Résolution des équations de degré 5

Gaël Benabou et Éric Colin de Verdière
Sujet proposé par Yves Laszlo

27 mai 1998

Introduction

La résolution des équations algébriques est un très ancien problème. Dès 2000 av. J.C., les Babyloniens, les Chinois et les Indiens savaient résoudre les équations de degré 2. Mais il a fallu attendre le XVIème siècle pour que Cardan et Ferrari résolvent les équations de degré 3 et 4. Au début du XIXème siècle, Abel démontra l'irrésolubilité par radicaux des équations de degré 5, avant que Galois ne caractérise les équations résolubles.

L'objet de cet exposé est de présenter une méthode de résolution des équations de degré 5 à l'aide des fonctions elliptiques.

1 Théorie de Galois, équations de degré 3 et 4

1.1 Théorie de Galois

Soient $k \subset K$ deux sous-corps de $\mathbb{C}$, avec K/k galoisienne. On désigne par $Gal(K/k)$ le groupe des automorphismes k-linéaires de K.

Soit $P \in k[X]$ à racines simples dans $\mathbb{C}$, et K le corps engendré par k et les racines de P. $Gal(K/k)$ agit sur l'ensemble des racines du polynôme P : écrivons en effet $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$; soit $\sigma \in Gal(K/k)$, et x une racine de P. On a :

$$0 = \sigma(P(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sigma(x)^k = P(\sigma(x))$$

Donc on peut voir $Gal(K/k)$ comme un sous-groupe du groupe des permutations des racines de P.

Le théorème de Galois dit que l'application $L \mapsto Gal(K/L)$ est une bijection de l'ensemble des sous-corps L de K contenant k, sur l'ensemble des sous-groupes de $Gal(K/k)$.

Cette correspondance permet de montrer qu'une équation est *résoluble par radicaux* (c'est-à-dire, en termes intuitifs, que ses racines s'expriment au moyen de ses coefficients et des fonctions $+$, $-$, $*$, $/$, et $\sqrt[n]{}$), si et seulement si son groupe de Galois est résoluble.

En particulier, les équations de degré ≤ 4 sont résolubles par radicaux ; on va d'ailleurs expliquer comment les résoudre.

1.2 Résolution des équations de degré 3 et 4

1.2.1 L'équation de degré 3 par la méthode de Cardan

Soit $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3 = 0$ l'équation à résoudre. Déjà, quitte à effectuer le changement de variables qui consiste à changer x en $x - a_1/3$, on peut supposer $a_1 = 0$. Ensuite, l'astuce est de chercher x sous la forme $u + v$. L'équation sera alors vérifiée si l'on a :

$$u^3 + v^3 = -a_3$$

$$uv = \frac{-a_2}{3}$$

On obtient l'équation en u : $u^6+a_3u^3-{a_2}^3/27 = 0$, que l'on sait résoudre. Dans le cas où l'on a trois racines réelles distinctes, on a $a_2 < 0$, et, si on pose

$$\phi = \arccos \frac{-a_3}{2\sqrt{\frac{-a_2^3}{27}}}$$

on a alors les racines z_k de l'équation :

$$z_k = 2\sqrt{\frac{-a_2}{3}} \cos \frac{\phi + 2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2$$

La “division de période” par 3 correspond au fait que l'on prend la racine cubique de u ; on retrouvera ce phénomène un peu plus loin.

1.2.2 L'équation de degré 4 par la méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange est beaucoup plus générale que celle de Cardan. On l'expose ici dans le cas du degré 4. Soit $F = z^4+az^2+bz+c$ un polynôme de degré 4 (par la même transformation que précédemment, on a éliminé le terme en z^3). Soient α, β, γ, δ ses racines. Le polynôme $XY + ZT$ ne prend que trois valeurs par toutes les permutations effectuées sur α, β, γ et δ, qui sont :

$$A = \alpha\beta + \gamma\delta, B = \alpha\gamma + \beta\delta, C = \alpha\delta + \beta\gamma.$$

Mais les expressions $u = A + B + C$, $v = AB + BC + CA$ et $w = ABC$ sont des fonctions symétriques des racines de F, donc s'expriment en fonction de ses coefficients. On peut donc les calculer. Maintenant, trouver A, B, C en fonction de u, v et w revient à résoudre une équation de degré 3, ce que l'on sait désormais faire. Une fois A, B et C calculés, un petit système permet d'obtenir les racines cherchées (sachant que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$).

Dans l'équation de degré 5, on utilisera en quelque sorte cette idée, en cherchant des fonctions qui laissent invariantes les racines d'un polynôme.

Comme $\mathcal{S}_5$ n'est pas résoluble, les équations de degré 5 ne sont généralement pas résolubles par radicaux. On ne peut envisager de "résoudre" ces équations qu'en ajoutant de nouvelles fonctions aux symboles usuels : les fonctions elliptiques.

2 Fonctions elliptiques

L'objet de ce chapitre est d'introduire les fonctions elliptiques. C'est à Abel que l'on doit leur présentation comme des généralisations des fonctions usuelles (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques). Nous introduirons dans cette optique les fonctions de Jacobi et de Weierstrass. Nous verrons ensuite que leur double périodicité est la source de bon nombre de propriétés intéressantes.

2.1 Généralisation des fonctions usuelles

Dans la résolution des équations de degré inférieur à quatre, on sait que les fonctions exponentielle et logarithme suffisent à exprimer les solutions. En effet, on peut écrire $\sqrt[n]{a} = \exp(\frac{1}{n}\ln a)$. Le logarithme peut bien entendu s'écrire :

$$\ln x = \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2}}$$

L'idée de la généralisation est de considérer des fonctions définies par :

$$f(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \tag{1}$$

où P est un polynôme, ainsi que leur réciproque. Lors de la résolution par la méthode de Cardan de l'équation de degré 3, on a utilisé la fonction arccos

qui est du type (1) avec $P(x) = 1 - x^2$. Les fonctions elliptiques (définies au paragraphe suivant) sont aussi des cas particuliers de (1) pour lesquels le polynôme P considéré sera de degré supérieur à trois.
On définit ainsi les fonctions de Jacobi sn, cn et dn grâce aux formules suivantes :

$$u = \int_0^{f(u)} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{2}$$

où z décrit un chemin C^1 quelconque de 0 à $f(u)$, ne passant évidemment pas par les racines du dénominateur, et k est un réel positif $\neq 1$. La fonction $f(u)$ ainsi définie est notée $sn(u)$. On pose également $cn(u) = \sqrt{1 - sn^2 u}$ et $dn(u) = \sqrt{1 - k^2 sn^2 u}$.
De la même manière, on peut définir la fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass par inversion de l'intégrale :

$$u = \int_0^{\mathcal{P}(u)} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \tag{3}$$

où g_2 et g_3 sont tels que le discriminant $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ soit non nul de sorte que les trois racines du dénominateur soient distinctes.

2.2 Fonctions elliptiques et fonctions doublement périodiques

Une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est dite doublement périodique si elle possède deux périodes dont le quotient n'est pas un réel. On définit une fonction elliptique comme une fonction doublement périodique méromorphe. Les fonctions de Jacobi et de Weierstrass sont elliptiques [3]. Grâce au théorème de Mittag-Leffler, la fonction de Weierstrass $\mathcal{P}$ est uniquement déterminée par ses périodes 2ω et $2\omega'$ (fonctions de g_2 et g_3 de (3)), et son unique pôle double en zéro de partie principale $1/z^2$, sachant que $\mathcal{P}(z) - 1/z^2$ s'annule en 0. On peut en déduire la formule suivante [3] :

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left[\frac{1}{z - 2m\omega - 2n\omega'} - \frac{1}{2m\omega + 2n\omega'} \right]$$

Il est facile à partir de ω et ω' de retrouver les coefficients g_2 et g_3 de (3) grâce aux formules [4] :

$$g_2 = 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{w_{m,n}^4}$$

$$g_3 = 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{w_{m,n}^6}$$

où $w_{m,n} = 2m\omega - 2n\omega'$. On introduit alors la fonction σ de Weierstrass :

$$\sigma(z) = z \prod_{(m,n)\neq(0,0)} \left\{ \left(1 - \frac{z}{w_{m,n}}\right) \exp\left[\frac{z}{w_{m,n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w_{m,n}}\right)^2\right] \right\} \tag{4}$$

Cette fonction est liée à $\mathcal{P}$ par la relation :
$\mathcal{P}(z) = -\frac{d^2(\ln\sigma(z))}{dz^2}$
Ces deux fonctions vérifient bon nombre d'autres équations différentielles et/ou fonctionnelles d'un intérêt majeur en vue de la résolution des équations algébriques.

3 Méthode de résolution de l'équation de degré 5

Nous allons maintenant exposer les étapes de la résolution d'une équation générale de degré cinq. Le plan de la résolution est donné par le diagramme suivant, inspiré par la méthode de Perron [5] :

Equation générale
$X^5 + AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E = 0$

$|$

Transformation de Tschirnhausen

$\downarrow$

Equation principale
$z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$

$|$

Polynômes de polyèdres

$\downarrow$

Equation de Brioschi
$y^5 - 10Zy^3 + 45Z^2y - Z^2 = 0$

$|$

Théorème de Perron

$\downarrow$

Equation de Jacobi
$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$

$|$

Fonctions de Weierstrass - Evaluation de périodes

Dans un but théorique, nous n'allons pas exposer ces différentes étapes dans cet ordre.

3.1 Résolution de l'équation de Jacobi

Dans la méthode de Cardan pour résoudre les équations de degré 3, on a vu l'importance de la division par 3 de la période du cosinus utilisé. C'est dans un but similaire que l'on va évaluer la quantité $\sigma(5u)$ où σ est définie par (4). Pour cela, la formule suivante, démontrée par Schwarz et Kiepert, va s'avérer fort utile :

$$\frac{\sigma(5u)}{\sigma^{25}(u)} = \frac{1}{(2!3!4!)^2} \begin{vmatrix} \mathcal{P}' & \mathcal{P}'' & \mathcal{P}^{(3)} & \mathcal{P}^{(4)} \\ \mathcal{P}'' & \mathcal{P}^{(3)} & \mathcal{P}^{(4)} & \mathcal{P}^{(5)} \\ \mathcal{P}^{(3)} & \mathcal{P}^{(4)} & \mathcal{P}^{(5)} & \mathcal{P}^{(6)} \\ \mathcal{P}^{(4)} & \mathcal{P}^{(5)} & \mathcal{P}^{(6)} & \mathcal{P}^{(7)} \end{vmatrix}$$

Si la fonction σ s'annule aux points $u = 2m\omega + 2n\omega'$, ce déterminant s'annule donc aux points $u_{m,n} = \frac{2m\omega+2n\omega'}{5}$ où m et n sont des entiers modulo 5 non tous deux nuls. Notons que la période est bien ici divisée par 5.

Par réduction de ce déterminant et utilisation d'équations différentielles simples vérifiées par $\mathcal{P}$, on obtient l'équation [1] :
$[(\mathcal{P}'')^2 - 12\mathcal{P}(\mathcal{P}')^2]^3 - 16(\mathcal{P}')^4\mathcal{P}''[(\mathcal{P}'')^2 - 12\mathcal{P}(\mathcal{P}')^2] - 64(\mathcal{P}')^8 = 0$
On vérifie très facilement que $\mathcal{P}\ (u_{-m,-n}) = \mathcal{P}\ (u_{m,n})$ (m et n sont toujours calculés modulo 5). On pose :
$y_{m,n} = \mathcal{P}\ (u_{2m,2n}) - \mathcal{P}\ (u_{m,n})$
Grâce aux équations fonctionnelles vérifiées par $\mathcal{P}$, on montre simplement [1] que les 12 valeurs de $y_{m,n}$ sont les douze racines de l'équation :
$5y^{12} - 12g_2y^{10} + 10\Delta y^6 + \Delta^2 = 0$
où l'on a posé $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. Par changement de variables $y^2 = \frac{1}{s}$, on obtient l'équation suivante, dite de Jacobi :

$$s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0 \qquad (5)$$

dont on connaît les solutions $s_{m,n}$ explicitement en fonction de $\mathcal{P}$ et de ses périodes :

$$s_{m,n} = \frac{1}{\left[\mathcal{P}\left(\frac{4m\omega+4n\omega'}{5}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{2m\omega+2n\omega'}{5}\right)\right]^2}$$

Il reste donc à évaluer les périodes de $\mathcal{P}$ en fonction de g_2 et g_3 de (3) pour déterminer complètement les solutions. Pour cela, il existe des méthodes très élégantes fondées sur les courbes elliptiques donnant simplement ces périodes par des calculs d'intégrales curvilignes [4] [3]. D'autres méthodes s'appuient sur des séries hypergéométriques [1].

3.2 Transformations de Tschirnhausen. Passage de l'équation générale à l'équation principale.

Dans la résolution des équations de degré 3 et 4, on a effectué des transformations linéaires sur les variables permettant d'annuler certains coefficients. Cette méthode peut sans difficulté se généraliser. Soit donc $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ une équation quelconque de degré n. On va effectuer sur les racines de cette équation des transformations du type : $y_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \ldots + \alpha_{n-1} x_k^{n-1}$ appelées transformations de Tschirnhausen. En utilisant convenablement les relations de Newton entre coefficients et racines, on va pouvoir annuler effectivement un ou plusieurs coefficients dans le but de faciliter la résolution.
La première méthode de résolution des équations de degré cinq, donnée par Hermite, utilisait une transformation très compliquée permettant de ramener l'équation générale de degré 5 à sa forme dite de Bring-Jerrard :

$$y^5 - A_4 y + A_5 = 0$$

qui nécessitait de prendre une racine cubique et trois racines carrées. La transformation proposée par Kiepert ne nécessite qu'une racine carrée, le but étant d'annuler seulement les coefficients de degré 3 et 4.
Soit $x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0$ une équation générale de degré 5. On va poser :

$$y_k = \alpha_0 + \alpha_1 x_k + x_k^2$$

En élevant cette équation au carré, on exprime y_k^2 en fonction de α_0 et α_1. Annuler les deux coefficients de degré 3 et 4 revient à écrire $\sum y_k = 0$ et $\sum y_k^2 = 0$. Ceci se fait sans difficulté autre qu'extraire une racine carrée.
Le but de la suite de cet exposé est donc de ramener la résolution de cette équation principale à celle de l'équation de Jacobi (5) que l'on sait faire.

3.3 Transformation grâce aux polynômes de polyèdres

Le but de cette section est de passer de l'équation principale à l'équation de Brioschi. Cela consiste à faire une transformation de Tschirnhausen, qui peut être décrite géométriquement par des considérations sur des polyèdres. Cette transformation est décrite par King [1] et Dickson [2].

3.3.1 Quelques notions sur les polyèdres

Soit $\mathcal{R}$ un polyèdre régulier.

Par la projection stéréographique, on peut identifier la sphère unité S^2 et $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bigcup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie naturellement ces ensembles, de sorte que les sommets d'un polyèdre (situés sur S^2) seront considérés comme étant dans $\bar{\mathbb{C}}$.

On peut alors considérer le polynôme unitaire dont les racines sont les sommets du polyèdre. Le *polynôme des sommets* f est le polynôme homogène en u et v obtenu en posant $z = u/v$. Par exemple, le polynôme des sommets de l'octaèdre dont les sommets sont en 0, 1, i, -1, $-i$, ∞, est $uv(u^4 - v^4)$.

De même, on définit le *polynôme des arêtes* T et le *polynôme des faces* H, dont les racines sont les milieux des arêtes et les centres des faces du polyèdre.

Bien sûr, $O_3(\mathbb{R})$ préserve la sphère S^2, donc en identifiant S^2 à $\bar{\mathbb{C}}$, ce groupe agit sur les fonctions de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par : $(g, R) \mapsto R \circ g^{-1}$.

Le *groupe des symétries* G de $\mathcal{R}$ est la partie de $O_3(\mathbb{R})$ qui laisse ce polyèdre invariant.

Il est donc clair que f, T et H sont invariants par G, c'est-à-dire que l'action de G les laisse invariants à un coefficient multiplicatif près.

Dans la suite, on va surtout s'intéresser à l'icosaèdre (le polyèdre régulier à 20 faces). u et v désignent les coordonnées sur le plan projectif (i.e. $z = u/v$).

Théorème 1 *Tout polynôme homogène P en u et v, invariant par le groupe de l'icosaèdre, est un polynôme en les fonctions f, H et T de l'icosaèdre, et est homogène de degré de la forme $12\alpha + 20\beta + 30\gamma$ (avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$). En d'autres termes, il existe un polynôme Q de trois variables tel que :*

$$P(u, v) = Q(f(u, v), H(u, v), T(u, v))$$

De plus on a l'identité : $T^2 = 1728 f^5 - H^3$.

(les nombres 12, 20 et 30 sont les degrés des polynômes f, H et T.)

On peut aussi donner les expressions explicites :

Sommets : $f = uv(u^{10} + 11u^5v^5 - v^{10})$

Arêtes : $T = u^{30} + 522u^{25}v^5 - 10005u^{20}v^{10} - 10005u^{10}v^{20} - 522u^5v^{25} + v^{30}$

Faces : $H = -u^{20} + 228u^{15}v^5 - 494u^{10}v^{10} - 228u^5v^{15} - v^{20}$

3.3.2 Des octaèdres dans l'icosaèdre

Les 30 arêtes de l'icosaèdre peuvent être réparties en 5 classes de 6, de façon à ce que, dans chaque groupe, les directions des arêtes soient orthogonales (cf. figure). Considérons une de ces classes, et joignons les milieux de ses 6 arêtes. On obtient un octaèdre régulier. Il se trouve que ces octaèdres sont préservés par le groupe des symétries de l'icosaèdre. Numérotons ces classes de 0 à 4.

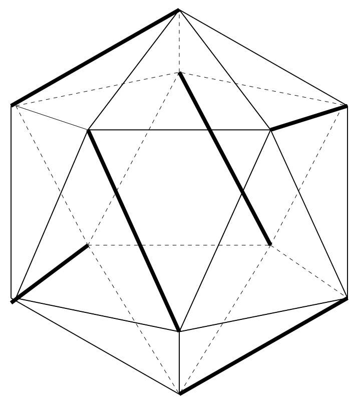

FIG. 1 – *L'icosaèdre et les six arêtes qui constituent une classe. Si on relie les milieux des arêtes en gras, on obtient un octaèdre régulier.*

Soit t_0 et W_0 les polynômes, des sommets et des faces respectivement, de l'octaèdre 0. Pour $1 \leq k \leq 4$, soit r_k une rotation qui amène l'octaèdre k à l'octaèdre 0. On pose $W_k = W_0 \circ r_k$ et $t_k = t_0 \circ r_k$ (r_k n'est pas unique, mais les t_k et les W_k le sont. Donc les t_k et les W_k sont, au coefficient dominant près, les polynômes des sommets et des faces des octaèdres).

Les fonctions t_k vérifient bien sûr une équation du type

$$t^5 + c_1 t^4 + c_2 t^3 + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 = 0,$$

et les coefficients sont des polynômes homogènes symétriques en les t_k, donc sont invariants par G. À l'aide du théorème, on peut montrer que l'équation est :

$$t^5 - 10 f t^3 + 45 f^2 t - T = 0$$

En prenant pour nouvelle inconnue $y = tf^2/T$, et en posant $Z = f^5/T^2$, on obtient l'équation

$$y^5 - 10 Z y^3 + 45 Z^2 y - Z^2 = 0 \tag{6}$$

Cette équation s'appelle *équation de Brioschi.*

Les polynômes $\sum t_k^r W_k^s$ sont des polynômes invariants par le groupe des symétries de l'icosaèdre. En utilisant le théorème, on voit que les polynômes suivants sont nuls, puisqu'ils sont homogènes de degrés 8, 14, 16, 22 et 28 :

$$\sum W = 0, \sum tW = 0, \sum W^2 = 0, \sum tW^2 = 0, \sum t^2 W^2 = 0 \tag{7}$$

Soient σ et τ des nombres complexes fixés ; posons

$$Y_k = \sigma W_k + \tau t_k W_k \tag{8}$$

D'après les relations précédentes et les formules de Newton, les Y_k sont solutions d'une équation $Y^5 + 5aY^2 + 5bY + c = 0$.

Par un argument analogue à celui qui a permis de montrer (7), on peut calculer a, b, c (en fonction de f, H, T, σ, τ).

Procédons maintenant en sens inverse : partons des coefficients a, b et c. Un calcul permet de trouver les valeurs de f, H, T, σ, τ correspondantes (après extraction d'une racine carrée). En résolvant (6), on obtient les solutions t_k. On veut trouver les valeurs de Y_k par (8) ; c'est possible parce qu'on arrive à déterminer les W_k en fonction des t_k (on trouve $H = W_k(t_k^2 - 3f)$).

Ainsi, on a ramené la résolution de l'équation quintique principale à l'équation de Brioschi.

3.4 Théorème de Perron

La seule chose qu'il reste à faire poour résoudre l'équation générale de degré 5 est de passer de l'équation de Brioschi (6) à l'équation de Jacobi (5). Certains des résultats énoncés ci-dessous n'ont pas été totalement démontrés, car aucune référence à leur sujet n'a été trouvée. Ils paraissent cependant assez vraisemblables. Le résultat final a en tout cas été démontré par Perron [5], la preuve ayant été reprise par King [1]. La résolution des équations de degré 5 par cette méthode est donc bien achevée.
On va considérer cette fois les six diamètres de l'icosaèdre. On en particularise un, par exemple celui qui passe par les pôles nord et sud, et on considère le polynôme qui s'annule précisément aux deux extrémités de ce diamètre. On appelle s_∞ le carré de ce polynôme. Par des transformations géométriques successives sur s_∞, on calcule ainsi des polynômes s_k, $k = 0, ..., 4$, de degré 4 correspondant à chacun des diamètres. Par construction même, et parce que le groupe des isométries de l'icosaèdre agit transitivement sur les diamètres, le polynôme $(s - s_\infty)\prod(s - s_k)$ a des coefficients invariants par ces isométries. Par des considérations analogues à celles qui ont permis d'établir (6), on obtient que les s_k et s_∞ sont (à un coefficient près) racines de :

$$s^6 - 10fs^3 + Hs + 5f^2 = 0$$

qui est une équation de Jacobi (5). Il reste à donner le lien entre les racines de (6) et celles de (5).
On peut voir que le polynôme défini par :

$$(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})$$

est invariant par les isométries de l'octaèdre k. Par un calcul (ou en utilisant un théorème analogue à celui utilisé pour l'icosaèdre), le théorème de Perron [1] [5] montre la relation suivante, qui relie donc très simplement les racines de (6) et de (5):

$$t_k = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(s_\infty - s_k)(s_{k+2} - s_{k+3})(s_{k+4} - s_{k+1})}$$

Les détails du calcul sont donnés par King [1].

Conclusion

Nous avons présenté la méthode générale de résolution des équations de degré 5, en ajoutant une certaine classe de fonctions elliptiques.

On peut se poser la question de savoir si les équations de tout degré peuvent être résolues avec ces fonctions. Jordan a montré que toute équation algébrique pouvait être résolue à l'aide de fonctions modulaires. Mais la méthode exposée ici, si elle peut encore se généraliser pour les équations de degré 6, ne permet sans doute pas d'arriver à des résultats plus généraux.

Références

[1] R.B King : *Beyond the quartic equation*, Birkhaüser 1996

[2] L.E. Dickson: *Modern Algebraic theories*, Sanborn 1930

[3] G. Valiron : *Théorie des fonctions*, Masson 1941

[4] H. Cartan : *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables*, Hermann 1961

[5] O. Perron : *Theorie der algebraischen Gleichungen*, Göschens Lehrbücherei 1951

[6] D. Mumford : *Tata lectures on Theta II*, Birkhaüser 1984

[7] X. Gourdon : *Les maths en tête, Algèbre*, Ellipses 1994