également validé dans la licence de mathématiques.

7.2 Deuxième année

7.2.1 Cours de mathématiques

– *Introduction à la dynamique hamiltonienne* [MMF, 26] (24h)	**P. Le Calvez**	Pr. Paris 13
– *Quelques thèmes choisis des milieux aléatoires.* [3M, 26] (8h)	**A.-S. Sznitman**	Pr. ETH Zurich
– *Representation theory using D-modules.* [3M, 26] (24h)	**Masaki Kashiwara**	Pr. RIMS, Kyoto

7.2.2 Cours d'informatique

– *Introduction à la géométrie algorithmique* [MIC, 27] (54h : 36h cours + 18h TD)	**M. Pocchiola**	MdC DI
– *Lambda-calculs et domaines* [3I, 27] (54h : 36h cours + 18h TD)	**P.-L. Curien**	DR CNRS
– *Logique informatique* [3I, 28] (48h : 24h cours + 24h TD)	**J. Goubault-Larrecq**	Chercheur INRIA
	M. Fernandez	MdC DI
– *Réalisation de systèmes matériels* [MIC, 29] (54h : 18h cours + 36h TD)	**M. Shand**	Chercheur E.N.S./COMPAQ
	J. Vuillemin	Pr. E.N.S.
– *Simulation et modélisation de réseaux de communication* [3I, 30] (36h : 18h cours + 18h TD)	**F. Baccelli**	Chercheur E.N.S./INRIA

7.2.3 Stage de recherche

Au premier semestre de deuxième année les étudiants ont la possibilité de faire un stage dans un laboratoire de recherche en province ou à l'étranger (responsable : P. Cousot, Prof. E.N.S.). Ils peuvent ensuite suivre les cours du deuxième semestre qu'ils n'ont pas choisis en première année. Une alternative consiste à suivre un DEA.

7.3 Pour tous les étudiants du M.M.F.A.I.

– *Cours d'anglais pour les mathématiques* [30]		À préciser

MMF : cours fondamental de maîtrise de mathématiques.
3M : cours de $3^{\text{ème}}$ cycle de mathématiques.
MIC : cours complémentaire de maîtrise d'informatique.
3I : cours de $3^{\text{ème}}$ cycle d'informatique.

8. Programme des cours de l'année 1999/2000

Algèbre 1

(Arnaud Beauville)

1) Groupes, action d'un groupe sur un ensemble. Groupes quotients, extensions, groupes résolubles. Théorèmes de Sylow.
2) Groupes et géométrie : groupe linéaire, affine, projectif, orthogonal. . .
3) Anneaux, idéaux, modules. Modules sur les anneaux principaux. Applications à la théorie des nombres et à la réduction des endomorphismes.

Analyse 1

(Ivar Ekeland)

– Structures fondamentales en topologie forte : espaces métriques complets, espaces de Banach et de Hilbert, applications linéaires, applications différentiables, fonctions convexes, minimisation approchée, minimisation exacte, conditions d'optimalité.
– L'équation f(x)= 0 et les problèmes aux limites : le théorème d'inversion locale. Applications : transversalité, théorème de Brouwer, lemme de Morse.
– Problèmes de bifurcation.
– Systèmes dynamiques : existence et différentiabilité du flot, stabilité et instabilité des équilibres, systèmes hamiltoniens, quantités conservées, applications (intégrabilité, théorème de récurrence).
– Introduction au calcul des variations.

Intégration et probabilités 1

(Francis Comets)

– Intégrale de Lebesgue. Espaces L^1 et L^0. Théorèmes de convergence. Théorème de Fubini. Formule du changement différentiable de variables ;
– Espaces de probabilité ;
– Variables et vecteurs aléatoires. Lois de probabilités et exemples : Bernoulli, Cauchy, Gauss, Poisson. Fonctions caractéristiques ;
– Indépendance et conditionnement ;
– Théorèmes limites en probabilité ;
– Méthode des moindres carrés.

Groupe de lecture « Représentation des groupes »

(Yves Benoist, Vincent Lafforgue)

La théorie des représentations est issue de l'idée simple suivant laquelle l'étude des symétries d'un problème fournit de précieuses indications sur sa solution. Cette théorie classique étudie comment réaliser un groupe abstrait comme un groupe de matrices. Le livre « Representation theory » de W. Fulton et J. Harris sera notre référence principale. Voici les points que nous aborderons:

– représentations des groupes finis ;
– représentations du groupe symétrique ;
– représentations du groupe linéaire complexe ;
– représentations du groupe unitaire ;
– polynomes invariants ;
– applications.

Algèbre 2

(Luc Illusie)

1) Algèbre multilinéaire
   - Modules, homomorphismes, suites exactes, modules libres.
   - Produit tensoriel de modules sur un anneau commutatif.
   - Isomorphismes canoniques, propriétés d'exactitude.
   - Puissances extérieures. Cas d'un module libre. Déterminants.
   - Dualité. Algèbre extérieure.
2) Extensions de corps et théorie de Galois
   - Anneaux principaux, factoriels. Théorème de Gauss. Critère d'Eisenstein.
   - Généralités sur les extensions de corps. Extensions finies, degrés, polynôme minimal. Extensions composées.
   - Corps de rupture, corps de décomposition.
   - Extensions transcendantes. Extensions algébriques. Clôtures algébriques. Théorèmes de Steinitz. Éléments conjugués.
   - Extensions quasi-galoisiennes.
   - Corps finis.
   - Idéaux étrangers, théorème d'approximation, théorème de Dedekind.
   - Séparabilité, algèbres diagonalisables (resp. étales) sur un corps.
   - Extensions galoisiennes. Théorème d'Artin. Correspondance de Galois. Groupe de Galois d'un polynôme séparable, discriminant.
   - Extensions composées, disjonction linéaire.
   - Extensions cyclotomiques. Caractère cyclotomique. Cas du corps des rationnels. Théorème de Gauss. Extensions cyclotomiques en caractéristique non nulle, cas des corps finis.
   - Polynôme caractéristique, normes et traces dans les algèbres finies libres. Cas des algèbres étales sur un corps, des extensions galoisiennes. Caractérisation des algèbres étales sur un corps par la forme trace.
   - Théorème de Hilbert 90. Extensions cycliques. Extensions de Kummer, d'Artin-Schreier.
   - Extensions résolubles et résolubilité par radicaux.

– Anneau des entiers d'un corps de nombres. Groupes de décomposition et groupes d'inertie. Éléments de Frobenius.
– Application au calcul de groupes de Galois de quelques polynômes à coefficients entiers.

Analyse 2

(Fabrice Bethuel)

1) Compléments d'analyse fonctionnelle ;
2) Topologie faible et compacité ;
3) Éléments de théorie des distributions ;
4) Transformation de Fourier ;
5) Applications de la transformation de Fourier aux équations aux dérivées partielles ;
6) Espaces de Sobolev ;
7) EDP et problèmes aux limites linéaires. Équations elliptiques ;
8) Problèmes d'évolution.

Analyse complexe

(Jacques Faraut)

1) Fonctions analytiques, le point de vue de Weierstrass ;
2) Fonctions exponentielle et logarithme ;
3) Intégrales curvilignes, indice d'un chemin fermé ;
4) Fonctions holomorphes, théorie de Cauchy ;
5) Séries de Laurent, fonctions méromorphes, résidus ;
6) Homotopie et holomogie ;
7) Séries de fonctions méromorphes, produits infinis ;
8) Transformations conformes ;
9) Équations différentielles.

Analyse et modèles mathématiques

(Jean-François Le Gall)

Ce cours se propose de présenter certains aspects de la théorie mathématique du mouvement brownien, dont la plupart ont été motivés par des problèmes physiques. Les thèmes suivants seront abordés :

1) L'origine physique du mouvement brownien et sa modélisation mathématique ;
2) Le mouvement brownien comme limite de marches aléatoires de petit pas ;
3) La mesure de Wiener comme prototype de mesure sur un espace de trajectoires ;
4) Mouvement brownien et fonctions harmoniques. La solution probabiliste du problème de Dirichlet ;
5) Mouvement brownien et équation de la chaleur. Interprétation probabiliste des solutions d'équations aux dérivées partielles ;
6) La formule de Feynman-Kac. Application à l'équation de Schrödinger ;

7) La théorie du potentiel probabiliste. Capacités et mesures d'équilibre. La forme quadratique de Gauss ;
8) Caractérisation des domaines réguliers pour le problème de Dirichlet : le test de Wiener.

Équations aux dérivées partielles et méthodes numériques

(Benoît Perthame)

Ce cours introduira quelques problèmes d'analyse et d'équations aux dérivées partielles classiques à la fois du point de vue théorique et du point de vue des méthodes numériques. Il sera acompagné de TP pour la mise en oeuvre des algorithmes sur ordinateurs, utilisant les logiciels MATLAB ou SCILAB.

1) Les EDP classiques. Les équations hyperboliques, elliptiques, paraboliques. Les équations de transport, de la mécanique des fluides.
2) Intégration numérique, supra-convergence pour l'intégration des fonctions périodiques, points de Gauss.
3) Systèmes différentiels, rappels théoriques et méthodes numériques.
4) Équations de transport et méthode des caractéristiques.
5) Équation de transport de la mesure, lien avec le théorème de Liouville.
6) Méthode particulaire. Algorithmes rapides.
7) Équations de Hamilton-Jacobi : mouvements de fronts et de surfaces, contrôle optimal des systèmes, applications à la gestion de portefeuille et au traitement d'images.
8) Méthode des volumes finis.
9) Équations de transport nonlinéaires et ondes de chocs, applications aux flots routiers, aux écoulements dans les rivières, à la dynamique des gaz.

Bibliographie :

[1] M. Crouzeix et A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Coll. pour la maîtrise, Masson (1989).
[2] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society (1998).

Géométrie différentielle

(Jean-Benoît Bost)

1) Variétés, notions fondamentales.
   – Variétés, variétés à bord ; exemples : espaces projectifs, sous-variétés, tores, grassmaniennes.
   – Fonctions, applications lisses entre variétés, points critiques.
   – Espace tangent, le cas des sous-variétés. Applications : tangentes à une application, immersions, submersions. Exemples : fibration de Hopf, variétés quotients, ...
   – Sous-variétés, fibré normal et théorème du voisinage tubulaire.
2) Formes différentielles.
   – Définitions, images inverses.
   – Formules d'homotopie, lemme de Poincaré.

  - Orientation, intégration et théorème de Stokes.
  - Crochet de Lie, algèbre de Lie des champs de vecteurs, formules de Lie-Cartan.

3) Introduction à la topologie différentielle.
  - Rudiments de cohomologie de de Rham.
  - Degré d'une application entre variétés compactes orientées de même dimension.
  - Applications : théorème de Brouwer, etc.

4) Introduction aux variétés complexes.
  - Ensembles algébriques dans $P^n(C)$, théorie de l'élimination.
  - Formes éliminantes et théorème de Bézout dans $P^n(C)$; application au théorème de Borsuk-Ulam.
  - Quelques exemples de courbes algébriques et de surfaces de Riemann.
  - Quelques applications des formes différentielles aux surfaces de Riemann.

Probabilités 2

(Jean Bertoin)

1) Indépendance et conditionnement ;
2) Martingales (temps discret) ;
3) Chaines de Markov (temps discret) ;
4) Introduction à la statistique (Fonction de répartition empirique et quelques tests).

Références :

[1] P. J. Bickel (1976), Doksum. Mathematical statistics. Holden Day.
[2] L. Breiman (1968), Probability, Adison-Wesley.
[3] J. Neveu (1972), Martingales à temps discret, Masson.
[4] D. Williams (1991), Probability with martingales, Cambridge.

Théorie spectrale

(Michel Duflo)

1) Opérateurs dans les espaces de Banach : opérateurs fermés, continus, compacts, spectre, rayon spectral et calcul fonctionnel holomorphe.
2) Opérateurs dans les espaces de Hilbert : opérateurs adjoints, self-adjoints, positifs. Opérateurs de Hilbert-Schmidt, à trace. Diagonalisation des opérateurs compacts normaux. Applications.
3) Théorie spectrale des opérateurs self-adjoints bornés ou non. Application aux groupes à un paramètre d'opérateurs unitaires.

Topologie algébrique

(Pierre Vogel)

- Homotopie. Groupes d'homotopie, groupe fondamental.
- Revêtement, revêtement universel. Relation avec le groupe fondamental.
- Théorème de Van Kampen. Calcul du groupe fondamental en terme de générateurs et relations.
- Homologie et cohomologie singulière. Suites exactes en homologie et cohomologie. Suite exacte de Mayer-Vietoris. Excision.
- Comparaison avec les groupes d'homotopie. Théorème de Hurewicz.
- Applications : théorème de Brower, théorème de la dimension, théorème de Borsuk-Ulam.
- Classification des surfaces compactes.

Logique

(Alain Louveau)

1) Calcul propositionnel
   - Formules, tautologies, complétude et compacité.
2) Calcul des prédicats
   - Formules et modèles. Théorèmes de complétude et de compacité.
   - Théorèmes de Lowenheim-Skolem. Applications simples en théorie des modèles et en algèbre.
3) Arithmétique de Peano
   - Axiomes, modèles non standards. Théorèmes d'incomplétude de Gödel.
4) Théorie des ensembles
   - Axiomes de ZF. Ordinaux et induction transfinie. L'ensemble des entiers.
   - Axiome du choix. Cardinaux. Un exemple de preuve de consistance relative : l'axiome de fondation.

Bases mathématiques et algorithmes de base du traitement des images digitales

(Antonin Chambolle)

Description Après une discussion sur la structure des images 2D et 3D, on examinera de quelle manière de l'information utile peut être extraite de ces images. Deux types de problèmes seront discutés : à titre d'introduction, on examinera d'abord le problème du lissage d'image (un des plus simples, mais des plus instructifs). On décrira les algorithmes qui prétendent « lisser » une image de manière à pouvoir supprimer le bruit ou extraire des informations locales (gradient, courbure locale, etc.). On montrera que ces algorithmes peuvent se formuler comme des équations aux derivées partielles et on procèdera à la classification de ces équations selon leurs performances théoriques (propriétés d'invariance) et pratiques. Dans un second temps, on considèrera le problème inverse de reconstruction d'une image dégradée (par du bruit ou/et du flou). On étudiera les problèmes variationnels généralement introduits pour reconstruire ces images (espaces fonctionnels appropriés, existence d'une solution, résolution numérique...)

Objectifs Ce cours se veut une initiation à la modélisation rigoureuse en traitement d'images. Incidemment, il servira d'introduction à l'étude mathématique et numérique des équations aux dérivées partielles de type « mouvement par courbure », ainsi qu'à l'analyse des problèmes variationnels.

Travaux dirigés Des travaux dirigés sur ordinateur (12h) permettront aux élèves de s'initier au traitement numérique des images et de vérifier par eux mêmes le bien fondé de la modélisation et des algorithmes décrits pendant le cours.

Mots clés Lissage itératif, morphologie mathématique, ensembles et lignes de niveau, équations aux dérivées partielles, solutions de viscosité, problèmes inverses, débruitage, déconvolution.

Introduction au calcul formel

(Daniel Lazard)

1) Représentation des données mathématiques sur ordinateur : Problèmes que cela pose et solutions apportées.
2) L'exemple fondamental des polynômes à plusieurs variables et de leur algorithmique.
3) La réalisation de ce qui précède en Maple.
4) Applications, notamment en géométrie, robotique, théorie de Galois, algèbre différentielle.

Commentaires La partie « théorique » constituée par les points 1/ et 2/ consiste à expliquer comment marchent les systèmes de calcul formel, tant au plan informatique (représentation et gestion des données) que mathématique (algorithmes). Les algorithmes étudiés seront pris parmi les suivants : factorisation, pgcd de polynômes, résultant, résolution de systèmes polynomiaux, intégration des fractions rationnelles, calcul modulaire et p-adique.

La partie « pratique » constituée par les points 3/ et 4/ se fera sur machine. Elle consistera, pour une part, en l'utilisation de ce qui précède pour des applications pratiques d'origines diverses (y compris mathématique). Pour une autre part, cette partie pratique sera consacrée à l'implantation d'algorithmes du calcul formel, ce qui conduira à comparer le langage Axiom avec l'approche classique de Maple avec des approches typées et compilables « à la Axiom ».

Prérequis d'algorithmique

(Jacques Stern)

Il s'agit d'un complément au cours d'algorithmique et programmation, destiné principalement aux élèves n'ayant pas suivi l'option informatique des classes préparatoires et donné en parallèle durant les premières semaines.

1) Structures de données et stratégies de programmation.
   - Listes, files, piles.
   - Diviser pour régner, programmation dynamique, algorithmes gloutons.
   - Arbres.
   - Recherche par dichotomie.
2) Tri
   - Insertion, sélection.

- Fusion.
- Structure de tas, tri par tas.
- Tri rapide.
- Tris stables.
- Borne inférieure.

3) Recherche de motifs
   - algorithme naïf.
   - Rabin-Karp.
   - Knuth-Morris-Pratt.
   - Boyer-Moore.

Algorithmique et programmation

(Jacques Stern)

Le cours présente de front les structures de données et les principes de conception des algorithmes ainsi que la programmation en langage C.

1) Machines, algorithmes, programmes.
   - Machines abstraites : complexité, correction, terminaison ; problème de l'arrêt.
   - Programmation : structures de contrôle, itération et récursion, types, pointeurs, allocation mémoire.
   - Exemples simples d'évaluation de complexité et de preuves de programme.
2) Flottants
   - Évaluation d'un polynôme.
   - Transformation de Fourier rapide.
   - Applications.
3) Entiers
   - Pgcd,pgcd étendu.
   - Exponentielles modulo, test de primalité de Miller-Rabin.
   - Algorithme RSA.
   - Factorisation : méthode rho.
   - Factorisation des polynômes ; algorithme de Berlekamp.
4) Algorithmes de recherche
   - Hachage.
   - Arbres de Recherche.
   - Arbres équilibrés, AVL, bicolores, 2-3-4.
5) Graphes
   - Fermeture transitive, composantes fortement connexes, tri "topologique".
   - Plus courts chemins Dijkstra, Bellman-Ford, Warshall-Floyd.
6) Flots
   - Ford-Fulkerson.
   - Tarjan, Dinic.
7) Algèbre linéaire
   - Résolution d'équations : décomposition LUP.
   - Inversion de matrices.
   - Moindres carrés.
   - Réseaux à coordonnées entières ; algorithme LLL.

Langages de programmation et compilation

(Patrick Cousot)

Dans ce cours on étudie les principaux concepts des langages de programmation et leur compilation, c'est-à-dire la traduction d'un langage de haut niveau en langage machine. La maîtrise de ce concept fondamental de l'informatique permet de comprendre la programmation en profondeur. La réalisation d'un compilateur pour un mini langage fonctionnel en travaux dirigés est l'occasion de mettre en pratique toutes les connaissances acquises en informatique jusqu'alors.

Plan du cours :

- Rappels sur la programmation fonctionnelle en CAML ;
- Principe de fonctionnement d'un compilateur ;
- Expressions régulières et analyse lexicale. Grammaires algébriques et analyse syntaxique (algorithme de Earley, analyse ascendante LR(k)) ;
- Typage, polymorphisme. Vérification et inférence de type à la Hindley-Milner-Damas (CAML) ;
- Valeurs et actions sémantiques. Grammaires attribuées ;
- Désignation des objets et environnements d'exécution. Déclaration et portée des identificateurs. Modes de passage des paramètres ; Récursivité, structure de la pile d'exécution et du tas en PASCAL, CAML et JAVA ;
- Production et optimisation de code intermédiaire ;
- Production de code machine, allocation de registres, cas d'une machine avec pipeline ;
- Analyse statique de programmes. Interprétation abstraite.

Notes de cours : Disponibles sur la toile à l'adresse
http://www.dmi.ens.fr/~cousot/cours/compilation.

La référence bibliographique principale est :

[1] R. Wilhelm & D. Maurer. *Les compilateurs : théorie, construction, génération*. Masson, Paris, 1994.

Théorie de l'information : principes, outils et applications

(Jean Vuillemin)

Ce cours explore une coupe verticale au travers des nombreuses disciplines scientifiques liées au traitement automatique de l'information de la physique digitale à l'informatique, en passant par l'électronique, l'algèbre et les télécommunications. Chaque sujet parcouru est entrevu au travers d'un exemple significatif, choisi pour son apport à la cohérence de la vue d'ensemble.

- Forme des circuits mathématiques
  - Multiplexeur, registre synchrone et règles d'assemblage des circuits digitaux synchrones. Représentation des circuits combinatoires par les BDD - Binary Decision Diagram.
  - TD : conception d'une montre numérique.

- Algèbre binaire
  - Algèbre de Boole et treillis des nombres. Arithmétique binaire par les poids faibles : les entiers 2-adiques 2Z. Arithmétique binaire sans retenue : l'anneau F2[z].
  - TD : inventaire des algèbres binaires.
- Circuit électronique
  - Transistor cMOS. Mémoires, portes logiques et communications. Règles du dessin électronique sur silicium. Horloge isochrone. Progrès technologique et lois de Moore.
  - TD : schémas électriques et dessin au micron d'un additionneur binaire en série.-
- Arithmétique sur silicium
  - Additionneurs et multiplicateurs, en série et en parallèle. Compromis optimaux surface/temps.
  - TD : calcul des carrés et des racines carrées sur 2Z et sur F2[z].
- Fonction des circuits digitaux
  - Fonction séquentielle et circuit en ligne. Table de vérité : circuit fini et table algébrique. Continuité ultra métrique et validation d'horloge.
  - TD : synthèse et vérification de circuits digitaux synchrones.
- Machines universelles
  - Calcul séquentiel et microprocesseur. Programmation et montre numérique.
  - Calcul massivement parallèle et logique programmable. Systèmes reconfigurables.
  - TD : conception d'un FPGA - Field Programmable Gate Array.
- Nombre réel calculable
  - Thèse de Church et Turing. Limites au calcul automatique. Circuits infinis calculables. Le corps dénombrable R des réels calculables. Représentations redondantes : binaire et fractions continues.
  - TD : arithmétique en ligne, par les poids forts.
- Physique digitale
  - Mesure physique, échantillonnage et numérisation. Conversion analogique/digital. Calorimêtre numérique. Identification de lignes droites dans les images digitales.
  - TD : circuit de calcul de la transformée rapide de Hough.
- Télécommunications
  - Théorie de Shannon. Compression suivant l'entropie et algorithme de Huffman. Contrôle des erreurs par codage algébrique. Codes de Viterbi.
  - TD : codeur / décodeur pour les codes de Haming et de Reed-Solomon.
- Audio et vidéo
  - Saisie, codage et transmission du son numérique. Codage des images. Compression sans perte perceptible à l'oeil : images fixes et séquences.
  - Images stéréographiques.
  - TD : calculs du standard JPEG - Joint Photographic Expert Group.

Langages formels, calculabilité, complexité et analyse d'algorithmes

(Paul Gastin)

1) Langages formels
   1.1. Automates finis et langages reconnaissables. Lemme d'itération. Propriétés de fermeture ;

1.2. Langages rationnels. Théorème de Kleene ;
1.3. Équivalence d'automates et minimalisation ;
1.4. Automates à pile, grammaires et langages algébriques, lemme d'Ogden, propriétés de fermeture.

2) Calculabilité
2.1. Machines de Turing ;
2.2. Machines RAM ;
2.3. Fonctions récursives ;
2.4. Décidabilité et indécidabilité.

3) Complexité
3.1. Complexité en temps et en espace ;
3.2. Classes de complexité ;
3.3. Théorèmes de hiérarchie ;
3.4. Réduction et complétude ;
3.5. Problèmes NP-complets.

4) Analyse d'algorithmes
4.1. Coût en temps et en espace ;
4.2. Calcul du coût ;
4.3. Coût au pire et coût en moyenne ;
4.4. Coût amorti ;
4.5. Coût asymptotique.

Bibliographie :

[1] C. Froidevaux, M.-C. Gaudel, M. Soria, *Types de données et algorithmes.* Édiscience international 1993.
[2] C.H. Papadimitriou, *Computational complexity.* Addison-Wesley 1994.
[3] J. Stern, *Fondements mathématiques de l'informatique.* Mc Graw Hill 1990.

Bases de données

(Nicolas Spyratos)

Le but de ce cours est de présenter les aspects fondamentaux des systèmes de gestion des bases de données, à travers le modèle relationnel, ainsi que les nouvelles perspectives qui s'ouvrent dans ce domaine. Les thèmes suivants sont abordés :

1) Modèle relationnel :
– Définition d'une base de données : tables, schéma de base ;
– Les requêtes : algèbre de relations, calcul relationnel, le langage SQL, optimisation ;
– Les mises à jour : transactions, accès concurrents, reprise sur panne ;
– Les contraintes d'integrité : dépendances fonctionnelles et leur système d'inférence ; relation universelle et modèle d'instances faibles ;
– La conception du schéma : décomposition sans perte d'information, sans perte de dépendances, formes normales ;

2) Nouvelles perspectives :
– Modèles à objets, modèles déductifs. Les bases de données et la toile ; intégration d'informations hétérogènes.

Bibliographie :

[1] M. Levene et G. Loizou. *A Guided Tour of Relational Databases and Beyond*. Springer-Verlag, 1999.

[2] R. Ramakrishnan. *Database Management Systems*. McGraw-Hill 1998.

[3] S. Abiteboul, R.Hull et V. Vianu. *Foundations of Databases*. Addison-Wesley 1995.

Sémantique des langages de programmation

(Patrick Cousot)

Le cours est une première introduction à la définition formelle de la sémantique des langages de programmation et à la preuve de programmes. Tous les styles de sémantiques sont abordés dans une approche unifiée qui donne une compréhension synthétique du domaine où les sémantiques sont déduites constructivement les unes des autres en utilisant des techniques d'approximation issues de l'interprétation abstraite.

Plan du cours

– Grammaires algébriques, langages finis et infinis, théorèmes de Schtüzenberger et Nivat, syntaxe concrète et abstraite ;
– Définition d'un ensemble fini/infini par une condition de clôture, par point fixe, par un système formel ; Induction, co-induction, bi-induction, syntaxe et méta-sémantique d'un système formel bi-inductif ;
– Treillis et points fixes, correspondances de Galois, approximation discrète, éléments d'interprétation abstraite ;
– Sémantique opérationnelle transitionnelle ;
– Sémantique opérationnelle naturelle de traces finies et infinies, approximation angélique et démoniaque ;
– Sémantiques relationnelles naturelle, angélique et démoniaque ;
– Sémantiques dénotationnelles naturelle (Plotkin), angélique (Hoare) et démoniaque (Smyth), cas particulier des langages déterministes (Scott) ;
– Domaines de Scott, sémantique du lambda-calcul ;
– Sémantiques des plus faibles pré-conditions totalitaire et libérale ;
– Logique de Hoare pour la correction totale et partielle ;
– Éléments de sémantique du parallélisme.

Les livres introductifs au domaine se spécialisent presque toujours sur un type particulier de sémantique, comme par exemple :

[1] C. A. Gunter, *Semantics of Programming Languages, Structures and Techniques*. MIT Press, 1992.

[2] M. Hennessy. *The Semantics of Programming Languages An Elementary Introduction using Structural Operational Semantics*. John Wiley & Sons, 1990.

Pour une présentation succinte des idées développées dans le cours, consulter :

[1] P. Cousot. *Constructive Design of a Hierarchy of Semantics of a Transition System by Abstract Interpretation.* Electronic notes in theoretical computer science, vol. 6, 1997. http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume6.html, 25 pages.

Systèmes

(Jacques Beigbeder)

- Compléments sur l'utilisation d'Unix : courrier électronique, forum, Internet, éditeurs de textes, programmation shells, etc.
- Programmation Unix en C ; les debuggers (dbx, xdbx, ups) ; make. Les librairies ;
- La programmation shell ;
- Gestion des disques ; entrées-sorties fichiers ;
- Les devices ;
- Processus et signaux ; primitive `fork ()` ;
- Synchronisation et communications entre process : pipes, sémaphores, mémoire partagée ;
- Les réseaux Ethernet, IP, TCP. Internet. Communication par sockets ;
- Communications par RPC ;
- Les processus légers.

Introduction à l'analyse économique

(Pierre-Yves Geoffard)

1) Introduction
   L'objet du cours est d'introduire aux méthodes de l'analyse économique contemporaine. L'étude de certaines questions actuelles de politique économique nécessite une familiarisation progressive avec un certain nombre d'outils. Le but n'est pas de passer en revue l'ensemble de ces outils, mais de présenter de manière critique le raisonnement économique et sa pertinence (ou son impertinence).
   1.1. L'hypothèse principale
   Le choix : que choisit-on ? comment choisit-on ? les incitations ; le choix rationnel. L'individualisme méthodologique ; la science économique se définit-elle par son objet ou par sa méthode ?
2) La demande
   2.1. Première formalisation
   Théorie du choix rationnel : un seul individu ; qu'est-ce qui dépend de nous ? qu'est-ce qui est exogène ? (cadre statique et certain).

   Exemple d'application comparaison d'un impôt sur un bien ou d'un impôt sur le revenu.
   2.2. La fonction de demande
   Agrégation des décisions individuelles (Note sur les techniques mathématiques et les questions ouvertes). Première introduction à l'économétrie : comment estimer une fonction de demande ? Comment s'assurer que les hypothèses retenues ne sont pas immédiatement démenties par l'observation ? Comment et pourquoi mesurer l'élasticité ?

   Exemple d'application : le ticket "modérateur" sur les dépenses de santé.

2.3. L'échange pur
Première introduction au raisonnement en équilibre général. Économie du bien-être, critère de bien-être social, notion de surplus. Une brève histoire de l'utilitarisme, de ses forces et de ses paradoxes.

3) L'offre la firme
La vision « réduite » de la firme : ensemble de production, fonction de coût, objectif de la firme. La pauvreté de cette représentation, sa puissance.

4) L'équilibre partiel
Fonction d'offre d'un bien, équilibre sur le marché d'un bien. Analyse en surplus. Le surplus, le profit. Le monopole ou la concurrence parfaite. L'effet distortionnaire d'une taxe.

5) L'équilibre général
Comment taxer de la manière la moins inefficace ? Nécessité de considérer l'équilibre simultané de l'ensemble des marchés. L'équilibre général, retour sur l'économie du bien-être. Questions auxquelles la théorie (à ce stade de développement) ne permet pas de répondre : que faire lorsque l'État n'observe pas certaines variables ? les effets dynamiques : comment (et pourquoi) taxer le capital ?

6) Avec le temps ...
6.1. Le cycle de vie
La décision intertemporelle. Le capital, son accumulation, sa distribution. L'optimisation sur le cycle de vie. La demande d'épargne, les mesures de l'élasticité, les enjeux en termes d'efficacité à long terme.
6.2. Omni generationes
Un outil pour étudier le financement des retraites : le modèle à générations imbriquées.

7) ... tout s'en va ?
Les obstacles au bon fonctionnement des marchés : l'asymétrie d'information (les voitures d'occasion) ; les coûts de transaction, les marchés manquants, les externalités (vaccins) ; les biens publics (le digicode).

Problèmes de coordination : introduction à la théorie des jeux (dilemme du prisonnier). Choix social, modèles d'enchères, modèles de vote. Perte irréductible d'efficacité sociale en présence d'asymétries d'information : introduction à l'optimum de second rang.

Ordre de grandeur en physique

(Stéphane Fauve)

Ce cours est destiné à familiariser les étudiants avec les raisonnements qualitatifs et l'évaluation d'ordres de grandeur en physique. L'analyse dimensionnelle ainsi que son application à la recherche de solutions auto-similaires et leur lien avec les lois d'échelle en physique seront présentées de façon assez détaillée. Les exemples seront choisis de manière à aborder une variété de sujets aussi grande que possible.

1) Analyse dimensionnelle et similarité :
   - Analyse dimensionnelle ;
   - Similarité de première et seconde espèces ;
   - Solutions auto-similaires et lois d'échelle.
2) Exemples choisis parmi les sujets suivants :
   - Ordres de grandeur en physique quantique ;
   - Comptage du nombre d'états microscopiques et conséquence sur l'ordre de grandeur d'un phénomène macroscopique ;

– Diffusion d'une onde par des inhomogénéités : les différents régimes de diffusion en fonction de la longueur d'onde ;
– Ordres de grandeur relatifs à quelques phénomènes transports : viscosité, conductivité électrique et thermique ;
– Lois d'échelle relatives au transport turbulent ;
– Quelques ordres de grandeur relatifs à divers objets astrophysiques ;
– Bilans énergétiques de la terre.

Introduction à la biologie

(Régis Ferrière, Pierre Sonigo, François Taddei)

Ce cours propose une introduction aux « grandes questions » de la biologie. Tout en survolant une palette très large de notions de base, l'objectif du cours consiste à mettre en lumière les domaines les plus ouverts et à fournir 'matière à réflexion' (réflexion sur les enjeux de la pratique expérimentale en biologie, et sur le rôle de la théorie mathématique dans notre compréhension du vivant).

Responsable du cours : Régis Ferrière (Laboratoire d'écologie, E.N.S.),
regis.ferriere@snv.jussieu.fr.

Enseignants : Régis Ferrière,
Pierre Sonigo (Institut Cochin de Génétique Moléculaire,
sonigo@cochin.inserm.fr),
François Taddei (Institut Jacques Monod,
taddei@ijm.jussieu.fr).

Programme :

1) Introduction à la biologie moléculaire
Le dogme central de la biologie moléculaire. Structure de l'ADN. La régulation : opéron lactose.
2) Évolution des taux de mutation
Évolution expérimentale chez les bactéries et modélisation. Pathogénèse et cancer.
3) Introduction à l'immunologie
Synthèse des anticorps, théorie de la sélection clonale. Immunité cellulaire.
4) Développement et différenciation cellulaire
Théories du développement embryonnaire. Gradients et information de position. Gènes homéotiques. Analyse critique.
5) Équilibre hôte-pathogène
Relations hôte-virus. SIDA. Émergence des nouveaux pathogènes.
6) Dynamique et invasions des populations
Régulation des populations. Systèmes dynamiques, bifurcations, études expérimentales. Théorie ergodique et critères d'invasion.
7) Évolution de la coopération
Théorie des jeux. Conflit et coopération : les grandes transitions de l'évolution. Modèles stochastiques spatialisés.
8) Cycles de vie et dynamiques adaptatives
Évolution de la sénescence et de la dispersion. Théorie des dynamiques adaptatives en dimension 1.
9) Coévolution
Dynamique adaptative des associations mutualistes. Évolution de la virulance et de la résistance.
10) Repliement des protéines
Passage de l'information d'une dimension à trois dimensions.
11) Chaperones et développement
Équilibres ponctués. Protéines de choc thermique. Développement.
12) Évolution du vieillissement Loi de Gompertz. Tradeoff. Dégénérescence neuronale.

Introduction à la dynamique hamiltonienne

(Patrice Le Calvez)

- Formalisme lagrangien, formalisme hamiltonien, transformée de Legendre. Exemples de systèmes hamiltoniens ;
- Étude du cas linéaire ;
- Section de Poincaré et application de premier retour au oisinage d'une orbite périodique ; Étude des orbites périodiques hyperboliques. Théorème de la variété stable, intersections homoclines, création de fers à cheval ;
- Dynamique au voisinage d'une orbite périodique (en dimension 4). Forme normale de Birkhoff, courbes invariantes, orbites de Birkhoff, ensembles d'Aubry-Mather ;
- Étude du billard convexe.

Quelques thèmes choisis des milieux aléatoires.

(Alain-Sol Sznitman)

L'étude asymptotique de processus stochastiques dont les mécanismes d'évolution sont influencés par un environnement lui-même aléatoire constitue un thème central de la théorie des milieux aléatoires. Durant les deux dernières décennies, il est apparu de manière récurrente que la présence de poches atypiques dans le milieu, où certaines valeurs propres sont anormalement basses, joue un rôle prépondérant dans diverses questions. Ce mini-cours se propose d'illustrer certaines de ces idées dans le cas de marches aléatoires en milieu aléatoire et/ou dans celui du mouvement brownien en présence d'obstacles poissonniens.

Representation theory using D-modules.

(Masaki Kashiwara)

Abstract: In this course, I will explain the role of $\mathcal{D}$-modules in representation theory. $\mathcal{D}$-modules give a connection between representation theory and the geometry of the flag manifold. For example, this gives a classification of Harish-Chandra modules by geometric data on the flag manifold. After the group theoretic interpretation, we have a Langlands classification.

The audience is required to have a knowledge of semisimple Lie algebras, and to have a general picture on the representation theory from the geometric point of view.

Références :

[1] M. Kashiwara. *$\mathcal{D}$-modules and representation theory of Lie groups.* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 43, no.5 (1994) 1597-1618.

[2] M. Kashiwara. *Representation theory and $\mathcal{D}$-modules on flag varieties.* Astérisque 173-174,Orbites Unipotentes et Représentations, Soc. Math. France (1989) 55-109.

[3] M. Kashiwara & W. Schmid. *Quasi-equivariant $\mathcal{D}$-modules, equivariant derived category, and representations of reductive groups.* Lie theory and Geometry in honor of Bertram Kostant, Progress of Mathematics, 123 (1994) 457-488.

Introduction à la géométrie algorithmique

(Michel Pocchiola)

L'objectif du cours est de présenter les fondements de la géométrie algorithmique et de la pratique du calcul géométrique. L' évaluation des étudiants sera faite sur la base d'un examen écrit et d'un projet informatique écrit en CGAL (bibliothèque C++ d'algorithmes géométriques développée dans le cadre d'un projet Esprit LTR).

1) Qu'est-ce que la géométrie algorithmique?
2) Tri et recherche ;
3) Échantillonnage aléatoire/algorithmes incrémentaux randomisés ;
4) Arrangements d'hyperplans et d'hypersurfaces ;
5) Polytopes convexes/programmation linéaire ;
6) Recherche simpliciale ;
7) La bibliothèque d'algorithmes géométriques CGAL.

Références

[1] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec. *Algorithmic geometry.* Cambridge University Press, UK, 1998.

[2] CGAL Consortium. *CGAL Reference Manual.* 1998. Hervé Bronnimann, Stefan Schirra, and Remco Veltkamp, editors. CGAL R1.0. http://www.cs.ruu.nl/CGAL.

[3] Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke. *Handbook of Discrete and Computational Geometry.* CRC Press, 1997.

[4] K. Mulmuley. *Computational Geometry: An Introduction Through Randomized Algorithms.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.

[5] G. M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*, volume 152 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.

Lambda-calculs et domaines

(Pierre-Louis Curien)

Ce cours s'intéresse à la syntaxe et à la sémantique des langages de programmation à partir d'un calcul extrêmement sobre et pourtant difficile : le lambda-calcul et ses versions typées. Cet outil introduit en logique dans les années 30 a rencontré l'informatique dans les années 60, qu'il s'agisse de la spécification formelle de langages de programmation comme ALGOL ou de la conception de langages de programmation tels que LISP ou CAML.

On abordera les principaux théorèmes syntaxiques du lambda-calcul : confluence, standardisation, résultats de terminaison. Puis on étudiera les modèles du lambda-calcul : pour ce faire, le langage de la théorie des catégories sera utilisé. Les premiers modèles du lambda-calcul, dus à Scott, sont des ensembles partiellement ordonnés où la relation d'ordre modélise les approximations successives d'un calcul, comme lors des dépliages successifs d'une définition récursive.

Interpréter un langage dans un modèle s'apparente à une compilation, et les modèles offrent ainsi des occasions de retour sur la syntaxe : machines abstraites pour l'exécution des programmes, preuves de proprietés de programmes. Dans le même ordre d'idées, ce sont des observations sur un modèle du lambda-calcul qui ont conduit Girard à l'introduction de nouveaux connecteurs en logique exprimant un contrôle sur l'usage des hypothèses dans les démonstrations.

Support de cours :

[1] *Domains and Lambda-calculi.* R. Amadio et P.-L. Curien. Cambridge University Press, 1998.

Et aussi :

[1] *Semantics of programming languages.* C. Gunter. MIT Press, 1992.

[2] *Categories, types and structures.* A. Asperti and G. Longo. MIT Press, 1991.

La référence sur le lambda-calcul est :

[1] *The Lambda-calculus.* H. Barendregt. North Holland, 1984.

Pour les catégories, lire les premiers chapitres d'un livre tel que :

[1] *Toposes, Triples and Theories.* M. Barr and C. Wells. Springer, 1985.

[2] *Sheaves in Geometry and Logic: a first introduction to topos theory.* S. Mac Lane and Ieke Moerdjik. Springer, 1992.

Logique informatique

(Jean Goubault-Larrecq)

1) Lambda-calcul et langages fonctionnels :
   - lambda-calcul, sémantique opérationnelle (réduction) ; item confluence, expressivité. Combinateurs de point fixe et récursion ;
   - stratégies de réduction : par nom, par nécessité, relation avec les langages dits paresseux (Miranda, Haskell) ; par valeur, relation avec les langages stricts (Lisp, ML, autres) ;
   - modèles du lambda-calcul, sémantique dénotationnelle (en style direct) ;
   - sémantique dénotationnelle en style de passage par continuations. Correspondance entre stratégies de réduction et sémantiques par continuation. Correspondance entre sémantique par continuation pour l'appel par valeur et plus faibles préconditions de Dijkstra.
2) Aspects logiques :
   - lambda-calcul simplement typé ;
   - correspondance de Curry-Howard entre ce dernier et les preuves en logique minimale propositionnelle ;
   - extension à la logique classique, et gestion d'exceptions ;
   - la construction `call/cc` de Scheme, et retour sur le passage de continuations : opérateur C de Felleisen, $\lambda\mu$-calcul de Parigot. Relation avec les traductions par double négation (Gödel, Kolmogorov) ;
   - lambda-calcul simplement typé avec récurseurs : le système T de Gödel, correspondance avec l'arithmétique de Peano-Heyting du premier ordre ;
   - lambda-calcul typé du second ordre : le système F de Girard-Reynolds, correspondance avec la logique intuitionniste d'ordre deux ;
   - propriétés de normalisation forte, élimination des coupures ;

  - retour sur les continuations : la A-traduction de Friedman, application à la conservativité de la logique classique sur la logique intuitionniste pour les formules Π^0_2, d'après Murthy.

3) Aspects informatiques.
  - machines (interprètes) : calculs à substitutions explicites, machines à réduction de graphe, machines à environnement (piles), notion de clôture ;
  - stratégies de compilation : par évaluation partielle d'interprètes, par passage de continuations ;
  - gestion de la mémoire, garbage collection : mark-and-sweep, stop-and-copy ; le schéma de compilation "Cheney on the MTA" de Baker, trampolines et relation avec les continuations ;
  - continuations : outil fondamental ou nuisance ? Comment compiler `call/cc`, effets sur l'efficacité ;
  - comment éviter de coder `call/cc`, tout en gardant un pouvoir expressif suffisant : coroutines. Correspondance avec la logique soustractive, d'après Crolard.

Références :

[1] Jean-Louis Krivine. *Lambda-calcul, types et modèles.* Masson, 1992.

[2] Jean-Yves Girard, Yves Lafont & Paul Taylor. *Proofs and Types.* Cambridge University Press 1989.

[3] Christian Queinnec. *Les langages Lisp.* InterÉditions, 1994.

[4] Chetan R. Murthy. *Classical Proofs as Programs: How, What, When, and Why.* In *Proceedings Summer Symp. on Constructivity in Computer Science*, San Antonio, TX, USA, 19–22 June 1991, J. P. Myers & M. K. O'Donnell (eds), Lecture Notes in Computer Science 613, pp. 71–88. Springer-Verlag, 1992. ftp://ftp.cs.cornell.edu/pub/murthy/cincs91.dvi.Z

[5] Henry G. Baker. *CONS Should Not CONS Its Arguments, Part II: Cheney on the M.T.A.* ACM Sigplan Notices 30:9, 1999. http://cristal.inria.fr/~weis/jfla99/ps/crolard.ps

Réalisation de système matériel

(Mark Shand, Jean Vuillemin)

Contenu : Les circuits sont indispensables aux ordinateurs, et à tout système digital. Le but de l'enseignement est une initiation pratique à la conception et à la réalisation d'un circuit synchrone haute performance, à mener en binôme. La réalisation de la partie matérielle se fera sur système reconfigurable (coprocesseur Pamette à base de mémoire sRAM et logique programmable FPGA - Field Programmable Gate Array). Pamette sert de porte de communication externe à haut débit, et permet (dans certains cas) de réaliser de 10 a 100 fois plus de calculs que le processeur hôte.

Déroulement : Une initiation à la programmation des FPGA sur Pamette est donnée, et les projets sont définis en accord avec les enseignants, qui suivent le projet jusqu'à la réalisation finale.

Thèmes de projets : microprocesseur, codes correcteurs, compression, audio, vidéo analyses d'images, cryptographie, arithmétique, analyse numérique, mesure physique, ...

Simulation et modélisation de réseaux de communication

(François Baccelli)

Ce cours est une introduction aux méthodes de simulation et de modélisation mathématique des réseaux de communication.

Les exemples sont issus de trois grandes classes de réseaux :

- les réseaux à commutation de paquets tels que Internet ;
- les réseaux locaux et leurs protocoles, notamment Ethernet ;
- les réseaux à commutation de circuits tels que le réseau téléphonique.

Dans la partie sur la simulation à événements discrets, les points suivants seront abordés : tirage de variables aléatoires, table d'événements, intervalle de confiance.

Des projets de programmation de simulateurs seront proposés, notamment sur le contrôle de flux, (TCP-IP), les protocoles Aloha et Ethernet, les réseaux à commutation de paquets multiclasses etc.

La partie sur la modélisation mathématique comportera :

- Un chapitre de modélisation markovienne où l'on étudiera :
  - Les chaînes de Markov à temps discret (comportement asymptotique, critères de stabilité) et leur utilisation pour la modélisation de files d'attente et de protocoles ;
  - Les chaînes de Markov à temps continu (construction, réversibilité, forme produit) et leur utilisation pour la modélisation de réseaux à commutation de paquets (réseaux de Jackson et de Kelly) et de réseaux à commutation de circuits (débordement) ;
- Un chapitre sur l'approche algébrique où l'on introduira le semi-anneau et sa théorie spectrale, la mise en équation des graphes d'événements et les applications, notamment au contrôle de flux par fenêtre.

9. Pour tous les étudiants du M.M.F.A.I.

Cours d'anglais pour les mathématiques

(Catriona Maclean)

Ce cours d'anglais mathématique suppose déjà quelques connaissances d'anglais. Dans un premier temps, nous aborderons le vocabulaire mathématique en apprenant à dire en anglais une grande quantité de mots et d'expressions techniques typiques, et à lire couramment les formules. On traduira oralement de français en anglais des tables de matières de livres et des exercices de mathématiques. Dans un deuxième temps, les étudiants feront des petites présentations impromptues, par exemple raconter en anglais en dix minutes quelque chose d'intéressant vu dans les cours de la matinée, ou résoudre un exercice et présenter la solution en anglais au tableau. Dans un troisième temps, chaque élève fera un exposé de 20-30 minutes préparé à l'avance, et l'année se terminera avec des rédactions ou des traductions écrites de français en anglais.

10. Le cursus mixte math-physique

Le cursus mixte math-physique, créé en septembre 1992, résulte d'un accord entre les magistères M.M.F.A.I. (Magistère de Mathématiques Fondamentales & Appliquées et d'Informatique) et M.I.P. (Magistère Interuniversitaire de Physique). Il est destiné à la formation des étudiants de première année souhaitant apprendre des mathématiques et de la physique. Le cloisonnement actuel de l'enseignement universitaire est en effet de création relativement récente, au moins à l'échelle longue de l'histoire de l'Université. Ainsi la séparation entre concours d'entrée littéraire et scientifique n'existait pas jusqu'au milieu du 19ème siècle. La division entre physique et mathématiques, encore plus récente, ne paraît pas toujours bien justifiée. Par exemple, la mécanique des fluides reste un sujet passionnant d'études pour les mathématiciens qui établissent, quand c'est possible, des théorèmes d'existence des équations d'évolution, des EDP particulièrement coriaces, alors que les mathématiciens appliqués cherchent à optimiser les méthodes numériques de solution de ces équations dans les écoulements complexes qui intéressent les ingénieurs, les physiciens quant à eux contribuant à l'étude des écoulements turbulents réels par les méthodes expérimentales imaginatives. L'idée du cursus mixte maths-physique est donc bien née au moins en partie de cette reconnaissance de l'existence d'un vaste domaine scientifique qu'on ne peut attribuer exclusivement aux maths, à la physique ou à la mécanique. En revanche, l'idée du cursus est bien de conserver leurs spécificité aux différentes approches, évitant une pseudo-synthèse qui ne serait qu'appauvrissante. Ce cursus jette donc un pont entre maths et physique. Ayant une existence administrative bien définie, il permet aux étudiants qui en ont fait le choix de faire valider cette formation, et leur évite de choisir administrativement dès leur entrée à l'École d'entrer dans la case maths ou dans la case physique.

Les horaires des enseignements principaux dispensés par les deux magistères (cours d'analyse, de probabilité et d'algèbre, cours de mécanique statistique et quantique) ont été harmonisés. D'autre part deux enseignements sont spécifiques au cursus :

– *Analyse et modèles mathématiques* [12] (30h)	**J-F. Le Gall**	Pr. E.N.S./Paris 6
– *Ordre de grandeur en physique* [23] (30h : 20h cours + 10h TD)	**S. Fauve** **J. Hare**	Pr E.N.S. MdC E.N.S.

Au cours du second semestre, les élèves, encadrés par les chercheurs, effectuent un projet individuel dans un laboratoire. Il s'agit d'une approche concrète d'un sujet de recherche, si possible à l'interface de la physique et des mathématiques. La soutenance de stage a lieu au cours de journées organisées par l'École, rencontres informelles entre chercheurs et élèves (organisées dans le domaine de Foljuif appartenant à l'E.N.S.).

Le succès au cursus (licences de mathématiques et de physique, admission en deuxième année de magistère, M.I.P. ou M.M.F.A.I.) est assuré par la soutenance du projet individuel et l'obtention de quatre unités de valeur en mathématiques et quatre en physique, à savoir :
- mécanique quantique 1, mécanique statistique 1 ;
- analyse complexe ;
- analyse 1, ou intégrations et probabilités 1 ;
- les deux cours spécifiques du cursus ;
- un cours de niveau licence en maths ou en physique ;
- un cours de niveau maîtrise en maths ou en physique.

Pour l'obtention, en supplément, d'une maîtrise de mathématiques appliquées ou pures, il convient d'ajouter deux cours de mathématiques de niveau maîtrise. En vue de faciliter l'obtention d'une maîtrise de physique en deuxième année, il est souhaitable d'ajouter deux cours de physique de niveau maîtrise.

En cas d'insuccès, l'obtention d'une licence de physique, d'une licence ou d'une maîtrise de mathématiques, pourra être décidée en fonction des résultats obtenus.

N.B. l'équipe enseignante pourra examiner des propositions individuelles de cursus présentées par les étudiants et s'inscrivant dans l'esprit du cursus.