

Fonctions de Belyi :

Exemples, propriétés et applications

Alexandre Zvonkine
(LaBRI, Bordeaux)

Journées de Géométrie Algorithmique

Luminy, 8 – 12 mars 2010

CARTES, HYPERCARTES

ET PERMUTATIONS

1. C'est quoi une CARTE ?

Une carte est un **graphe dessiné** sur une variété orientée et compacte de dimension 2 (sphère, tore, ...) de telle manière que...

1. C'est quoi une CARTE ?

Une carte est un **graphe dessiné** sur une variété orientée et compacte de dimension 2 (sphère, tore, ...) de telle manière que...

- les arêtes ne se coupent pas ;
- le complément du graphe est une union disjointe de régions homéomorphes à un disque ouvert.

1. C'est quoi une CARTE ?

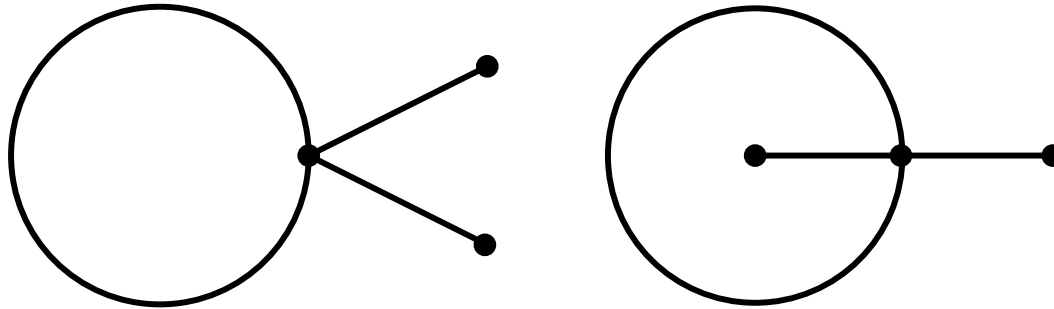
Une carte est un **graphe dessiné** sur une variété orientée et compacte de dimension 2 (sphère, tore, ...) de telle manière que...

- les arêtes ne se coupent pas ;
- le complément du graphe est une union disjointe de régions homéomorphes à un disque ouvert.

Ces régions s'appellent **FACES** ;

le **degré** d'une face = le nombre d'arêtes qui l'entourent (les arêtes "intérieures" sont comptées deux fois).

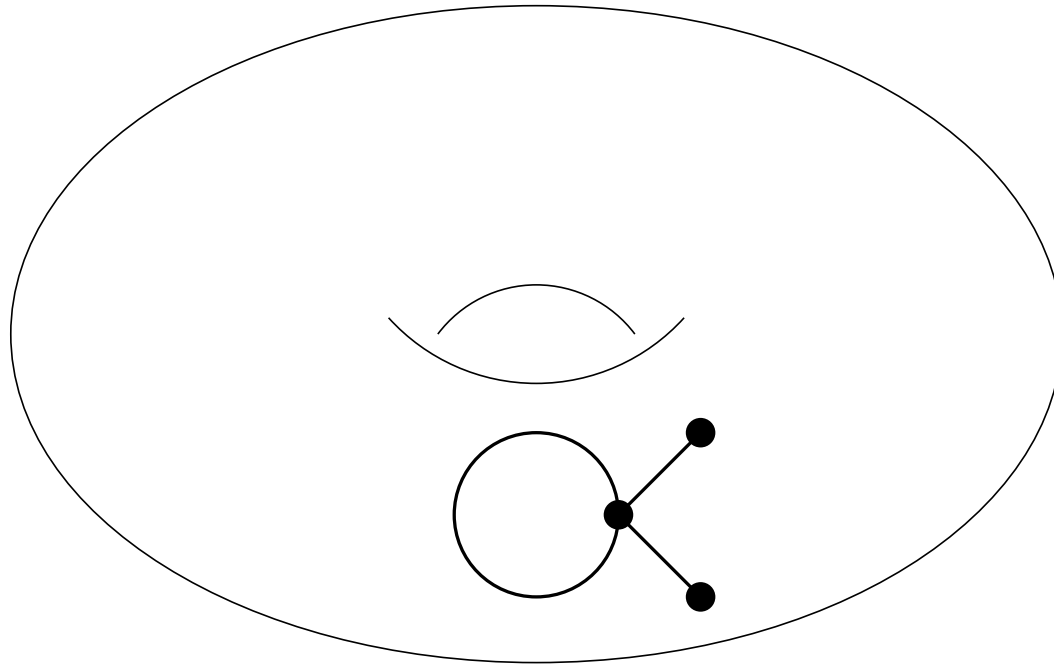
Le même graphe mais deux cartes différentes



Les degrés des faces :

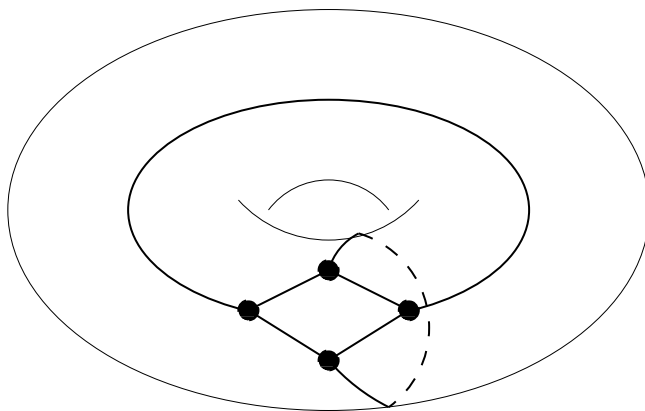
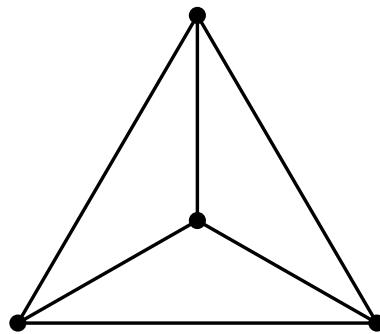
- pour la carte de gauche : 1 et 5 ;
- pour celle de droite : 3 et 3 .

Un graphe n'a pas de faces mais seulement des sommets et des arêtes.

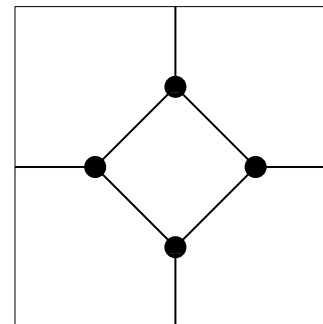


Ceci n'est pas une carte

Le graphe complet K_4 dessiné sur la sphère et sur le tore :



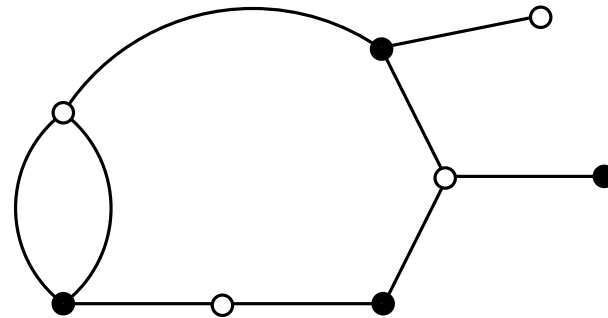
=



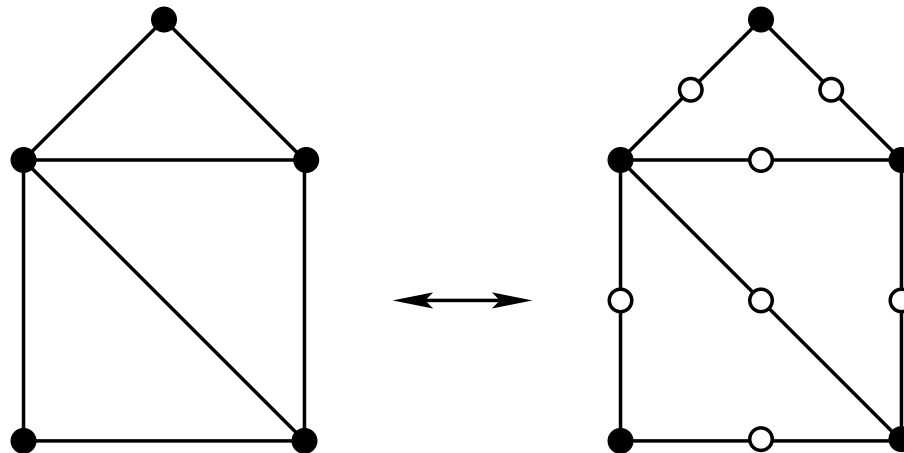
Degrés des faces :

- sur la sphère : 3, 3, 3, 3 ;
- sur le tore : 8, 4 .

Une **HYPERCARTE** = Une carte bicoloriée :

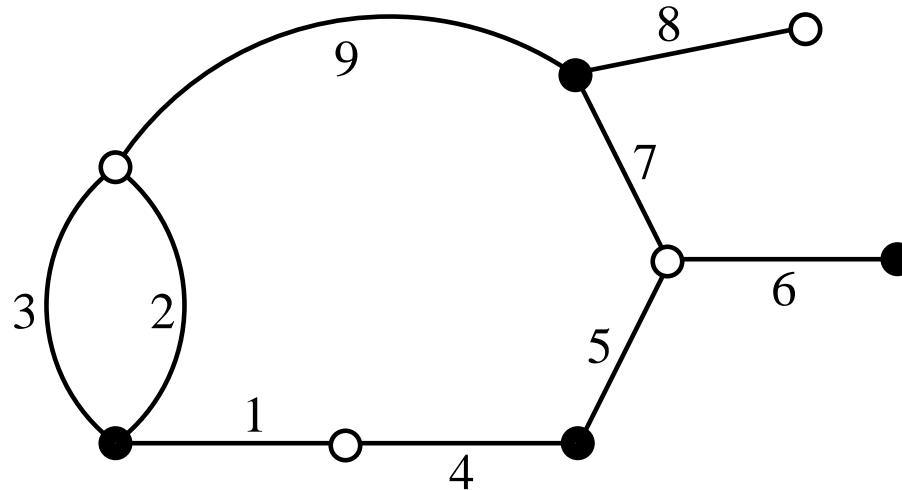


Cartes \longleftrightarrow hypercartes *dont tous les sommets blancs sont de degré 2* :



Convention : Quand il s'agit d'une carte, les sommets blancs sont cachés (mais ils existent toujours).

Cartes et hypercartes peuvent être codées par des **triplets de permutations** :



Convention : Les étiquettes des brins d'arêtes sont placées sur la **rive gauche** quand on va d'un sommet noir vers un sommet blanc.

$$\sigma = (1, 2, 3)(4, 5)(6)(7, 8, 9)$$

$$\alpha = (1, 4)(2, 9, 3)(5, 6, 7)(8)$$

$$\varphi = (1, 5, 9)(2)(3, 8, 7, 6, 4)$$

Remarque importante :

$$\sigma\alpha\varphi = 1$$

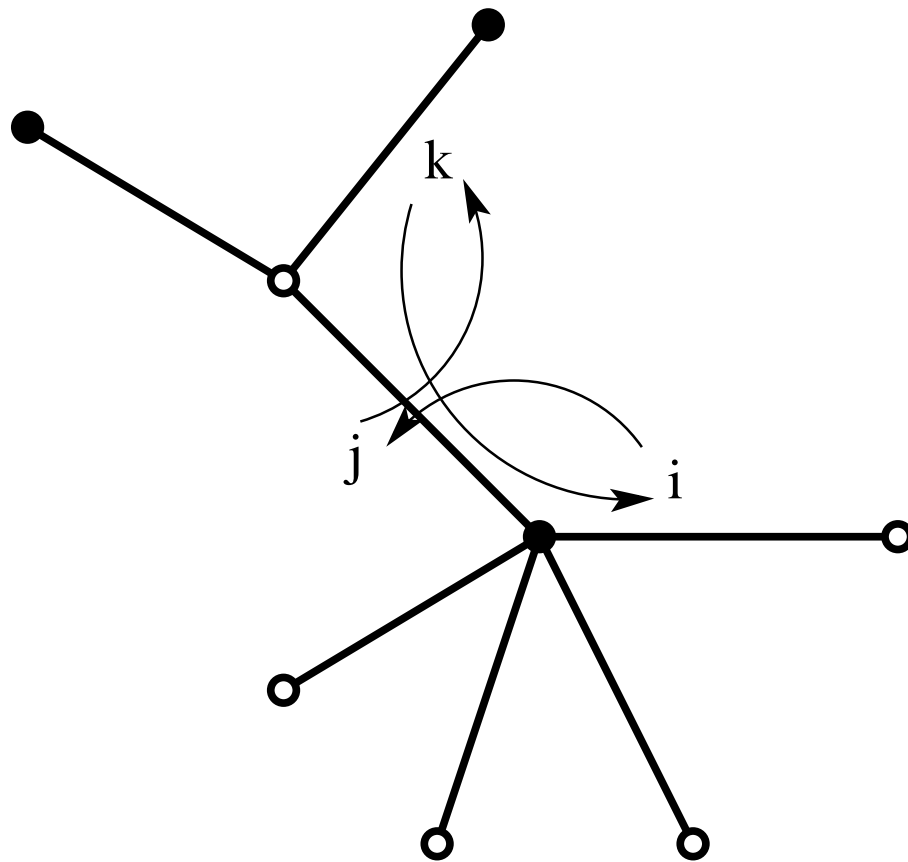


Illustration : $\sigma_{\alpha\varphi} = 1$

Dans l'autre sense :

À tout triplet de permutations $(\sigma, \alpha, \varphi)$ tel que

- le groupe des permutations $G = \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$ est transitif,
- $\sigma\alpha\varphi = 1$,

correspond une hypercarte.

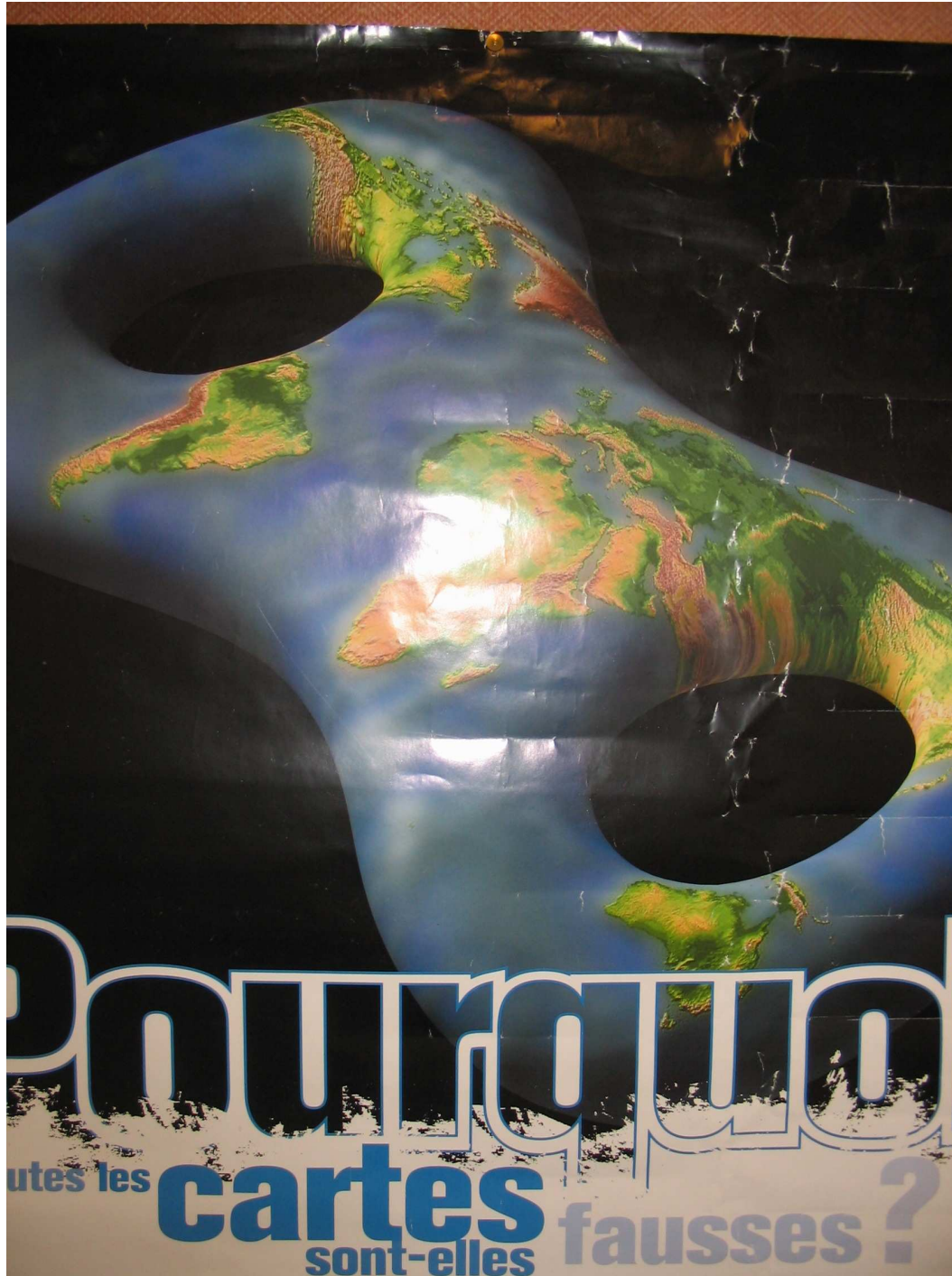
Cycles de σ \longleftrightarrow sommets noirs

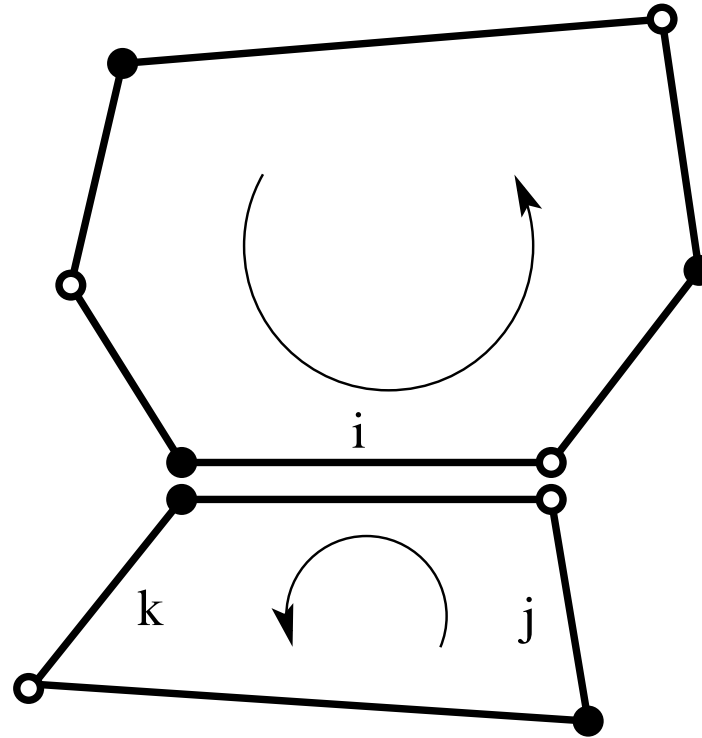
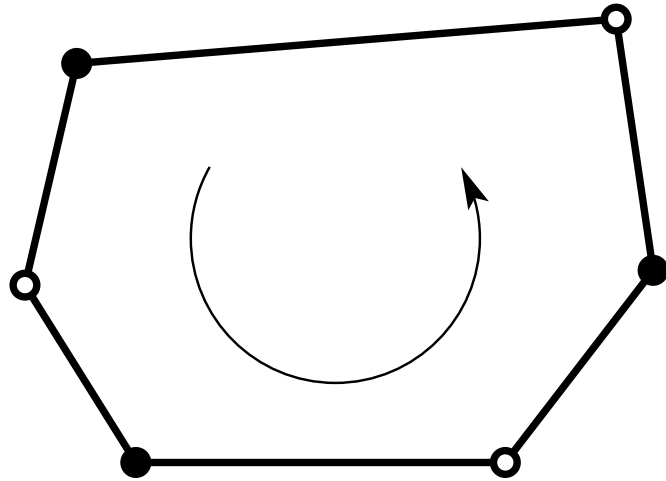
Cycles de α \longleftrightarrow sommets blancs

Cycles de φ \longleftrightarrow faces

Caractéristique d'Euler :

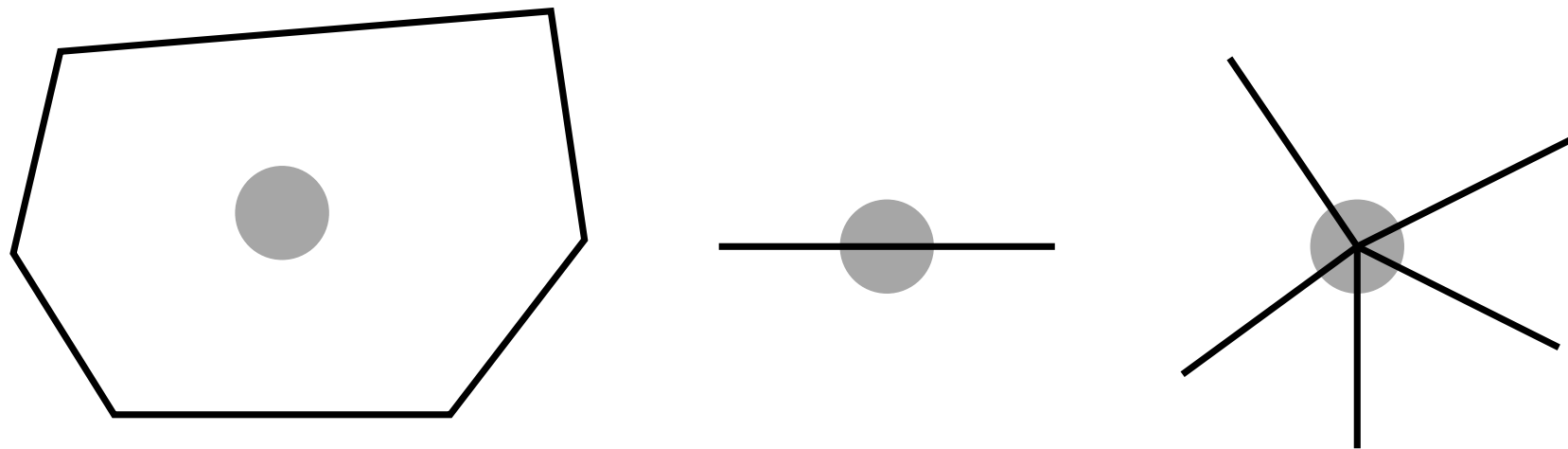
$$\text{cycl}(\sigma) + \text{cycl}(\alpha) + \text{cycl}(\varphi) - n = 2 - 2g.$$





1. On fabrique des polygones orientés **bidimensionnels** qui correspondent aux cycles de φ ;
2. On les colle l'un à l'autre selon les indications fournies par σ et α :

$$k \xrightarrow{\sigma} i \xrightarrow{\alpha} j \xrightarrow{\varphi} k .$$



3. On trouve que le voisinage de chaque point de la surface ainsi obtenue est homéomorphe à un disque ouvert dans \mathbb{R}^2 .

Exemple :

Prenons l'icosaèdre (considéré comme une carte planaire)...

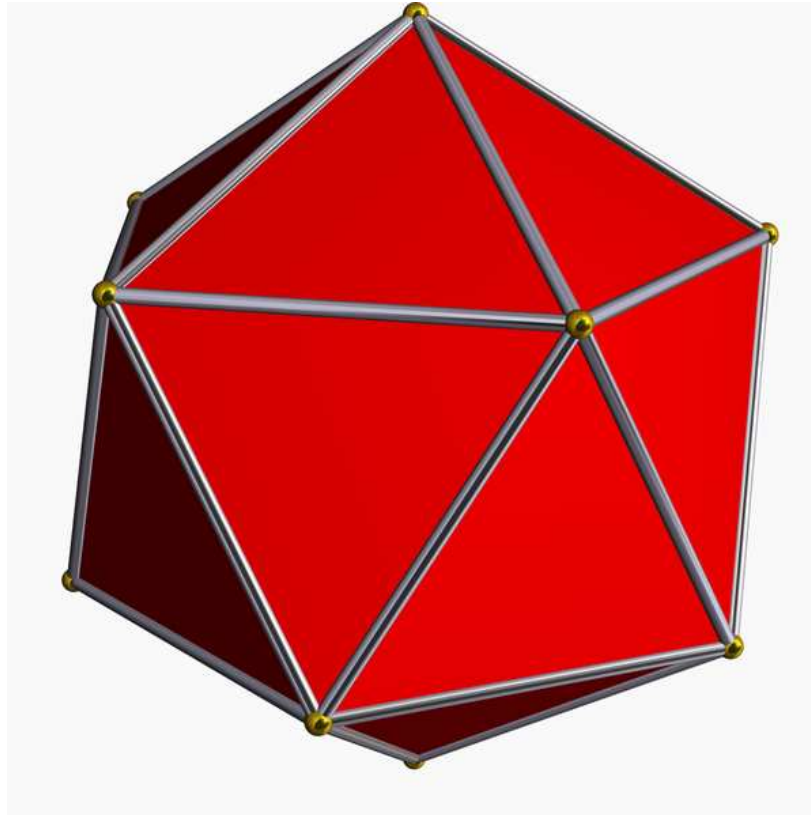


Image créée par : Robert Webb's Great Stella software

Stella website : <http://www.software3d.com/Stella.html>

... et remplaçons σ par σ^2 !

- Sommets : Restent les mêmes car les cycles de longueur 5 de σ se transforment en cycles de longueur 5 de σ^2 .
- Arêtes : Restent les mêmes (pour la raison similaire).
- Faces : Il faut les calculer... ou dessiner – au moins une...

Il se trouve que toutes les faces de la nouvelle carte sont pentagonales et par conséquent leur nombre est $60/5 = 12$ (60 est le nombre des brins).

12 faces pentagonales : faut-il appeler cette carte **dodécaèdre** ?

La caractéristique d'Euler

$$2 - 2g = 12 - 30 + 12 = -6,$$

donc le genre

$$g = 4 .$$

Automorphismes = permutations $h \in S_{60}$ qui commutent avec σ , α et φ .

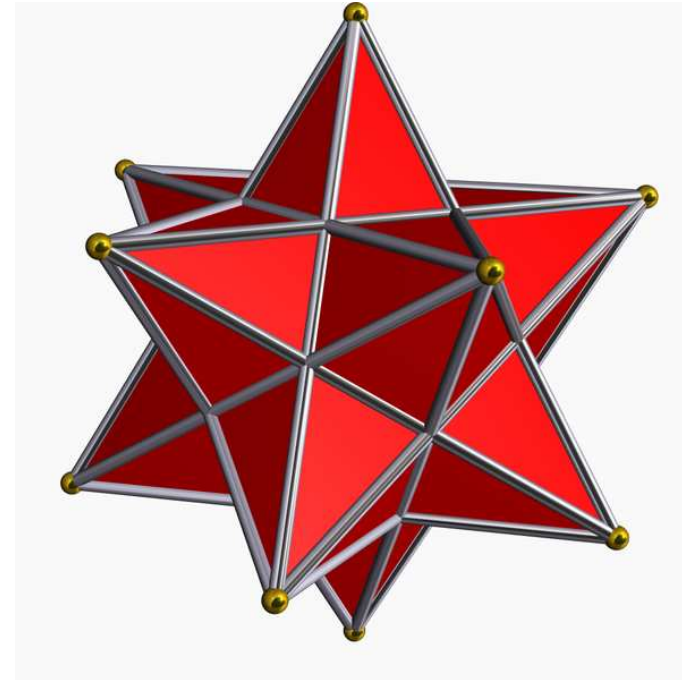
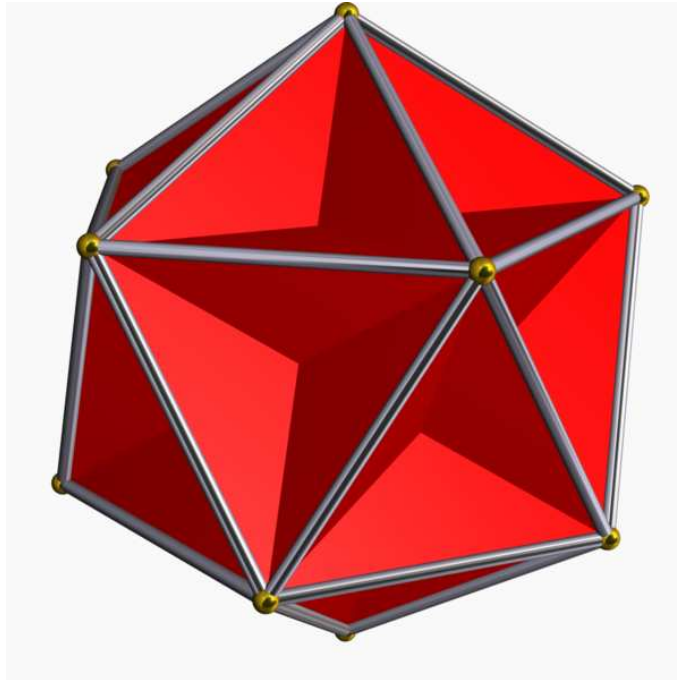
h commute avec $\sigma \quad \Rightarrow \quad h$ commute avec σ^2

h commute avec $\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad h$ commute avec σ
(car $(\sigma^2)^2 = \sigma^{-1}$)

Par conséquent, le groupe d'automorphismes de la nouvelle carte est le même que celui de l'icosaèdre, c'est-à-dire, A_5 .

Qui plus est, cette carte est **autoduale**. Si on dessine à la fois la carte elle-même et sa duale, le groupe d'automorphismes de l'hypercarte ainsi obtenue devient S_5 au lieu de A_5 .

Deux images qui représentent
l'icosaèdre-dodécaèdre de genre 4 :



Images créées par : Robert Webb's Great Stella software

Stella website : <http://www.software3d.com/Stella.html>

Important : on voit toutes les symétries.

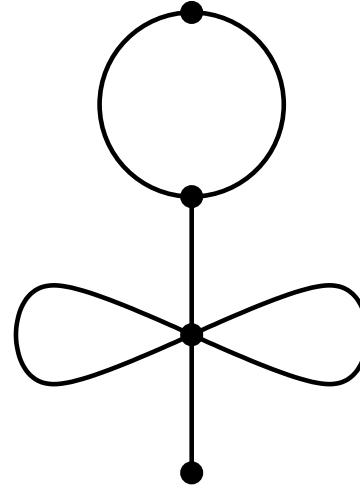
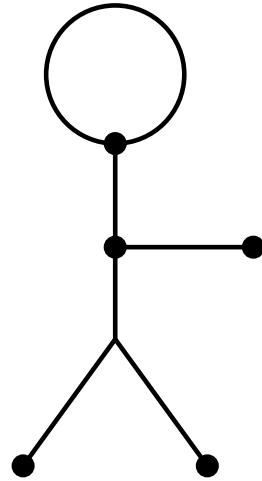
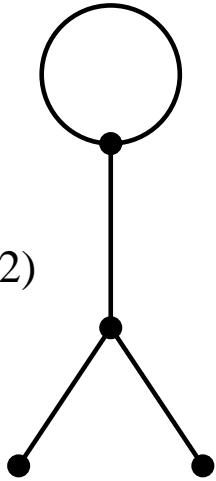
GROUPE CARTOGRAPHIQUE

Un dessin \longrightarrow triplet $(\sigma, \alpha, \varphi)$ \longrightarrow groupe $G = \langle \sigma, \alpha, \varphi \rangle$

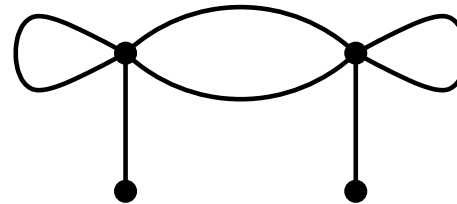
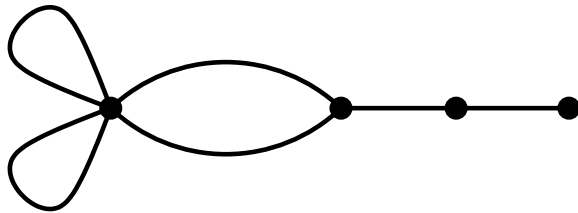
Dans la plupart des cas on obtient soit S_n , soit A_n .

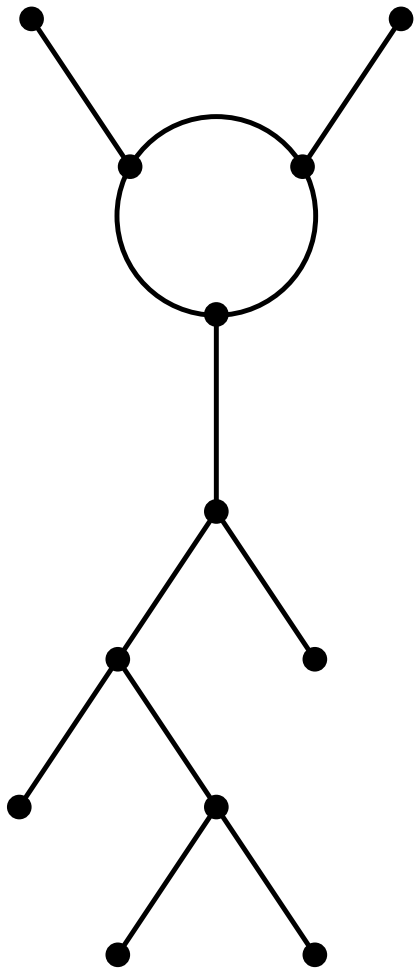
Mais...

$\text{PSL}_3(2)$

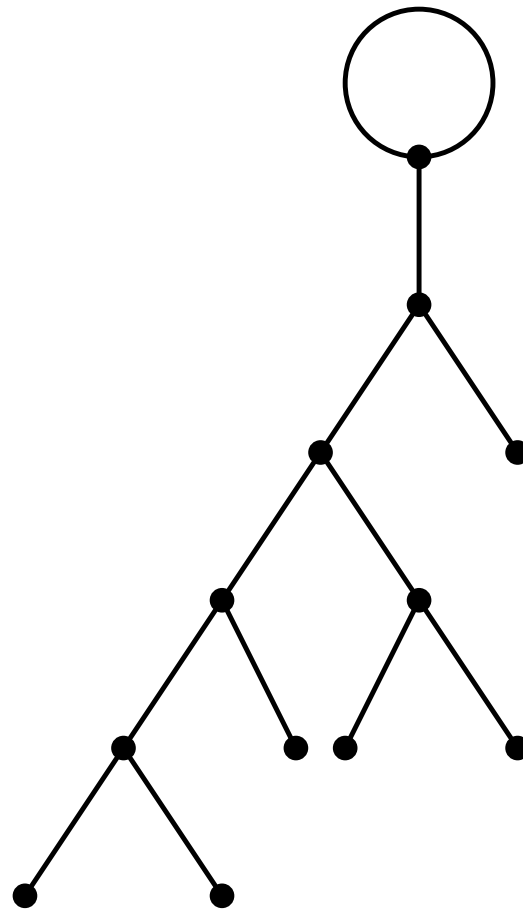


M_{12}

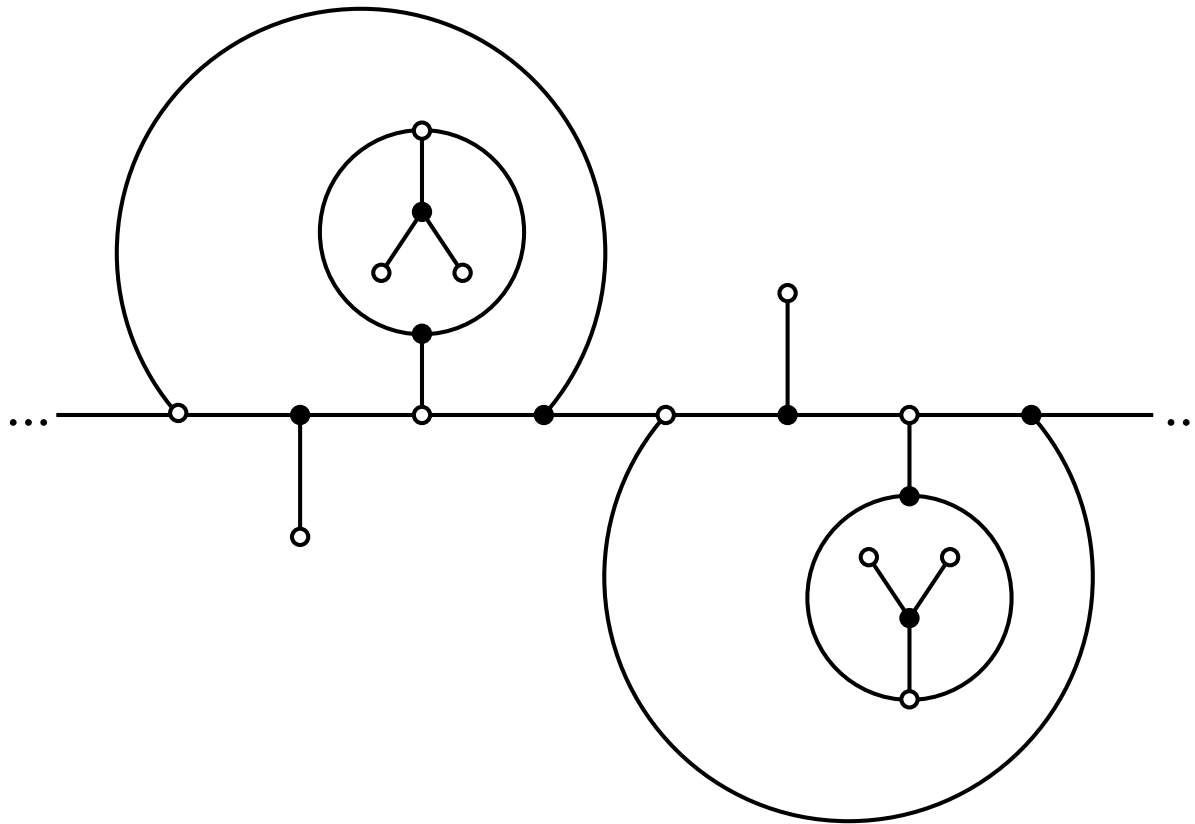




M_{24}

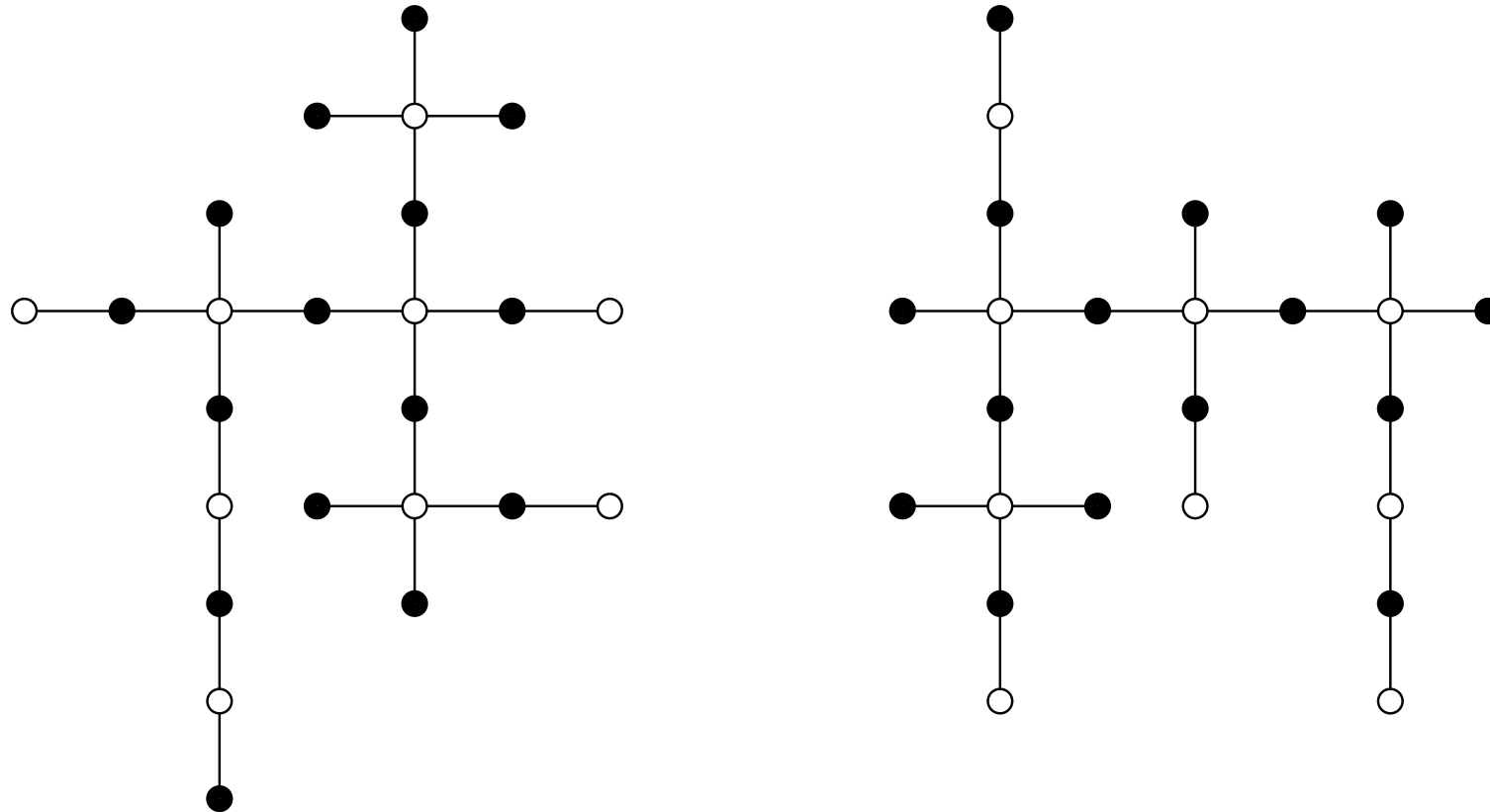


Une M_{24} -hypercarte trouvée par Marston Conder
(la ligne horizontale représente l'équateur sur la sphère) :



Il existe $\sim 7.5 \cdot 10^9$ arbres plans avec 23 arêtes (sans bicoloration).

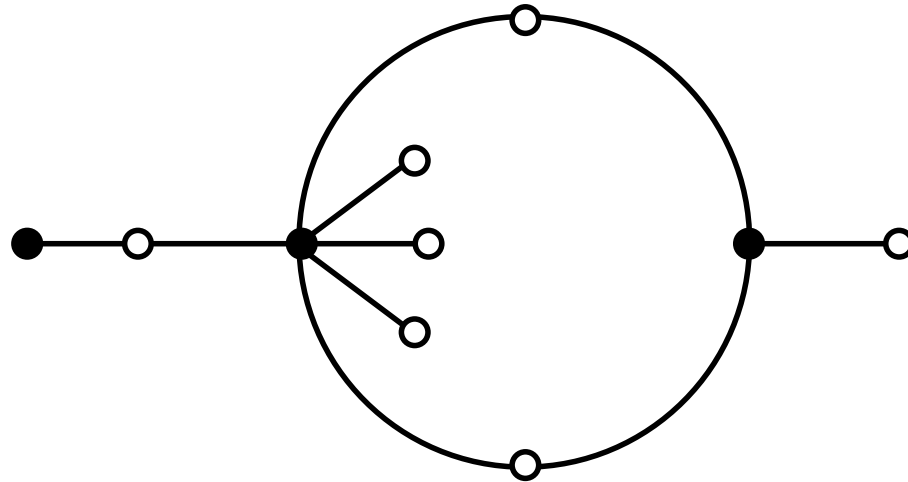
Ils possèdent tous comme groupe cartographique soit S_{23} , soit A_{23} – **sauf 4 exceptions** : les deux arbres montrés sur la figure ainsi que leurs images miroir.



FONCTIONS de BELYI

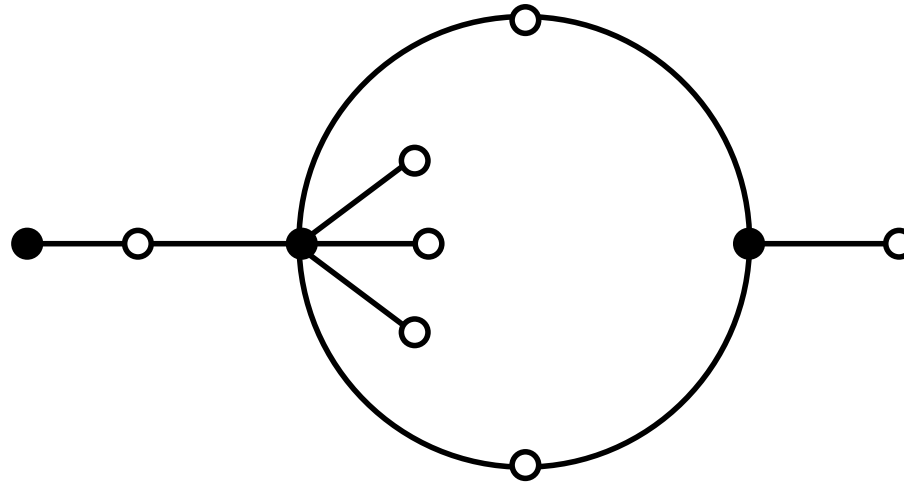
(cas planaire)

Soit une hypercarte, ou un dessin d'enfant (de degré 10 : dix brins)



On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie quatre conditions :

Soit une hypercarte, ou un dessin d'enfant (de degré 10 : dix brins)



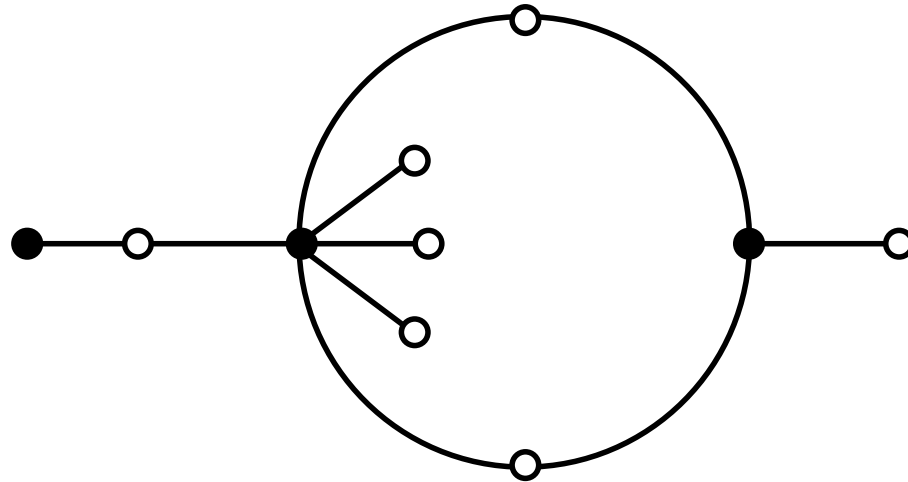
On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie quatre conditions :

Condition 1. Les sommets *noirs* sont les racines de f , avec les *multiplicités de ces racines égales aux degrés des sommets*.

Alors, le numérateur de f dans notre exemple doit être

$$(x - a)^6(x - b)^3(x - c).$$

Soit une hypercarte, ou un dessin d'enfant (de degré 10 : dix brins)



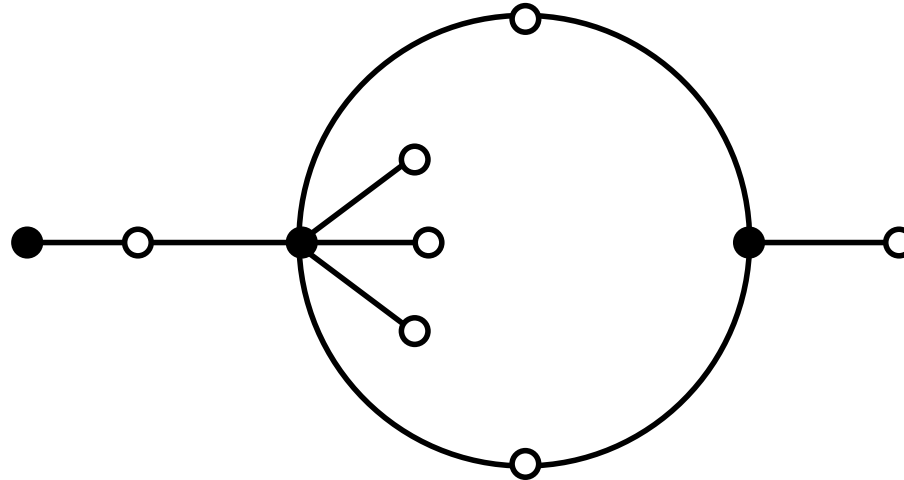
On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie quatre conditions :

Condition 2. Les sommets *blancs* sont les racines de $f - 1$, avec les *multiplicités des racines égales aux degrés des sommets*.

Alors, le numérateur de $f - 1$ dans notre exemple doit être

$$(x^3 + dx^2 + ex + f)^2(x^4 + gx^3 + hx^2 + ix + j).$$

Soit une hypercarte, ou un dessin d'enfant (de degré 10 : dix brins)



On cherche une fonction rationnelle f qui vérifie quatre conditions :

Condition 3. À l'intérieur de chaque *face* il y a un pôle de f , avec la *multiplicité de ce pôle égale au degré de la face*.

Alors, le *dénominateur* de f dans notre exemple doit être

$$(x^2 + kx + l)^5 .$$

Donc, 0, 1 et ∞ sont des **valeurs critiques** de la fonction f ;
c'est-à-dire, les équations

$$f = 0, \quad f = 1 \quad \text{et} \quad f = \infty$$

ont des racines multiples.

Condition 4. À part 0, 1 et ∞ il n'y a pas d'autres valeurs critiques.

Alors, l'hypercarte elle-même s'obtient comme l'image réciproque

$$H = f^{-1}([0, 1])$$

Finalement, nous avons

$$f(x) = \frac{K(x-a)^6(x-b)^3(x-c)}{(x^2+kx+l)^5},$$

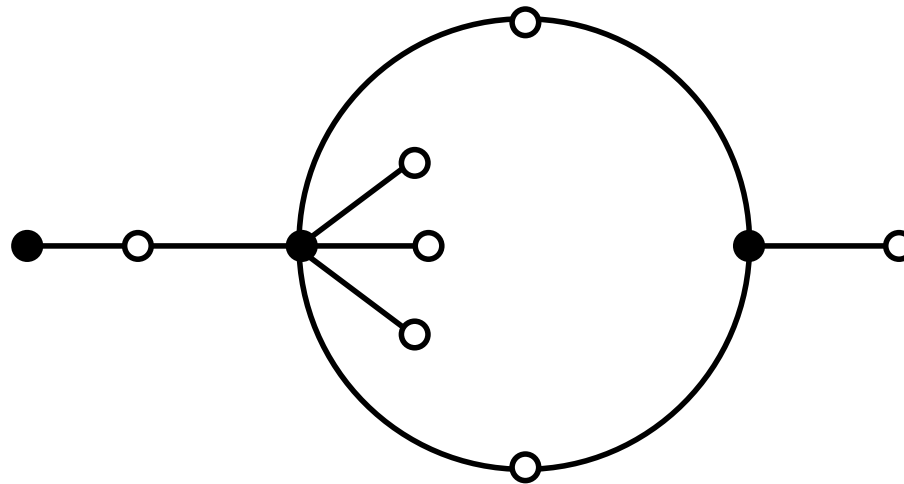
$$f(x) - 1 = \frac{(K-1)(x^3+dx^2+ex+f)^2(x^4+gx^3+hx^2+ix+j)}{(x^2+kx+l)^5},$$

ce qui nous donne 13 paramètres et 10 équations algébriques.

Les valeurs de 3 paramètres peuvent être choisies arbitrairement.

Par exemple :

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = -1.$$



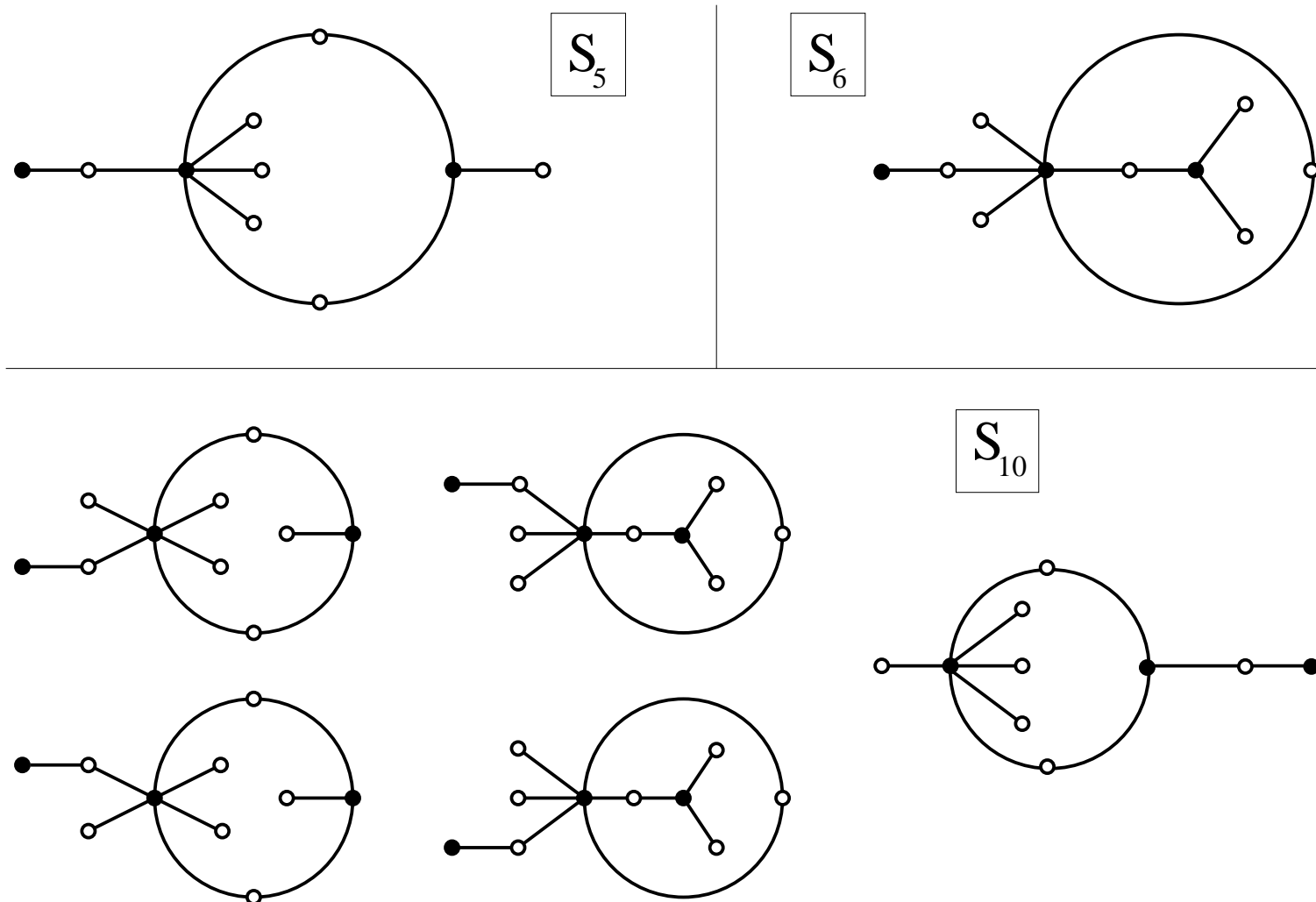
Résultats de calcul :

$$f(x) = \frac{50000}{27} \cdot \frac{x^6 (x-1)^3 (x+1)}{(x^2 + 4x - 1)^5},$$

$$f(x) - 1 = \frac{1}{27} \cdot \frac{(11x^3 + x^2 - 3x + 3)^2 (7x - 1) (59x^3 - 121x^2 + 33x - 3)}{(x^2 + 4x - 1)^5}.$$

La réalité est plus complexe : la seule information que nous avons utilisée pour écrire les équations sur les coefficients de la fonction f est **l'assortiment de degrés** des sommets et des faces.

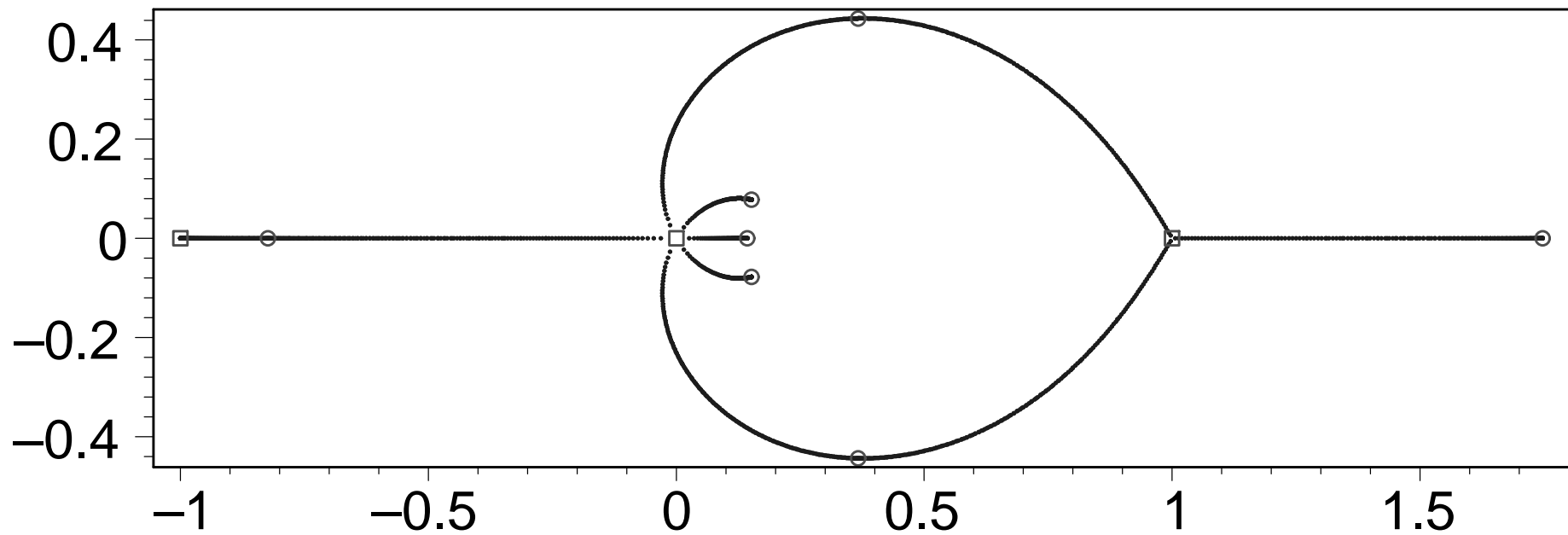
Or, il existe 7 hypercartes ayant le même assortiment de degrés :



Question-défi

1. Trouver toutes les cartes à 6 arêtes (donc 12 brins d'arêtes) avec les sommets de degrés 6, 3, 2, 1 et les faces de degrés aussi 6, 3, 2, 1.
2. Montrer que la liste soit exhaustive.

Une bouteille de Bordeaux à celui ou celle qui trouve la bonne réponse à la question 1 avant la fin du colloque.



Le dessin obtenu comme $f^{-1}([0, 1])$ pour

$$f(x) = \frac{50000}{27} \cdot \frac{x^6 (x - 1)^3 (x + 1)}{(x^2 + 4x - 1)^5}.$$

Les 5 hypercartes avec le groupe cartographique S_{10} constituent

une orbite de Galois :

1. Les coefficients des fonctions de Belyi s'expriment en fonction des racines du polynôme

$$P(t) = 85237 t^5 - 95206 t^4 + 48850 t^3 - 7456 t^2 + 1606 t - 226 .$$

2. En prenant l'une après l'autre les 5 racines de P on obtient les 5 hypercartes en question.
3. Le polynôme P peut varier mais le **corps de nombres** $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ engendré par les racines de P reste le même : c'est un invariant de l'orbite.

(Ici $\overline{\mathbb{Q}}$ est le corps des nombres algébriques.)

Théorème

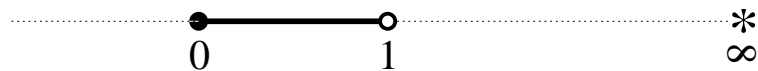
Pour toute hypercarte plane, une telle fonction rationnelle f existe. Elle est unique, à une homographie de la variable x près.

C'est un cas particulier du **Théorème d'Existence de Riemann**.

Une homographie permet de choisir arbitrairement trois paramètres.

La fonction f s'appelle **fonction de Belyi**. Ses coefficients peuvent être fait **nombre algébriques**.

L'hypercarte en question est l'image réciproque de l'*hypercarte élémentaire* suivante :



Le **groupe de Galois universel** $\Gamma = \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$, c'est-à-dire, le groupe d'automorphismes du corps $\overline{\mathbb{Q}}$, agit sur les hypercartes.

Invariants de cette action :

- le groupe cartographique ;
- le groupe d'automorphismes (qui est le centralisateur du groupe cartographique dans S_n) ;
- l'assortiment de degrés des sommets noirs et blancs et des faces (c'est-à-dire, les structures cycliques de σ , α et φ) ;
- une version raffinée de l'invariant précédent : l'ensemble des classes de conjugaison des permutations σ , α et φ (quand le groupe est différent de S_n ou A_n) ;
- et autres. . .

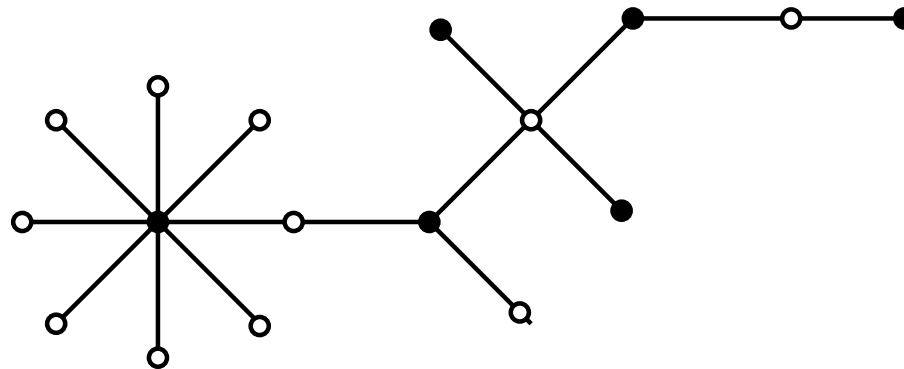
Valeur de f à l'infini :

$$f(x) = \frac{A(x)}{C(x)} = \frac{a_m x^m + \dots}{c_n x^n + \dots}$$

$$f(\infty) = \begin{cases} 0 & m < n & \text{(multiplicité } n - m) \\ a_m/c_n & m = n \\ \infty & m > n & \text{(multiplicité } m - n) \end{cases}$$

Normalement le pôle à l'infini correspond à la “face extérieure”.

Un cas particulier d'une hypercarte est un **arbre plan** (avec une structure bipartite naturelle) :

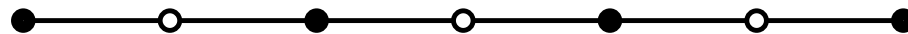
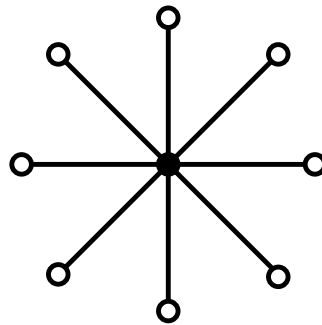


Il y a un seul pôle à l'infini $\Rightarrow f$ est un polynôme.

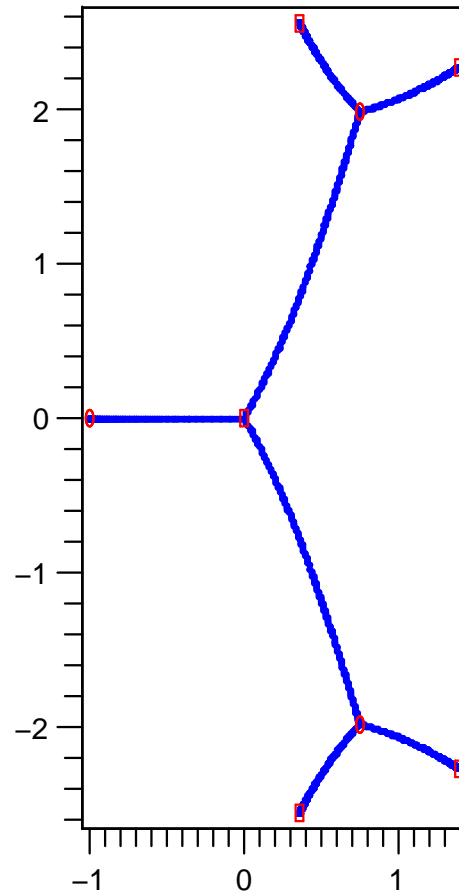
Les polynômes comme cela s'appellent **polynômes de Shabat**.

Exemples :

- pour l'arbre-étoile $f(x) = x^n$;
- pour l'arbre-chaîne $f(x) = T_n(x)$, le polynôme de Chebyshev (les valeurs critiques, au lieu de 0 et 1, sont ± 1).



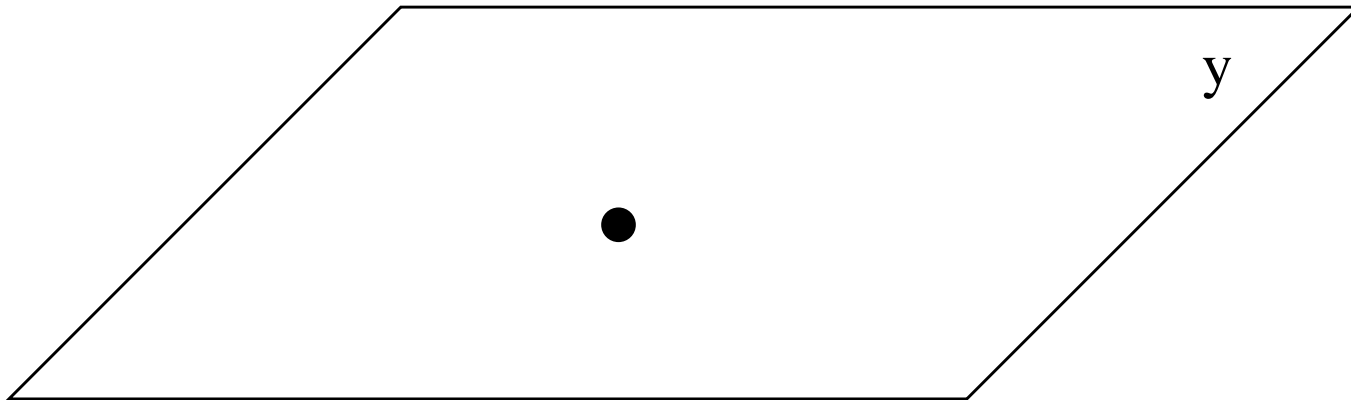
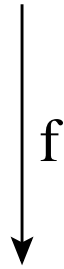
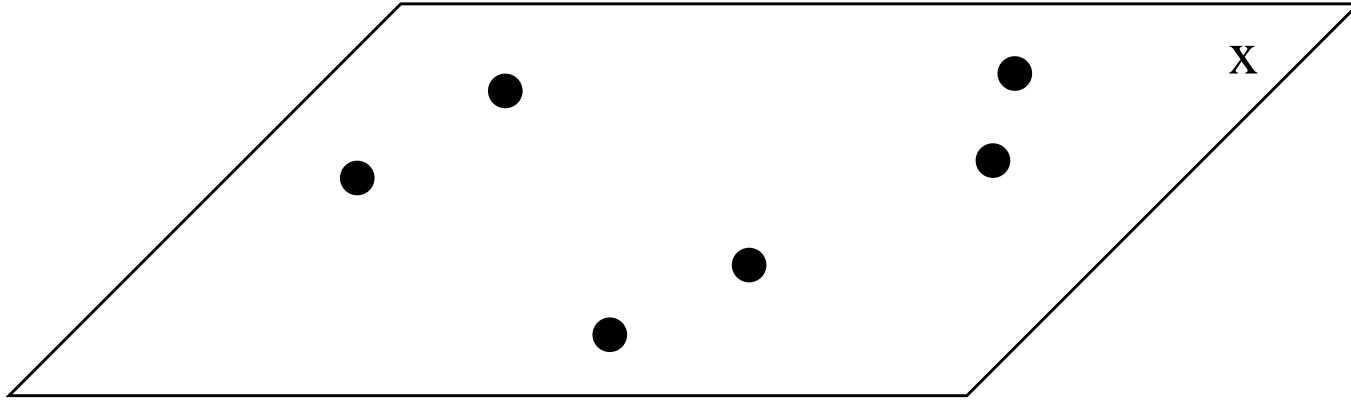
Proposition. Tout arbre plan possède une *forme géométrique canonique* (à une translation, rotation et homothétie près).

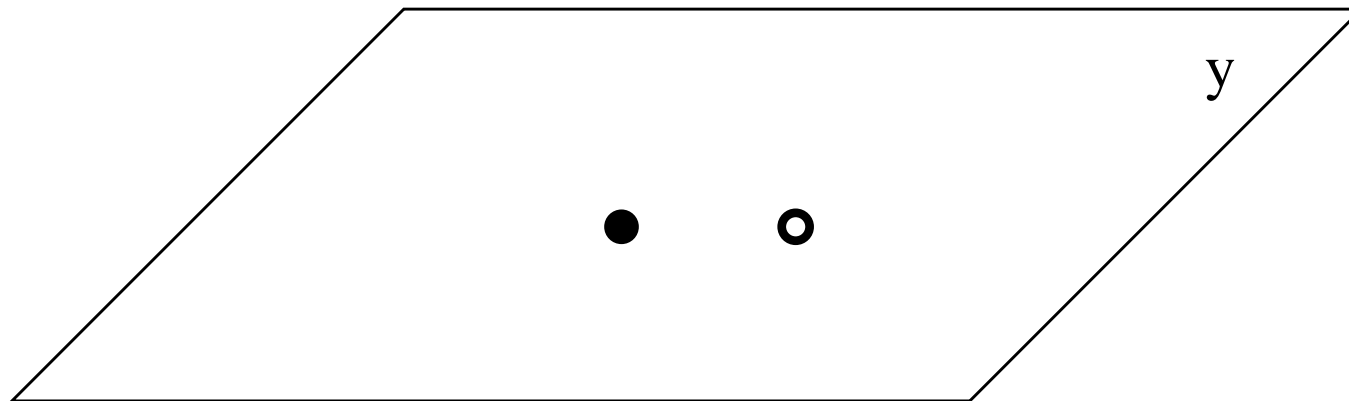
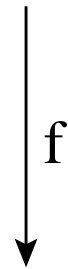
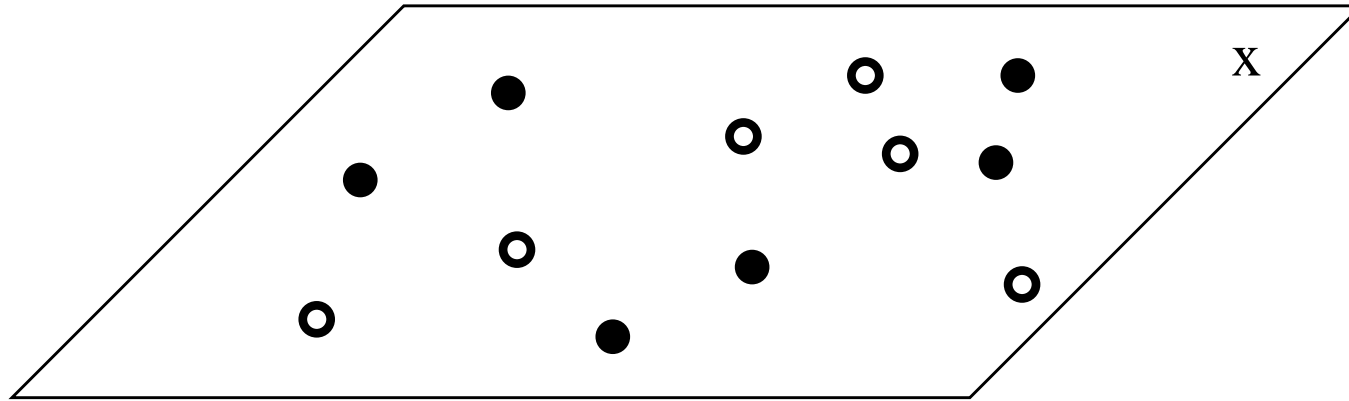


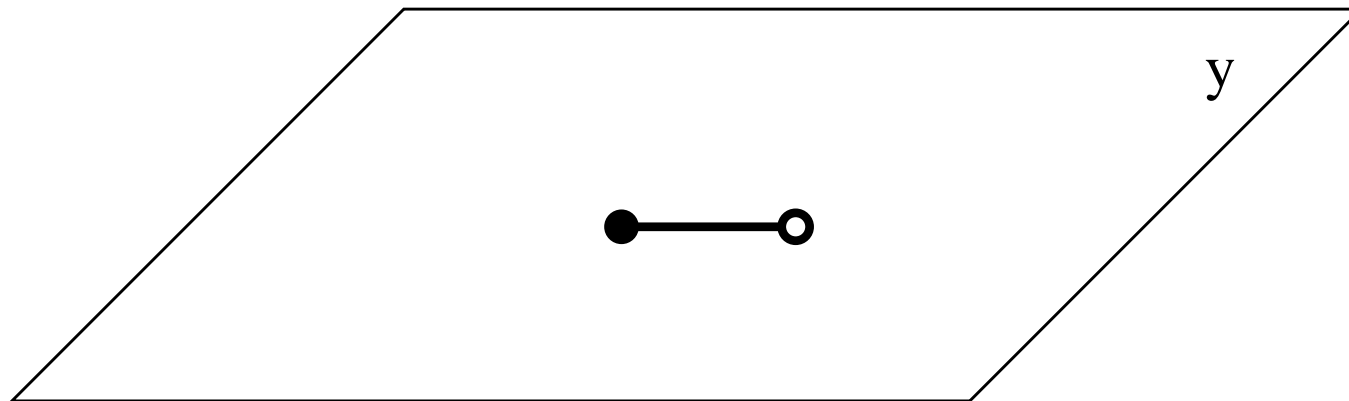
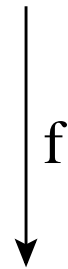
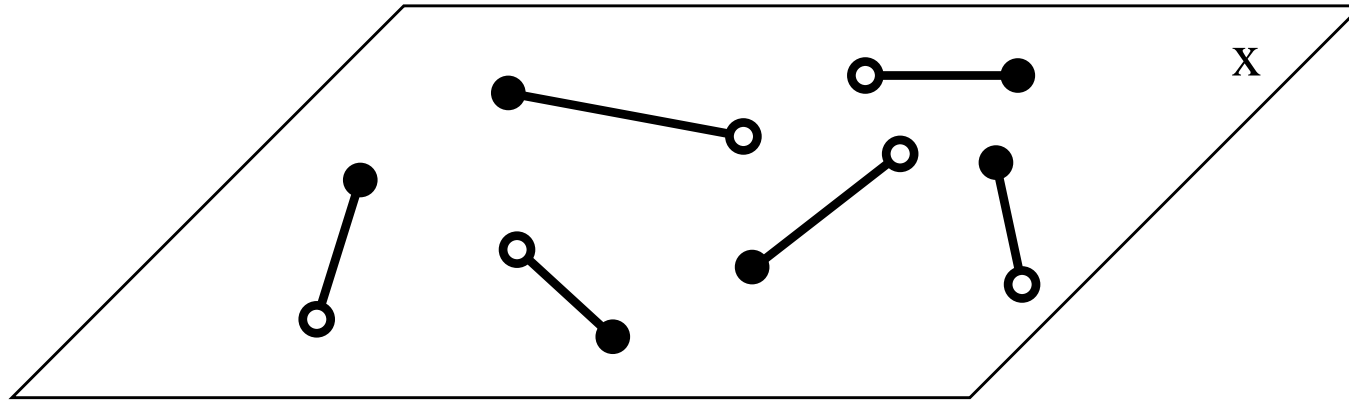
$$f(x) = \frac{1}{729} \cdot (2x^2 - 3x + 9)^3 (x + 1),$$

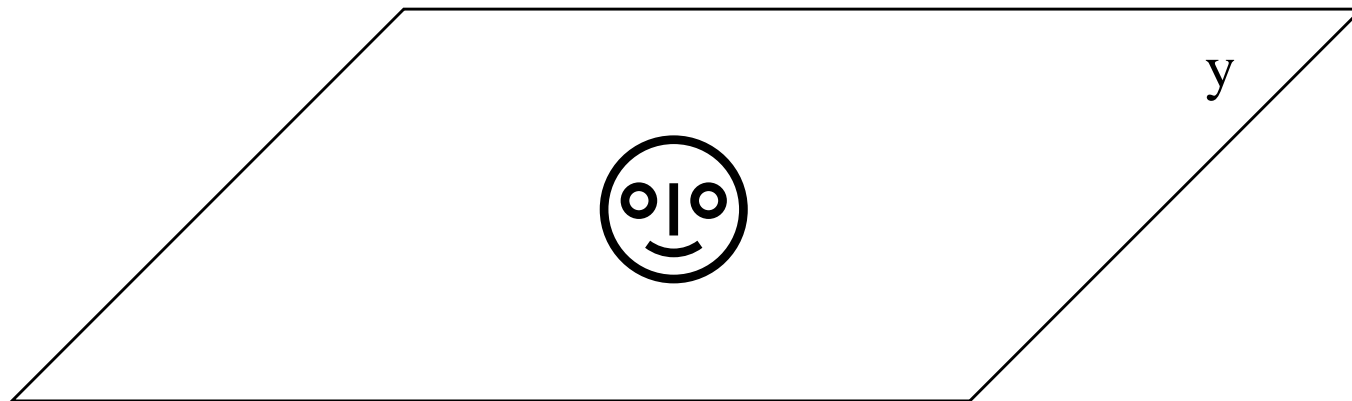
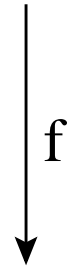
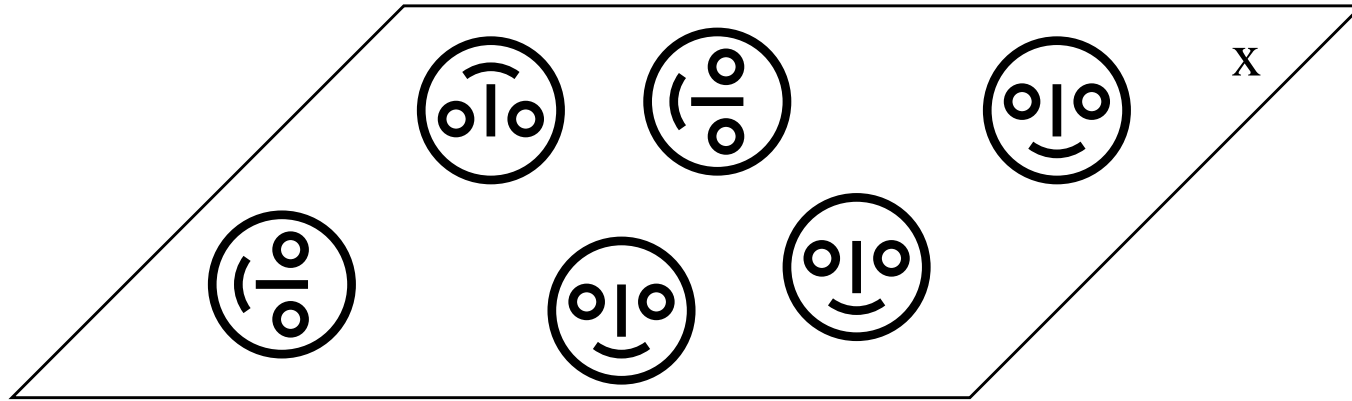
$$f(x) - 1 = \frac{1}{729} \cdot x^3 (8x^4 - 28x^3 + 126x^2 - 189x + 378).$$

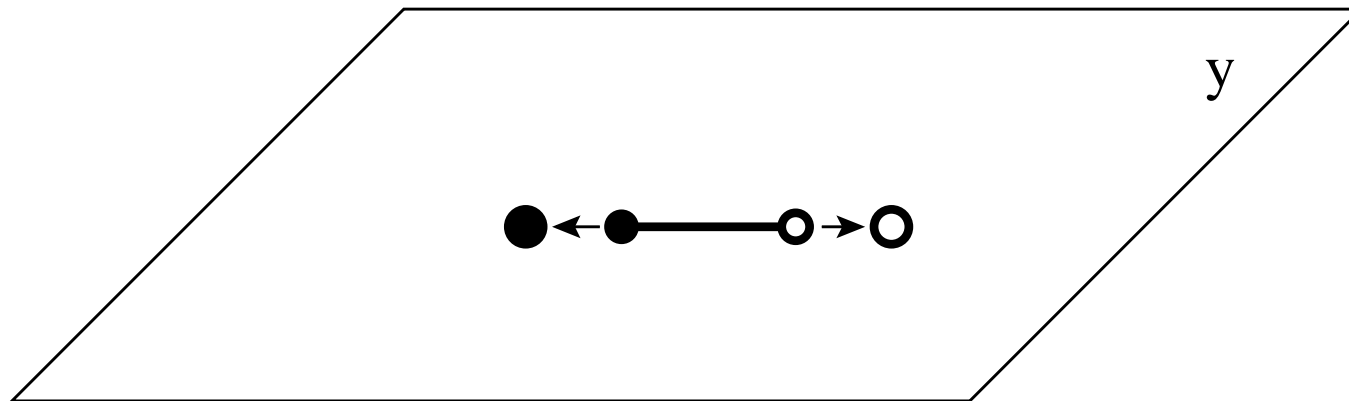
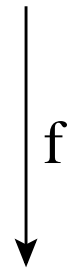
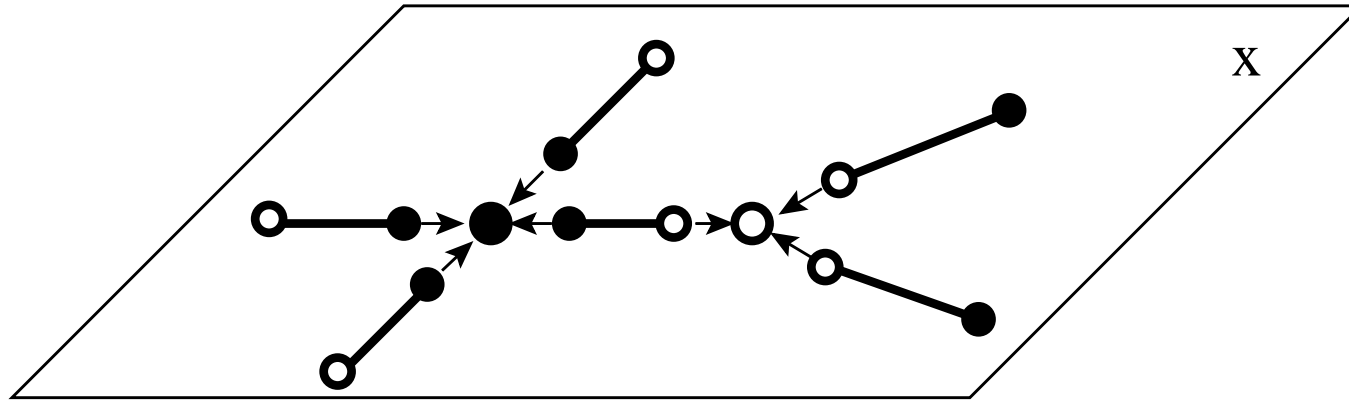
Images réciproques

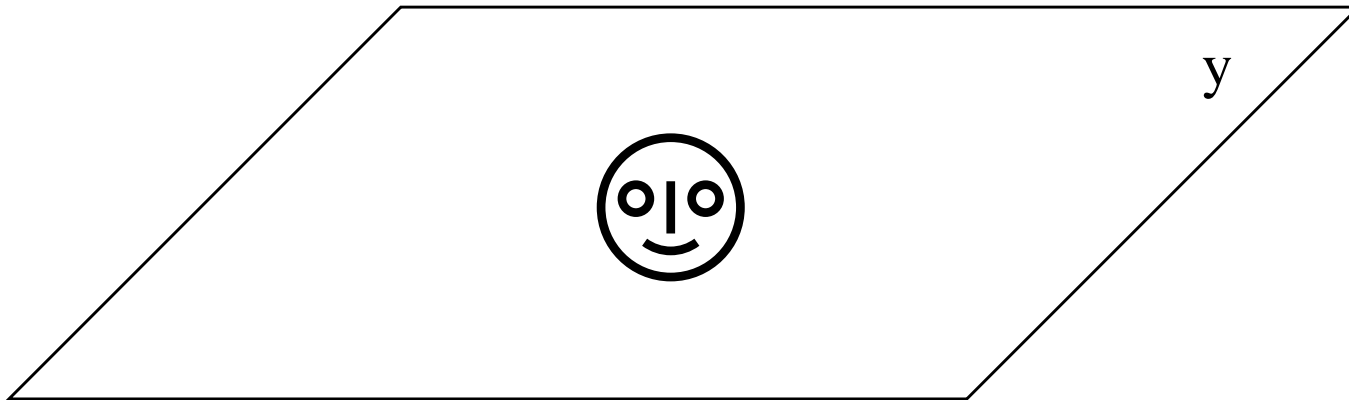
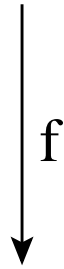
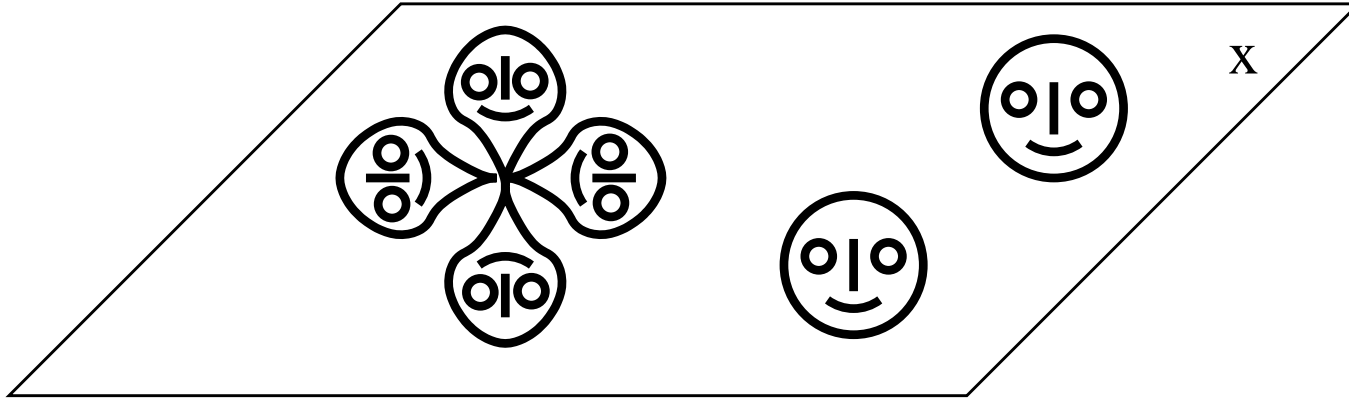


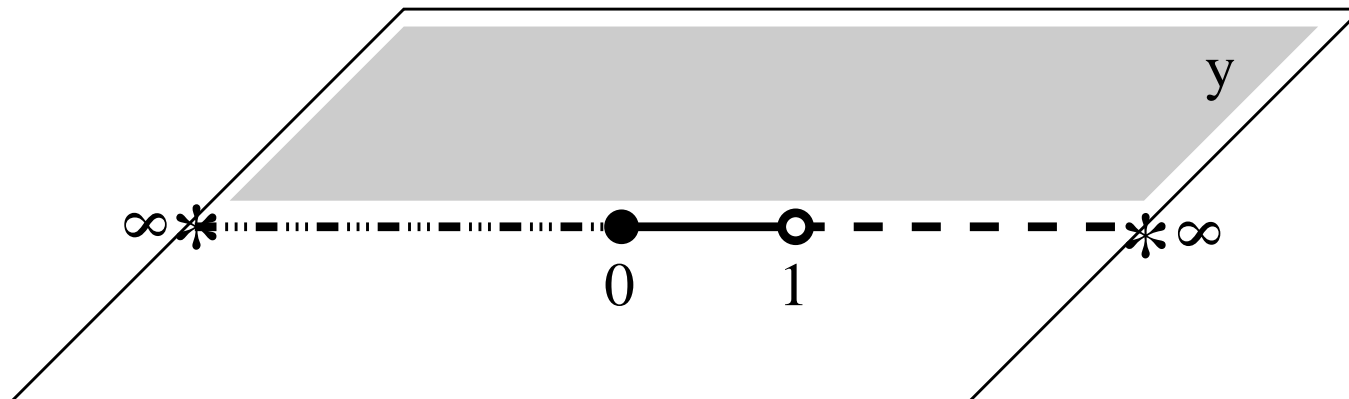
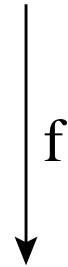
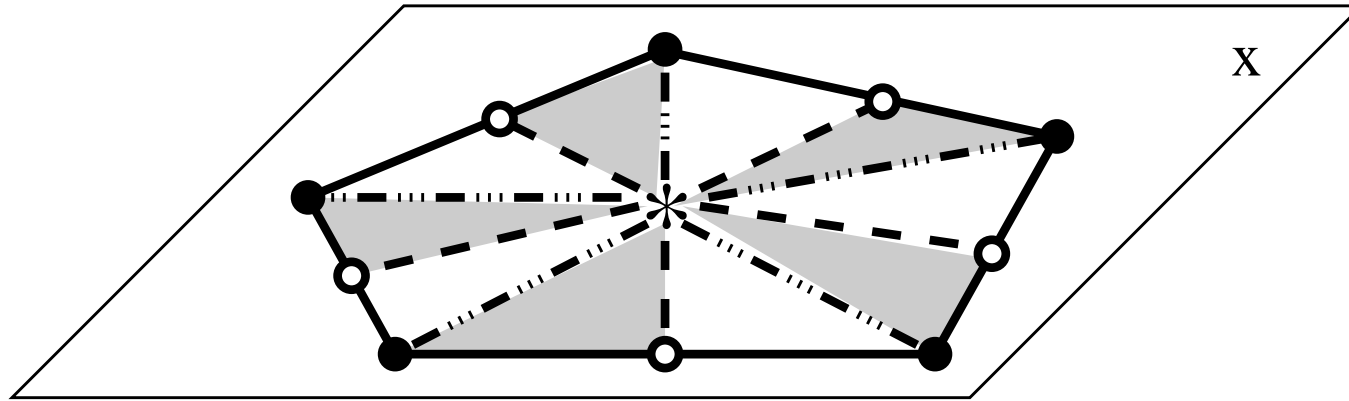


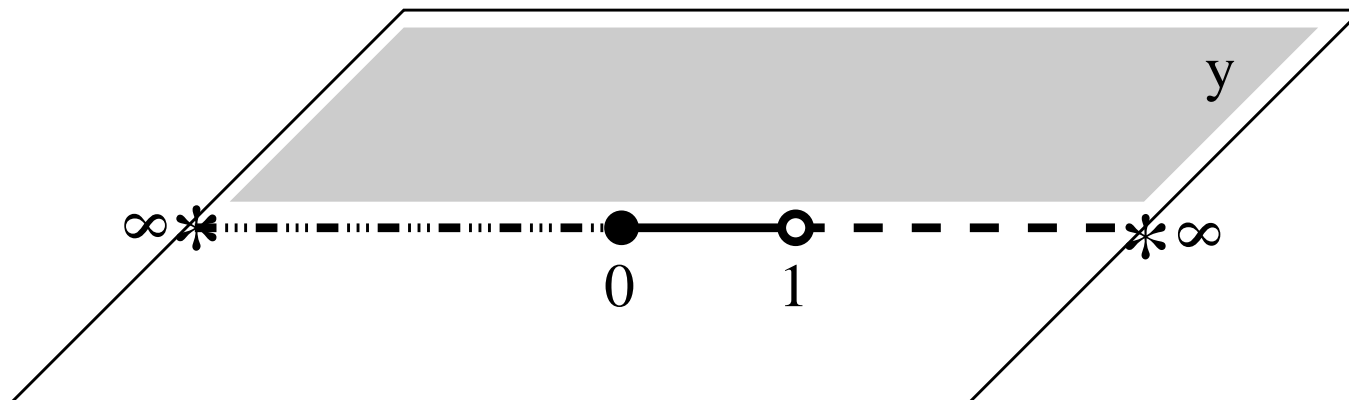
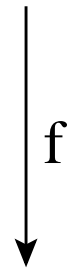
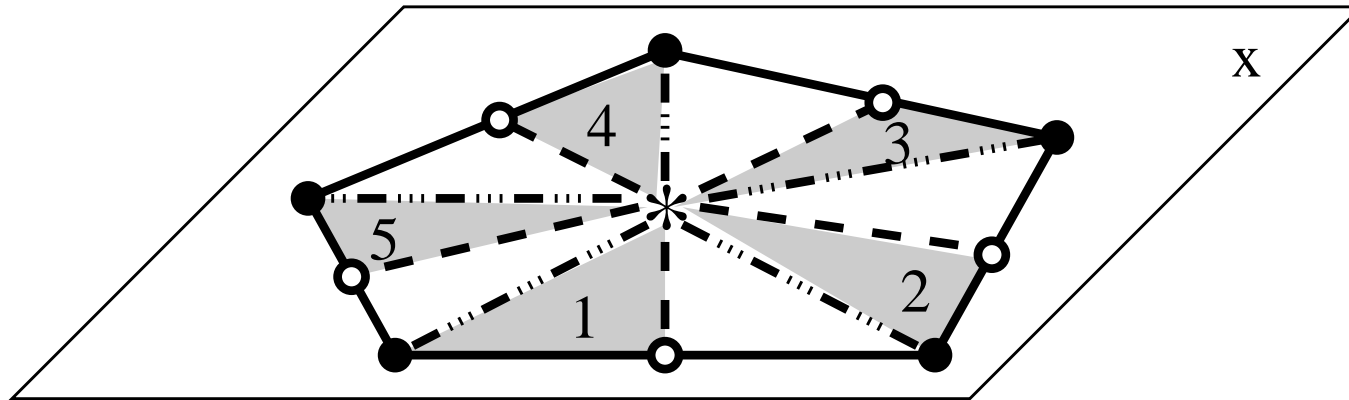


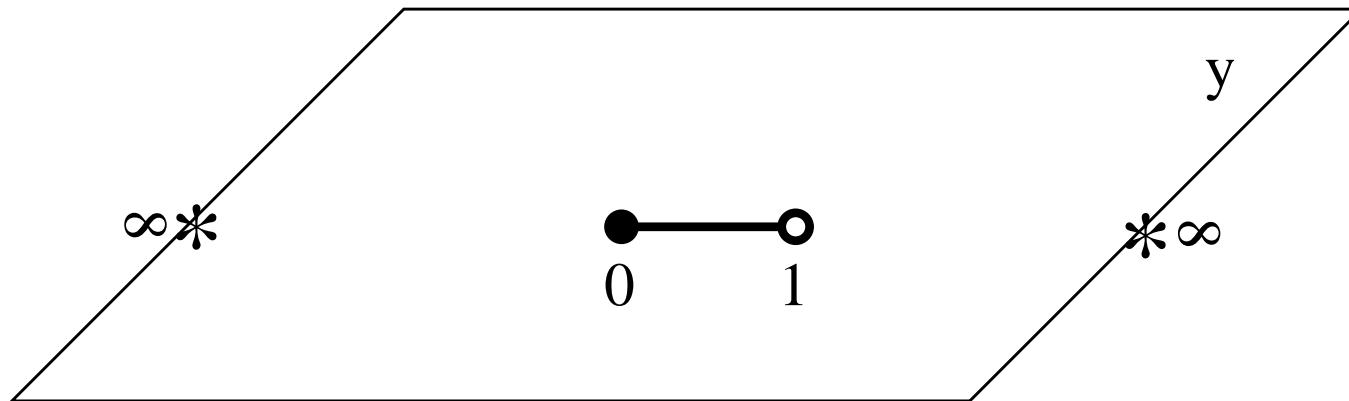
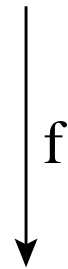
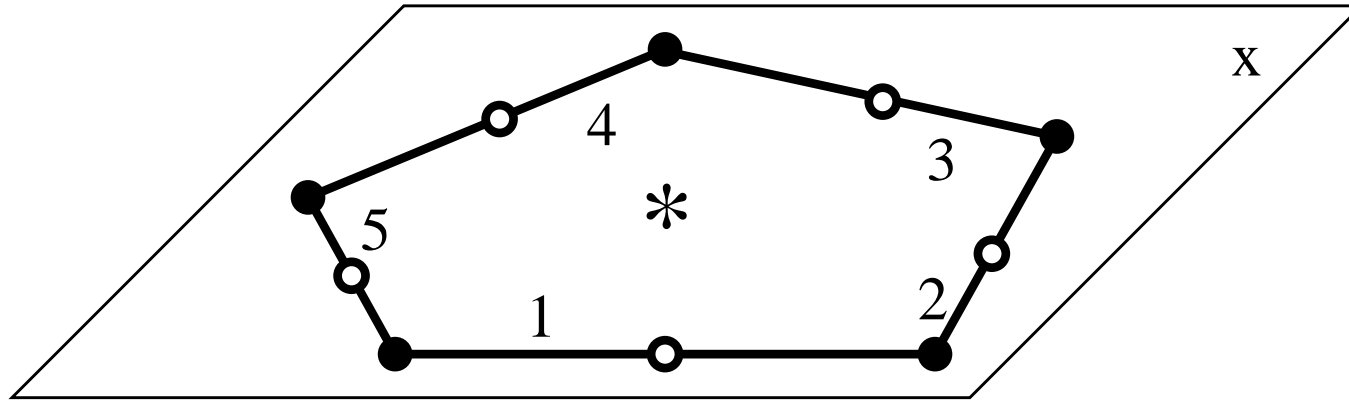












**Une borne de
Davenport–Stothers–Zannier**

ou

Dessiner au lieu de calculer

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ deux polynômes premiers entre eux.

Question : Quel est le degré minimal de $P^3 - Q^2$?

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ deux polynômes premiers entre eux.

Question : Quel est le degré minimal de $P^3 - Q^2$?

Notations : $\deg P = 2n$, $\deg Q = 3n$
 $\deg P^3 = \deg Q^2 = 6n$, et $\boxed{P^3 - Q^2 = R}$.

B. J. Birch, S. Chowla, M. Hall Jr., A. Schinzel (1965) :

DEUX CONJECTURES

1. $\deg R \geq n + 1$;
2. cette borne est atteinte pour une infinité de valeurs de n
(en réalité elle est atteinte pour tout n).

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[x]$ deux polynômes premiers entre eux.

Question : Quel est le degré minimal de $P^3 - Q^2$?

Notations : $\deg P = 2n$, $\deg Q = 3n$
 $\deg P^3 = \deg Q^2 = 6n$, et $\boxed{P^3 - Q^2 = R}$.

B. J. Birch, S. Chowla, M. Hall Jr., A. Schinzel (1965) :

DEUX CONJECTURES

1. $\deg R \geq n + 1$;
2. cette borne est atteinte pour une infinité de valeurs de n
(en réalité elle est atteinte pour tout n).

La première conjecture a été prouvée par H. Davenport en 1965.

La deuxième a été démontrée par W. W. Stothers in 1981, puis redémontrée et généralisée par U. Zannier en 1995 (avec une bonne demi-douzaine de publications entre temps).

Nous allons démontrer la “partie difficile”, c’est-à-dire, la deuxième conjecture : la borne est atteinte pour tout n .

Tout d’abord, un petit calcul quand même :

$$P^3 - Q^2 = R;$$

$$\frac{P^3}{R} - \frac{Q^2}{R} = 1;$$

$$\frac{P^3}{R} - 1 = \frac{Q^2}{R}.$$

Ainsi s’achève l’étape de calcul. Et maintenant...



Nous allons démontrer la “partie difficile”, c’est-à-dire, la deuxième conjecture.

Tout d’abord, un petit calcul quand même :

$$P^3 - Q^2 = R;$$

$$\frac{P^3}{R} - \frac{Q^2}{R} = 1;$$

$$\frac{P^3}{R} - 1 = \frac{Q^2}{R}.$$

Ainsi s’achève l’étape de calcul. Et maintenant...

Supposons que $f = \frac{P^3}{R}$ soit une fonction de Belyi

Alors, quelle sera la carte (ou l’hypercarte) correspondante ?

(La partie restante sera une traduction de l’énoncé du problème en langage combinatoire.)

$$f = \frac{P^3}{R}$$

Les **SOMMETS NOIRS** sont les racines de P^3 , soit **les racines de P** .

Si P n'a pas de racines multiples, alors toutes les racines de P^3 (c'est-à-dire, tous les sommets noirs) sont de degré 3.

Leur nombre est $\deg P = 2n$.

$$f - 1 = \frac{Q^2}{R}$$

Les **SOMMETS BLANC** sont les racines de Q^2 , soit **les racines de Q** .

Si Q n'a pas de racines multiples, alors toutes les racines de Q^2 (c'est-à-dire, tous les sommets blancs) sont de degré 2.

Par conséquent, les sommets blancs peuvent être “effacés” car notre hypercarte est juste une carte.

Sommets noirs = juste sommets ;

Sommets blancs = “milieux d'arêtes” .

Le nombre d'arêtes est $\deg Q = 3n$.

La FORMULE d'EULER :

$$\# (\text{sommets}) - \# (\text{arêtes}) + \# (\text{faces}) = 2$$

$$2n - 3n + \# (\text{faces}) = 2$$

$$\# (\text{faces}) = n + 2$$

—

La FORMULE d'EULER :

$$\# (\text{sommets}) - \# (\text{arêtes}) + \# (\text{faces}) = 2$$

$$2n - 3n + \# (\text{faces}) = 2$$

$$\# (\text{faces}) = n + 2$$

Les **FACES** correspondent aux **PÔLES** de $f = \frac{P^3}{R}$

- un pôle à l'infini \longleftrightarrow la face extérieure ;
- les racines de R \longleftrightarrow les $n + 1$ faces finies restantes.

$\deg R = n + 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ toutes les faces finies sont de degré 1
--

RÉCAPITULATIF :

Existe-t-il une **carte plane** ayant :

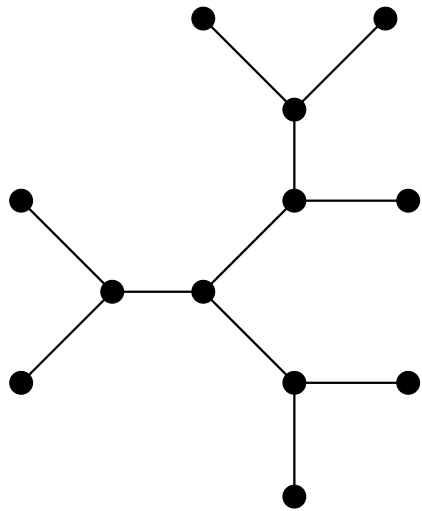
- $2n$ sommets, tous de degré 3 ;
- $3n$ arêtes ;
- $n + 1$ faces finies de degré 1 (plus une grande face extérieure) ?

ou plus simple encore :

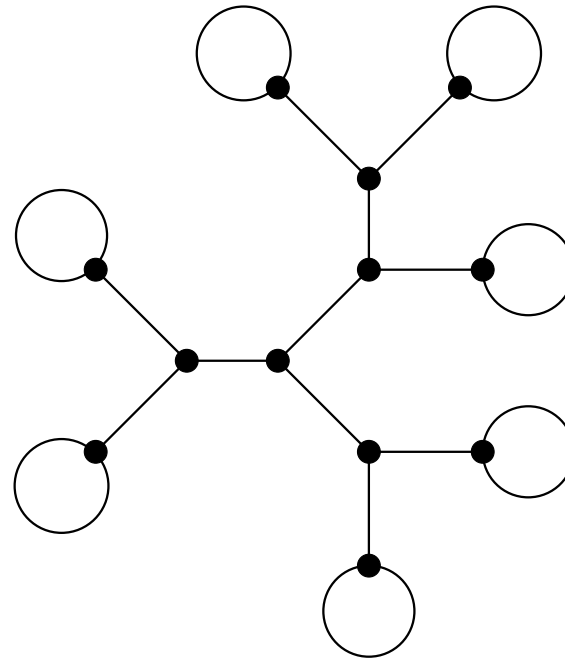
- tous les sommets sont de degré 3 ;
- toutes les faces finies sont de degré 1.

Remarque : Ceci est une traduction directe du problème en langage combinatoire, et rien d'autre !

SOLUTION :



D'abord, un arbre...



puis, on y colle des boucles

GÉNÉRALISATION :

Soient F et G deux polynômes de degré n ,

$$F(x) = \prod_{i=1}^p (x - a_i)^{\alpha_i}, \quad G(x) = \prod_{i=1}^q (x - b_i)^{\beta_i},$$

et

$$F - G = R.$$

Supposons que le pgcd des α_i, β_j soit 1. Alors :

- Si $p + q \geq n + 1$ alors $\deg R \geq 0$ (trivial), et cette borne est atteinte.
- Si $p + q \leq n + 1$ alors $\deg R \geq (n + 1) - (p + q)$, et cette borne est atteinte.

IDÉE : $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ et β_1, \dots, β_q sont les degrés des sommets noirs et blancs d'une hypercarte correspondant à la fonction de Belyi

$$f = \frac{F}{R}.$$

Conjecture *abc*

Soient a, b, c trois entiers positifs deux à deux premiers, et soit

$$a + b = c.$$

Conjecture (1ère version). Tous les trois nombres a, b, c ne peuvent pas avoir des bonnes factorisations en facteurs premiers.

Soient a, b, c trois entiers positifs deux à deux premiers, et soit

$$a + b = c.$$

Conjecture (1ère version). Tous les trois nombres a, b, c ne peuvent pas avoir des bonnes factorisations en facteurs premiers.

Plus précisément : soit

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}, \quad c = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \cdots r_n^{\gamma_n},$$

et soit

$$R = p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_m r_1 r_2 \cdots r_n.$$

Conjecture (2ème version). R ne peut pas être trop petit par rapport à c .

Soient a, b, c trois entiers positifs deux à deux premiers, et soit

$$a + b = c.$$

Conjecture (1ère version). Tous les trois nombres a, b, c ne peuvent pas avoir des bonnes factorisations en facteurs premiers.

Plus précisément : soit

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_m^{\beta_m}, \quad c = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \cdots r_n^{\gamma_n},$$

et soit

$$R = p_1 p_2 \cdots p_k q_1 q_2 \cdots q_m r_1 r_2 \cdots r_n.$$

Conjecture (2ème version). R ne peut pas être trop petit par rapport à c .

Encore plus précisément : soit $c = R^\alpha$ ou, ce qui est équivalent,

$$\alpha = \frac{\log c}{\log R}.$$

Conjecture (3ème version). Pour tout $\alpha_0 > 1$ il existe au plus un nombre fini de triplets (a, b, c) tels que $\alpha > \alpha_0$.

Corollaire. Soit

$$a = x^n, \quad b = y^n, \quad c = z^n,$$

et donc

$$x^n + y^n = z^n.$$

Il est clair que

$$R \leq xyz < z^3,$$

d'où

$$\alpha = \frac{\log c}{\log R} > \frac{\log z^n}{\log z^3} = \frac{n}{3}.$$

Par conséquent, toutes les équations de Fermat avec $n \geq 4$ prises ensemble ne peuvent avoir qu'un nombre fini de solutions.

Remarque. La borne est assez fine : si on remplace $\alpha_0 > 1$ par $\alpha_0 = 1$ alors il y a une infinité de solutions.

En effet, prenons

$$1 + (2^{6n} - 1) = 2^{6n}.$$

Alors :

- La contribution de $a = 1$ à R est 1.
- La contribution de $c = 2^{6n}$ à R est 2.
- $b = 2^{6n} - 1$ est divisible par $2^6 - 1 = 63$, donc divisible par 9 ; par conséquent, la contribution de b à R est inférieure ou égale à $b/3$.
- On conclut que

$$R \leq 1 \cdot \frac{b}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \cdot (2^{6n} - 1) < 2^{6n} = c$$

et donc $\alpha = \frac{\log c}{\log R} > 1$, et cela pour tout $n \geq 1$.

La conjecture est très loin d'être démontrée. Ce que les gens font, c'est la quête aux instances avec une grande valeur de α .

Il y a un certain nombre de publications sur ce sujet ainsi qu'au moins une thèse et quelques catalogues des "bonnes" instances.

Le record mondial : (É. Reyssat, par brute force)

$$2 + 3^{10} \cdot 109 = 23^5, \quad \alpha = 1.6299 \dots$$

Différentes stratégies existent...

Idée. Prenons une fonction de Belyi

$$f(x) = \frac{C(x)}{A(x)}.$$

Alors

$$f(x) - 1 = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{C(x)}{A(x)} - 1$$

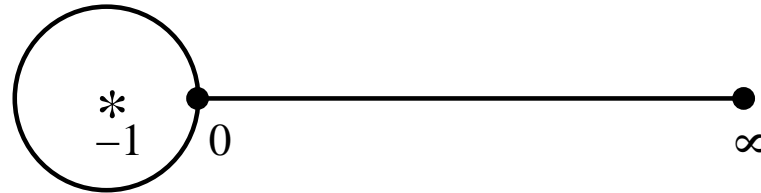
ou, de manière équivalente,

$$A(x) + B(x) = C(x).$$

A , B et C sont déjà bien factorisés *en tant que polynômes*.

Si on spécialise x à un nombre rationnel, on peut, avec “le p’tit coup d’chance”, obtenir une encore meilleure factorisation.

Let us take the following very simple map :



The corresponding Belyi function is

$$f(x) = \frac{64x^3}{(x+9)^3(x+1)}, \quad f(x) - 1 = -\frac{(x^2 - 18x - 27)^2}{(x+9)^3(x+1)}.$$

Substituting

$$x = \frac{t}{s}$$

we obtain the equality

$$64t^3s + (t^2 - 18ts - 27s^2)^2 = (t + 9s)^3(t + s).$$

All the three terms have rather nice factorizations...

1. Pour $t = -32$, $s = 23$ on obtient

$$11^2 + 3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3 = 2^{21} \cdot 23, \quad \alpha = 1.62599\dots$$

C'est la deuxième meilleure solution ; mais elle était connue auparavant.

2. La meilleure solution inconnue auparavant est

$$2^{15} \cdot 5 \cdot 67 + 11^2 \cdot 23^8 = 7^3 \cdot 3023^3, \quad \alpha = 1.35670\dots$$

3. Au total, cet exemple a produit 43 solutions avec $\alpha > 1.2$; entre elles, 11 étaient nouvelles.

4. En 1996, N. Elkies a compilé une liste de toutes les instances connues avec $\alpha > 1.2$ (il y en avait à peu près 1000). L. Habsieger et N. Magot, en utilisant la technique des fonctions de Belyi, ont trouvé ~ 700 nouvelles instances. On peut conclure que c'est une des meilleurs techniques existantes.

5. Voir aussi l'article de N. Elkies "*ABC* implies Mordell" (1991). La preuve utilise le théorème de Belyi (pour les genres $g \geq 2$).

Fonctions de Belyi et ensembles de Julia

Définition. Une fonction de Belyi $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ s'appelle **dynamique** si elle envoie $\{0, 1, \infty\}$ à $\{0, 1, \infty\}$.

(Toute combinaison parmi les 27 existante est acceptable.)

Remarque. Nous savons que

$$f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) = \{\text{sommets (noirs et blancs) et centres des faces}\}.$$

Alors, une fonction de Belyi f est dynamique si et seulement si l'hypercarte correspondante est positionnée sur la sphère complexe de telle manière que les points 0, 1 et ∞ sont “occupés” par des sommets noirs ou blancs ou par des centres de faces (toute combinaison est possible).

Rappel. En utilisant une homographie nous pouvons mettre trois points de notre choix à trois positions arbitraires sur la sphère.

Lemme. Une composition

$$h = g \circ f$$

de deux fonction de Belyi dynamiques est une fonction de Belyi – qui de surcroît est aussi dynamique.

Corollaire. Il est possible d'itérer les fonctions de Belyi dynamiques

$$f^n = f \circ f \circ \dots \circ f \quad (n \text{ fois})$$

et obtenir de nouveau une fonction de Belyi dynamique.

Ensemble de Fatou : $F =$ l'ensemble du comportement régulier des itérations.

Pour tout point $x \in F$ il existe un voisinage U de x sur lequel les itérations f^n forment une *famille normale* de fonctions : pour toute suite n_1, n_2, \dots et pour tout compacte $K \subset U$ il existe une sous-suite de f^n qui converge uniformément sur K .

Ensemble de Julia : $J = \mathbb{C} \setminus F =$ l'ensemble du comportement irrégulier des itérations.

(Ensembles de Julia sont souvent des **fractaux**.)

Chaos complet : Quand l'ensemble de Julia est

$$\boxed{J = \overline{\mathbb{C}}} .$$

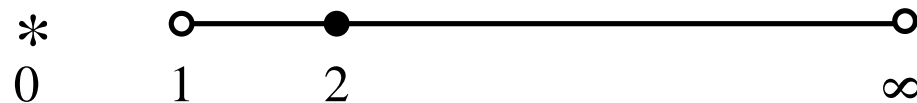
Théorème (D. Sullivan, 1982) Si tous les points critiques de f éventuellement (après un certain nombre d'itérations) deviennent périodiques mais ne sont pas eux-mêmes périodiques, alors $J = \overline{\mathbb{C}}$.

Théorème (D. Sullivan, 1982) Si tous les points critiques de f éventuellement (après un certain nombre d'itérations) deviennent périodiques mais ne sont pas eux-mêmes périodiques, alors $J = \overline{\mathbb{C}}$.

Exemple donné par Sullivan :

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x}\right)^2 .$$

Il se trouve que cette fonction est une fonction de Belyi de l'hypercarte suivante :



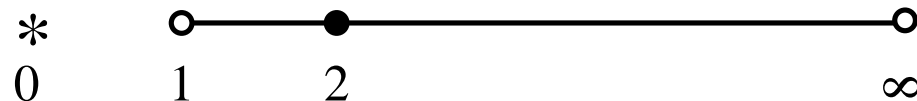
Il y a deux points critiques : 0 and 2. Quelles sont leurs trajectoires ?

Théorème (D. Sullivan, 1982) Si tous les points critiques de f éventuellement (après un certain nombre d'itérations) deviennent périodiques mais ne sont pas eux-mêmes périodiques, alors $J = \overline{\mathbb{C}}$.

Exemple donné par Sullivan :

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 .$$

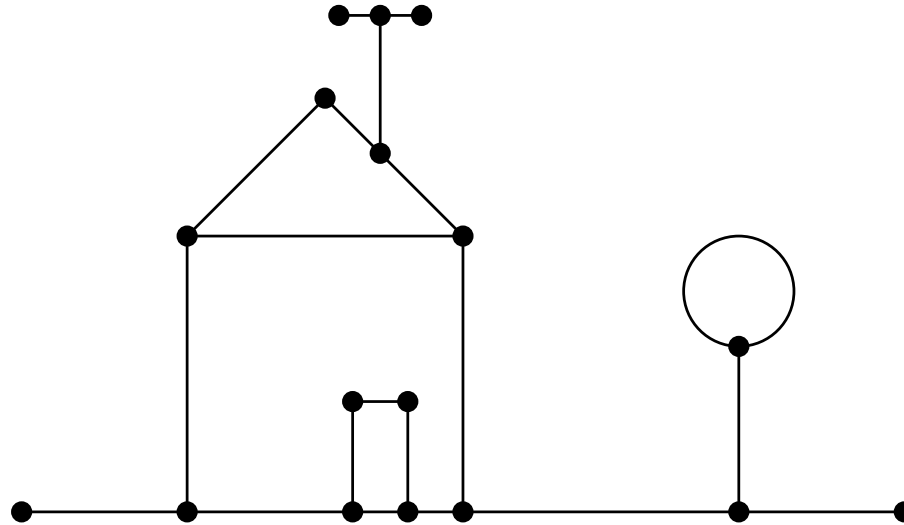
Il se trouve que cette fonction est une fonction de Belyi (dynamique) de l'hypercarte suivante :



Il y a deux points critiques : 0 and 2. Quelles sont leurs trajectoires ?

$$2 \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto 1 \mapsto 1$$

Exemple. Considérons le “dessin d’enfant” suivant :



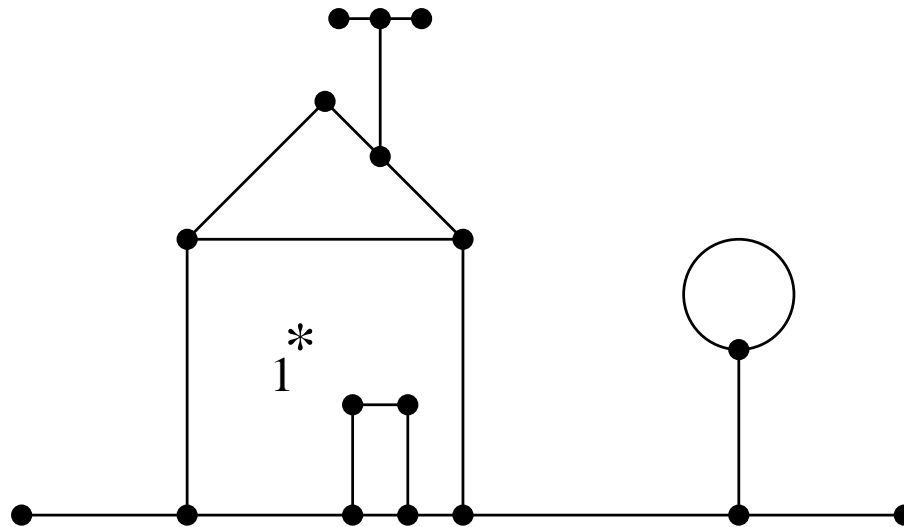
La fonction de Belyi correspondante possède plusieurs points critiques :

- tous les sommets (noirs) degré > 1 ;
- tous les centres de faces de degré > 1 ;
- tous les “invisible” sommets blancs (milieux d’arêtes).

Après une application de la fonction, tout le monde est envoyé à $\{0, 1, \infty\}$. Quelles sont les trajectoires de 0, 1 et ∞ ?

Tout d'abord il faut rendre notre fonction dynamique.

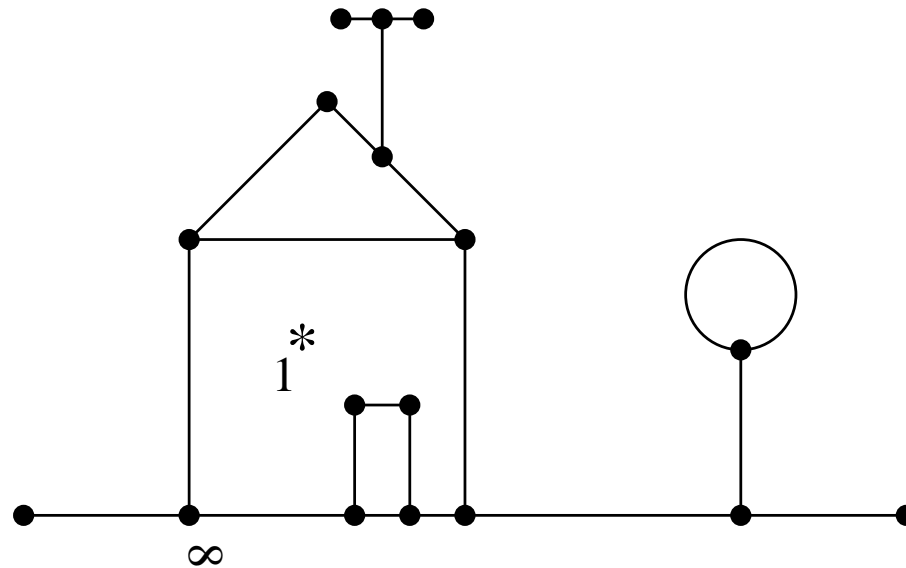
Plaçons le centre de la face indiquée sur la figure au point 1 :



Le point 1 est *centre d'une face*, donc par définition il va à l'_{∞} :

$$1 \mapsto \infty \mapsto \dots$$

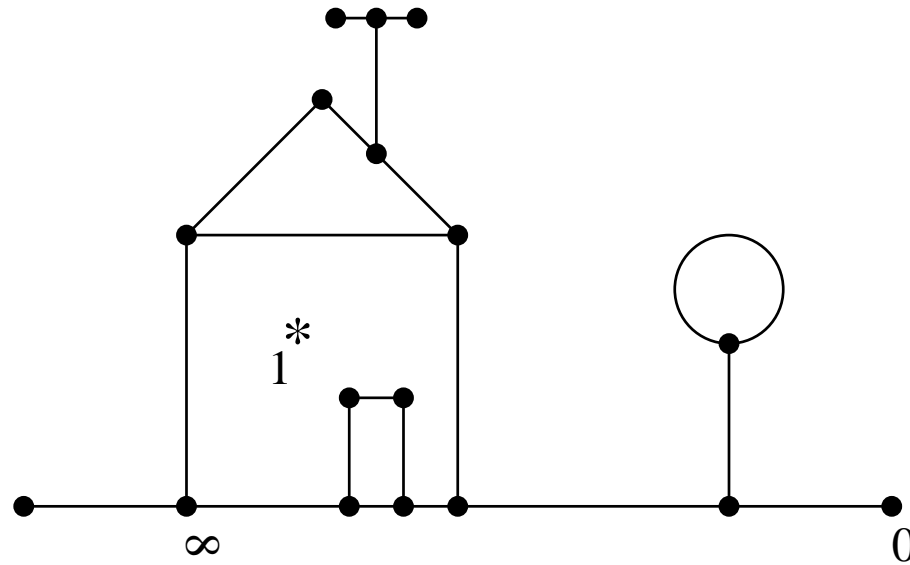
Plaçons le sommet indiqué sur la figure à l' ∞ :



Le point ∞ est un *sommet noir*, donc il est envoyé à 0 :

$$1 \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto \dots$$

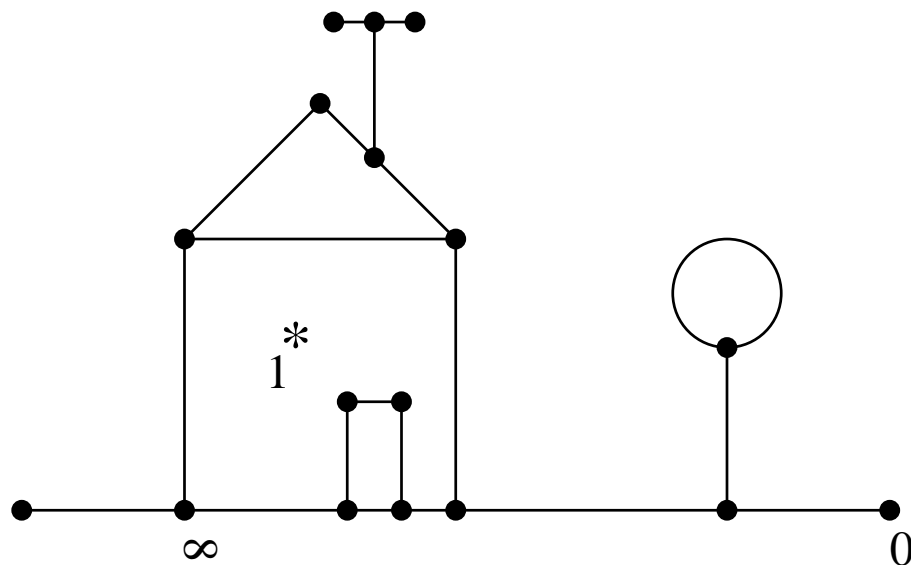
Plaçons un deuxième sommet, indiqué sur la figure, à 0.



Le point 0 est un *sommet noir*, donc il est envoyé à 0 :

$$1 \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto 0$$

Récapitulons :



$$1 \mapsto \infty \mapsto 0 \mapsto 0$$

Le point 0 est périodique, **mais il n'est pas critique !**
(Car le sommet est de degré 1.)

On a gagné : $J = \overline{\mathbb{C}}$.

PAIRES de BELYI
(cas non planaire)

Pour le genre $g \geq 1$ on cherche une **paire de Belyi** (X, f) où :

1. X est une surface de Riemann de genre g ;
2. $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ est une fonction **méromorphe** ayant au plus trois valeurs critiques : 0, 1 et ∞ .
(Ici $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère complexe de Riemann.)

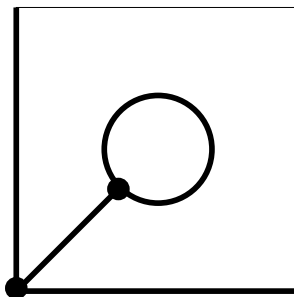
La carte (ou l'hypercarte) s'obtient comme $f^{-1}([0, 1]) \subset X$.

(Existence, unicité... tout à l'heure.)

Quelques faits fondamentaux à retenir :

1. Pour tout genre $g \geq 1$ fixé il existe une infinité de surfaces de Riemann non isomorphes du point de vue complexe (bien qu'elles soient toutes homéomorphes).
2. Une surface de Riemann = une courbe algébrique complexe.
3. Pour le calcul d'une **paire** de Belyi (X, f) , la partie la plus dure est de trouver la courbe algébrique X .
Plus exactement, il faut les chercher ensemble.
4. Le dessin détermine complètement la surface de Riemann.

Le plus grand exploit à ce jour : cette carte à 4 arêtes sur le tore :



Un point de vue plus général :

Quelles sont les données dont on a besoin pour représenter une surface de Riemann en tant que **revêtement ramifié** à n feuilles de la sphère complexe ?

Un point de vue plus général :

Quelles sont les données dont on a besoin pour représenter une surface de Riemann en tant que **revêtement ramifié** à n feuilles de la sphère complexe ?

- k points de ramification $y_1, y_2, \dots, y_k \in \overline{\mathbb{C}}$;
- k permutations $g_1, g_2, \dots, g_k \in S_n$:
 g_i est la permutation des feuilles quand on passe autour de y_i .

Conditions sur ces données :

- aucune condition sur les points de ramification y_1, y_2, \dots, y_k ;
- permutations g_1, g_2, \dots, g_k agissent transitivement sur les n feuilles (car la surface X is connexe) ;
- leur produit $g_1 g_2 \dots g_k = 1$.

Conditions sur ces données :

- aucune condition sur les points de ramification y_1, y_2, \dots, y_k ;
- permutations g_1, g_2, \dots, g_k agissent transitivement sur les n feuilles (car la surface X is connexe) ;
- leur produit $g_1 g_2 \dots g_k = 1$.

Théorème d'Existence de Riemann :

1. Il existe une surface de Riemann X et un revêtement à n feuilles $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant ces données de ramification.
2. La paire (X, f) est unique, à des isomorphismes de X et de $\overline{\mathbb{C}}$ près.

En faisant un isomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire, une homographie, on peut mettre

$$y_{k-2} = 0, \quad y_{k-1} = 1, \quad y_k = \infty.$$

Alors, il en restent :

– **données discrètes** : k permutations g_1, \dots, g_k telles que

$$g_1 \dots g_k = 1;$$

– **données continues** : $k - 3$ points de ramification y_1, \dots, y_{k-3} .

En faisant un isomorphisme de $\overline{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire, une homographie, on peut mettre

$$y_{k-2} = 0, \quad y_{k-1} = 1, \quad y_k = \infty.$$

Alors, il en restent :

– **données discrètes** : k permutations g_1, \dots, g_k telles que

$$g_1 \dots g_k = 1;$$

– **données continues** : $k - 3$ points de ramification y_1, \dots, y_{k-3} .

Et si $k = 3$?

Si $k = 3$ alors il restent seulement les données discrètes !

Si $k = 3$ alors, pour représenter un revêtement non ramifié en dehors de $0, 1$ et ∞ , on doit fournir seulement trois permutations

$$g_1 = \sigma, \quad g_2 = \alpha, \quad g_3 = \varphi$$

telles que

$$g_1 g_2 g_3 = \sigma \alpha \varphi = 1.$$

Est-il possible de représenter **TOUTE** surface de Riemann de cette manière-là ?

NON ! Mais la classe des “représentables” surfaces est remarquable.

Théorème de Belyi (G. V. Belyī, 1979) : Soit X une surface de Riemann. Une fonction méromorphe $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant au plus trois valeurs critiques existe si et seulement si X est définie sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques.

Théorème de Belyi (G. V. Belyĭ, 1979) : Soit X une surface de Riemann. Une fonction méromorphe $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant au plus trois valeurs critiques existe si et seulement si X est définie au-dessus du corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques.

Ainsi, un triplet de permutations $(\sigma, \alpha, \varphi)$ (agissant transitivement, et avec $\sigma\alpha\varphi = 1$) donne lieu à toute une variété de structures :

- une hypercarte (genre, énumération, dualité, symétries, ...) ;
- un groupe cartographique (représentations, caractères, ...) ;
- une surface de Riemann (structure complexe, courbes algébriques, espaces de modules, ...) ;
- un corps de nombres (groupe de Galois, ...).

Et toutes ces structures sont liées l'une à l'autre !

Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable.

(A. Grothendieck)

La courbe de Fermat

ou

Calculer au lieu de dessiner

Soit une courbe algébrique (courbe de Fermat)

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^n + y^n = 1\}.$$

En fait, on considère plutôt une courbe *projective*

$$\mathcal{F} = \{(x : y : z) \mid x^n + y^n = z^n\}$$

mais on ne va pas y prêter beaucoup d'attention.

Question : Soit

$$p : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x$$

la projection sur la première coordonnée. Quelles sont les valeurs critiques de p ?

Soit une courbe algébrique (courbe de Fermat)

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \mid x^n + y^n = 1\}.$$

En fait, on considère plutôt une courbe *projective*

$$\mathcal{F} = \{(x : y : z) \mid x^n + y^n = z^n\}$$

mais on ne va pas y prêter beaucoup d'attention.

Question : Soit

$$p : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x$$

la projection sur la première coordonnée. Quelles sont les valeurs critiques de p ?

Réponse : Elles sont les valeurs de x telles que l'équation

$$y^n = 1 - x^n$$

possède moins de n solutions par rapport à y , soit $\{x \mid 1 - x^n = 0\}$.

Donc, les valeurs critiques de p sont les racines n -ème de l'unité.

Pourquoi l'_∞ n'est pas une valeur critique ?

1. La projection

$$p : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^1$$

en coordonnées projectives se représente comme

$$p : (x : y : z) \mapsto (x : z)$$

où $(x : z)$ sont les coordonnées projectives en $\mathbb{C}P^1 = \overline{\mathbb{C}}$.

2. Cette projection n'est pas définie au point

$$(x : y : z) = (0 : y : 0), \quad y \neq 0;$$

heureusement, ce point n'appartient pas à la courbe de Fermat.

3. Le point $\infty \in \mathbb{C}P^1$ est représenté par

$$(x : z) = (x : 0), \quad x \neq 0.$$

Donc, l'équation de la courbe se réduit à

$$x^n + y^n = 0.$$

4. Par conséquent, vue que $x \neq 0$, l'équation possède n solutions différentes par rapport à y .

Maintenant, la fonction

$$f : x \mapsto x^n$$

envoie toutes les racines n -ème de l'unité vers 1, et crée deux nouvelles valeurs critiques : 0 et ∞ .

Par conséquent, la fonction

$$F = f \circ p : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x^n$$

est une fonction de Belyi sur \mathcal{F} .

Maintenant, la fonction

$$f : x \mapsto x^n$$

envoie toutes les racines n -ème de l'unité vers 1, et crée deux nouvelles valeurs critiques : 0 et ∞ .

Par conséquent, la fonction

$$F = f \circ p : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} : (x, y) \mapsto x^n$$

est une fonction de Belyi sur \mathcal{F} .

On a

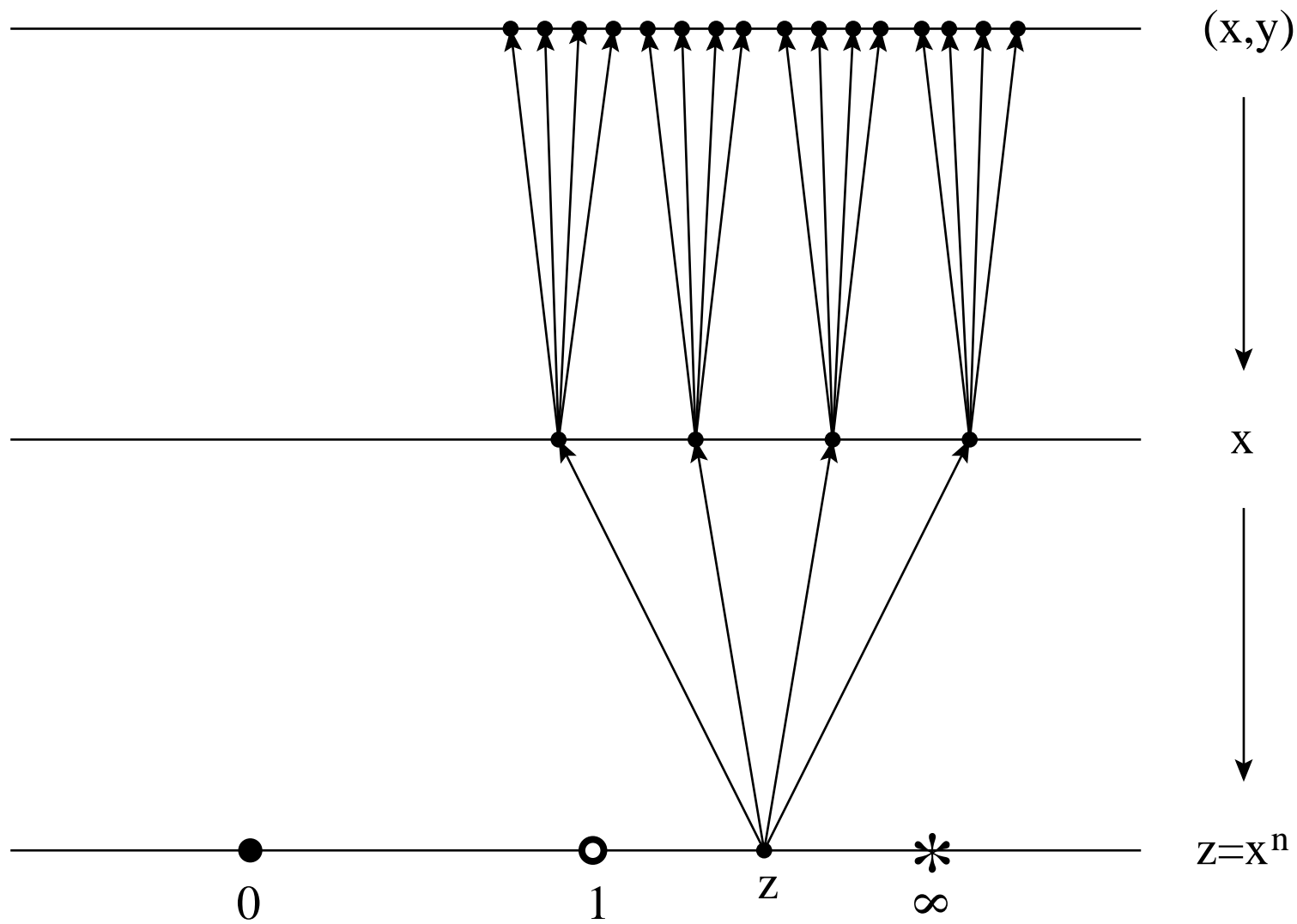
$$\deg p = n \quad \text{et} \quad \deg f = n,$$

donc

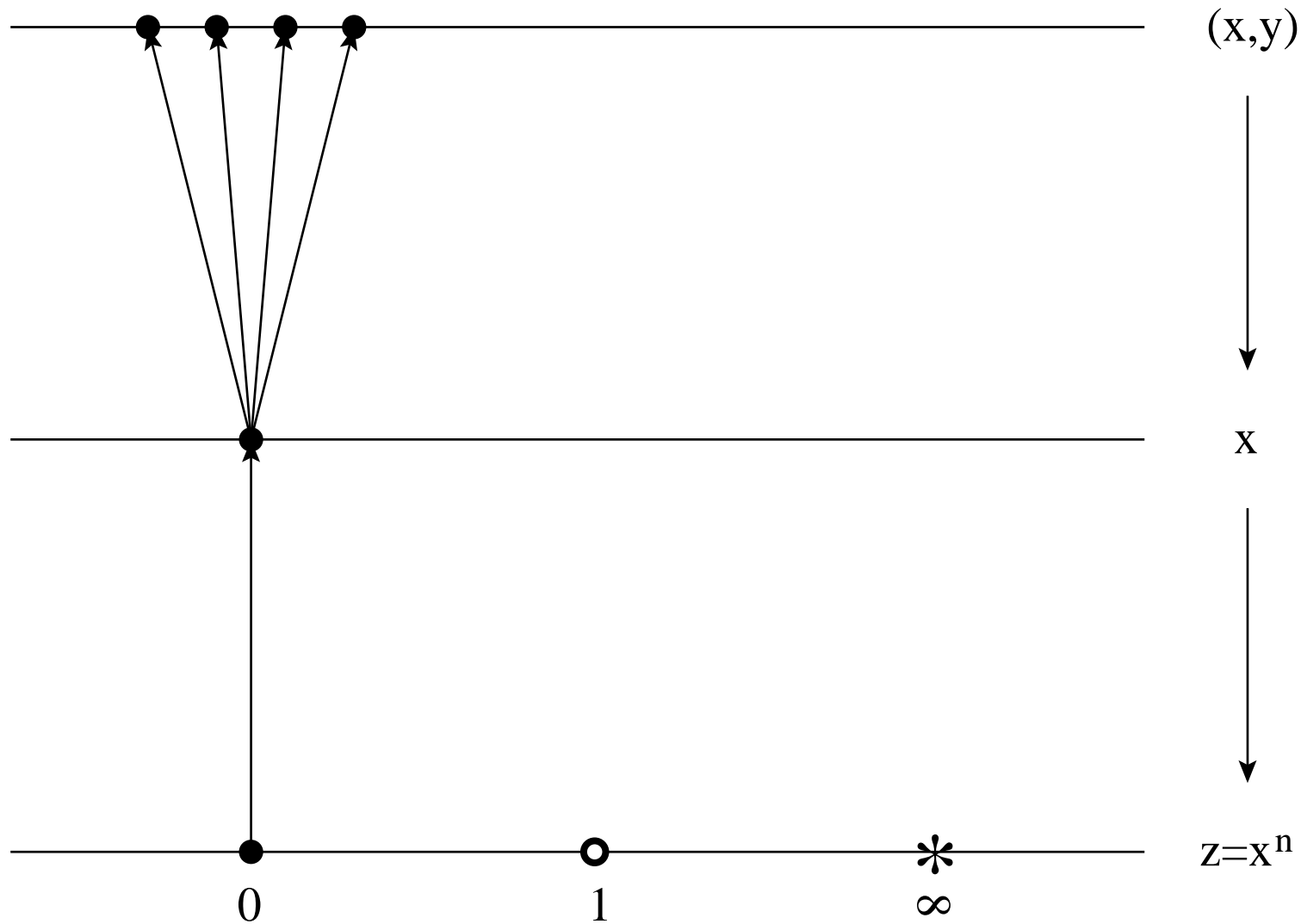
$$\deg F = n^2.$$

Seules les valeurs 0, 1 et ∞ ont n images réciproques chacune.

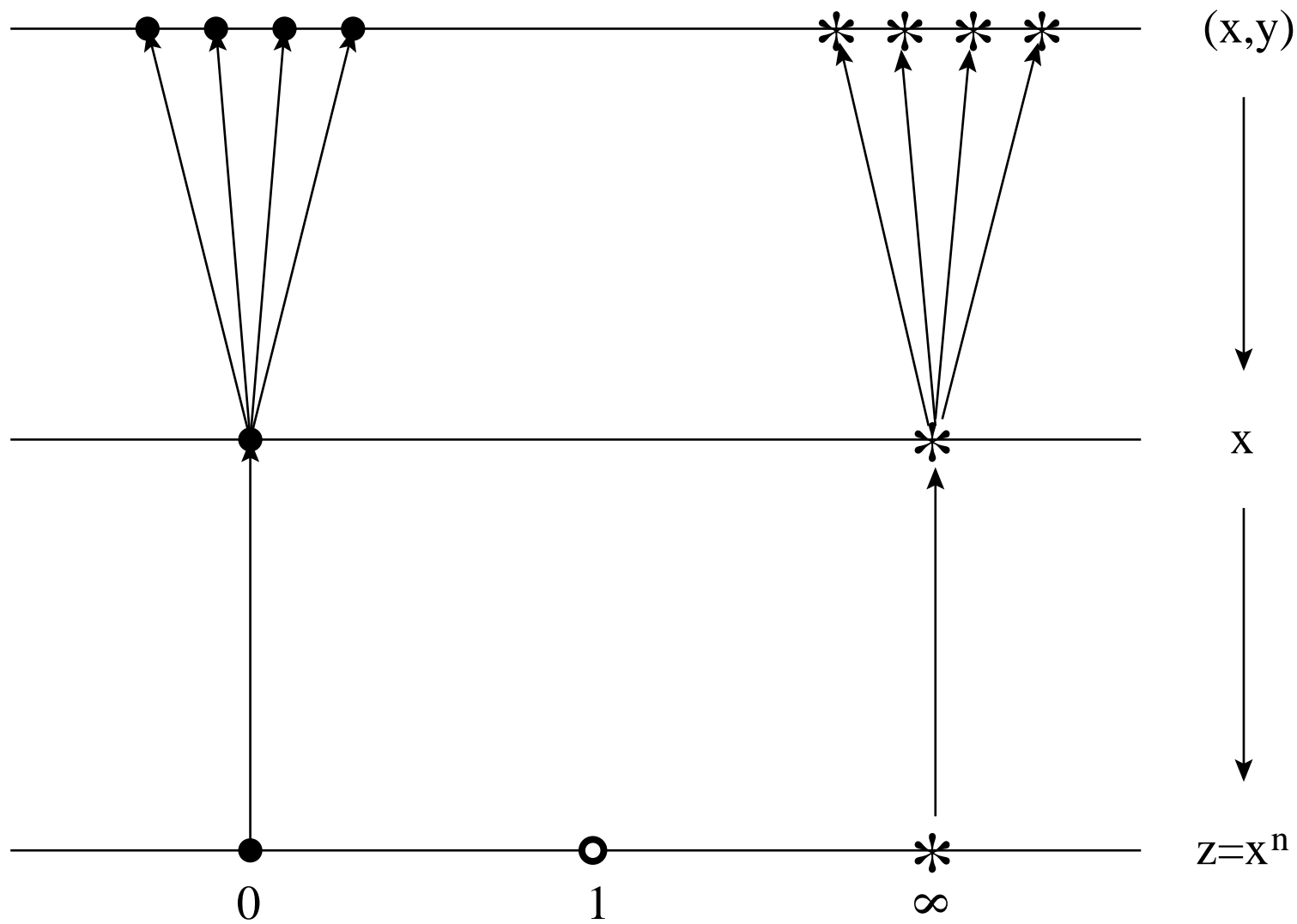
courbe de Fermat



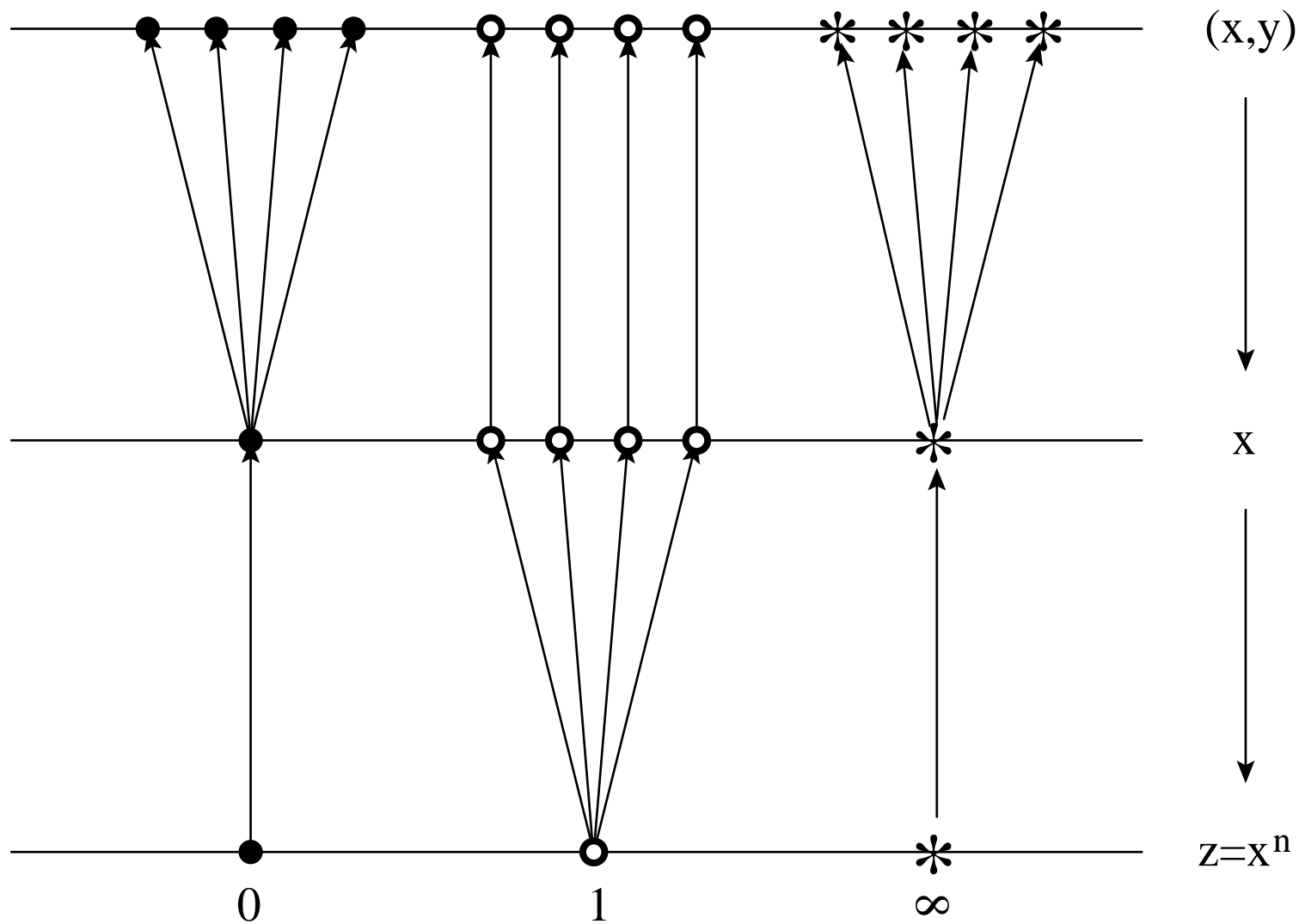
courbe de Fermat



courbe de Fermat

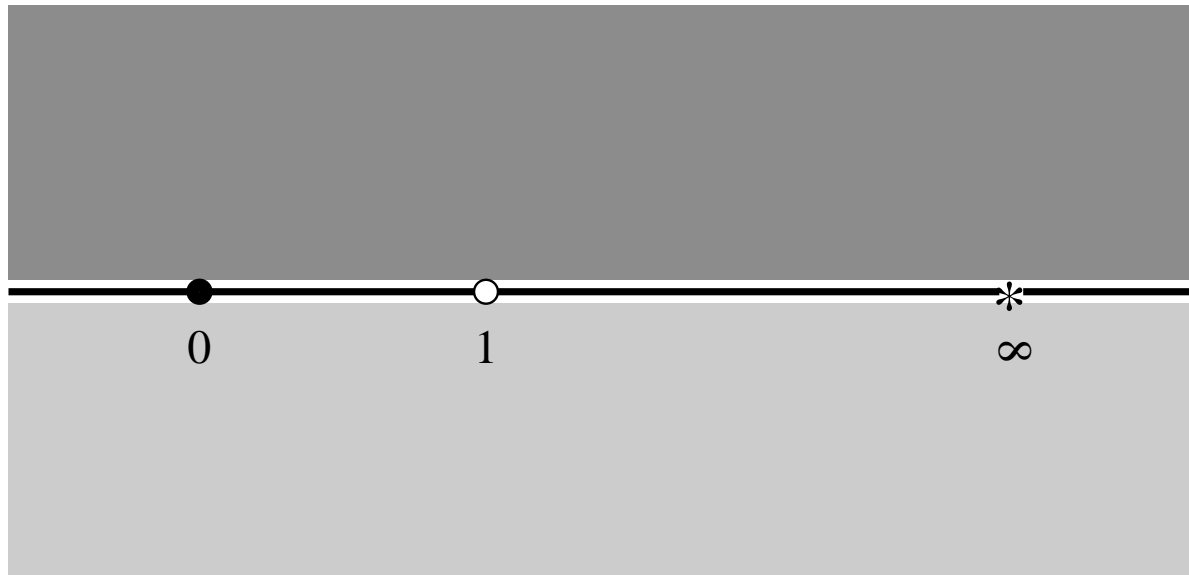


courbe de Fermat



Considérons une **triangulation** T suivante de la sphère $\overline{\mathbb{C}}$:

- 3 sommets placés au 0 , 1 et ∞ , marqués par \bullet , \circ , et $*$;
- 3 arêtes : $[0, 1]$, $[1, \infty]$ et $[\infty, 0]$;
- 2 faces triangulaires : les demi-plans supérieur et inférieur.



Question : Quelle est l'image réciproque $F^{-1}(T)$ de T ?

Réponse :

- 3 arêtes dans l'image \Rightarrow
 $3n^2$ arêtes dans l'image réciproque ;
- 2 faces triangulaires dans l'image \Rightarrow
 $2n^2$ faces triangulaires dans l'image réciproque ;
- 3 sommets de degré 2 dans l'image \Rightarrow
 $3n$ sommets de degré $2n$ dans l'image réciproque.

Réponse :

- 3 arêtes dans l'image \Rightarrow
 $3n^2$ arêtes dans l'image réciproque ;
- 2 faces triangulaires dans l'image \Rightarrow
 $2n^2$ faces triangulaires dans l'image réciproque ;
- 3 sommets de degré 2 dans l'image \Rightarrow
 $3n$ sommets de degré $2n$ dans l'image réciproque.

Corollaire :

1. Le graphe en question est le *graphe complet triparti* $\boxed{K_{n,n,n}}$.
2. Le genre du plongement est

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

3. Ce plongement est une triangulation \Rightarrow le genre est minimal.

Une remarque historique :

- Le fait que le genre minimal d'un plongement du graphe complet triparti $K_{n,n,n}$ est

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

a été démontré par A. T. White (1969) et indépendamment par G. Ringel et J. W. T. Youngs (1970).

- Mais bien évedemment ils n'ont jamais songé à ce que leur résultat purement combinatoire a quelque chose à voir avec l'équation de Fermat.

GÉNÉRALISATION :

Soient f et h deux fonctions de Belyi “**planaires**” (c’est-à-dire, rationnelles), et

$$\deg f = m, \quad \deg h = n.$$

Considérons une courbe algébrique

$$X = \{(x, y) \mid f(x) = h(y)\}.$$

Proposition : $f(x)$, et aussi $h(y)$, sont des fonctions de Belyi sur X (de degré mn).

GÉNÉRALISATION :

Soient f et h deux fonctions de Belyi “**planaires**” (c’est-à-dire, rationnelles), et

$$\deg f = m, \quad \deg h = n.$$

Considérons une courbe algébrique

$$X = \{(x, y) \mid f(x) = h(y)\}.$$

Proposition : $f(x)$, et aussi $h(y)$, sont des fonctions de Belyi sur X (de degré mn).

En effet, pour tout $t \neq 0, 1, \infty$ l’équation $f(x) = t$ possède m solutions *distinctes*, et l’équation $h(y) = t$ possède n solutions *distinctes*, soit mn paires distinctes (x, y) sur X .

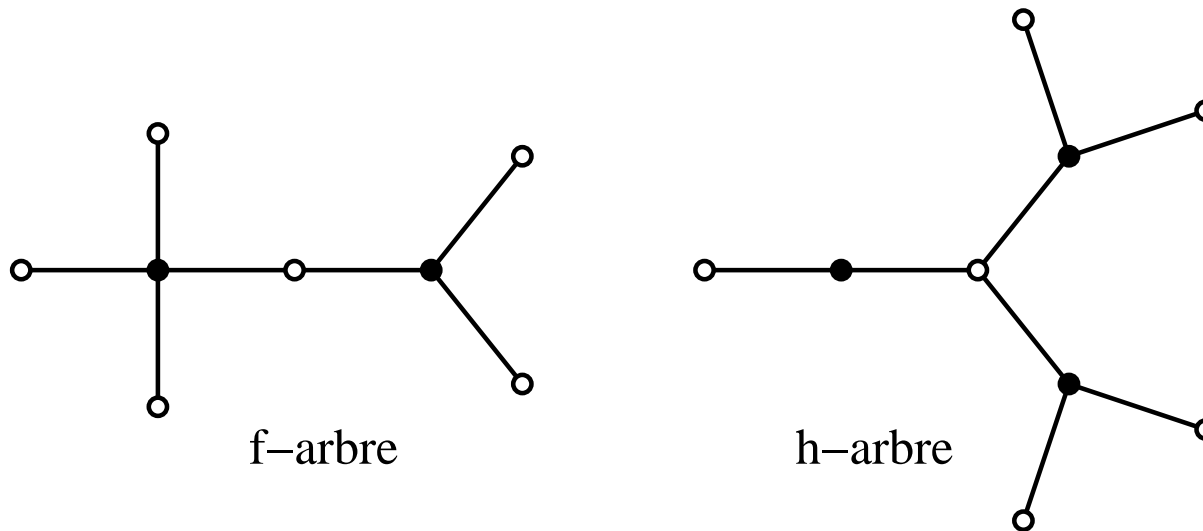
L’hypercarte correspondante peut être trouvée d’une manière combinatoire, en utilisant les hypercartes planaires correspondant à f et h .

Un exemple “stupide” :

$$f(x) = \frac{1}{2^8 3^3} x^4 (7 - x)^3,$$

$$h(y) = \frac{1}{5^5} (y^2 + 4)^3 (3y + 8)^2.$$

Voilà les deux arbres correspondants :



Le resultat :

- une surface X de genre $g = 5$;
- une fonction de Belyi de degré 56 ;
- 11 sommets noirs de degrés 12^2 6 4^2 3^6 ;
- 36 sommets blancs de degrés 6 3^5 2^5 1^{25} ;
- 1 face de degré 56.

Un autre exemple :

$$\begin{aligned} f &= \text{icosa\`edre,} \\ h &= \text{cube.} \end{aligned}$$

Le resultat :

- une surface X de genre $g = 253$;
- une fonction de Belyi de degré 1440 ;
- 96 sommets (noirs) de degré 15 ;
- 720 ar\^etes ;
- 120 faces de degré 12.

On attend des applications plus intéressantes...

COURBE DE BRING

1786 : Erland Bring trouve un changement de variables qui transforme une équation “générique” de degré 5 en

$$p(x) = x^5 + ax + b.$$

1884 : Felix Klein, dans son livre [The Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree](#), considère une courbe algébrique \mathcal{B} de degré 6 sur les coordonnées $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$ dans l'espace projectif $\mathbb{C}P^4$ définie par le système d'équations

$$\sum x_i = 0, \quad \sum x_i^2 = 0, \quad \sum x_i^3 = 0.$$

Il l'appelle *courbe de Bring*.

Normalement, 5 solutions de l'équation $p(x) = 0$ donnent lieu à 120 points sur la courbe \mathcal{B} (par permutations des racines).

Parfois, moins.

Aussi, cette courbe possède un groupe d'automorphismes S_5 .

Deux rappels :

1. Les points de l'espace projectif $\mathbb{C}P^4$ sont définis à une proportionnalité près : pour tout $\lambda \neq 0$

$$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) = (\lambda x_1 : \lambda x_2 : \lambda x_3 : \lambda x_4 : \lambda x_5).$$

Aussi, on ne peut pas avoir tous les $x_i = 0$ simultanément.

2. Les coefficients a et b du polynôme $x^5 + ax + b$ peuvent être considérés comme polynômes en x_i de degré 4 et 5 respectivement.

Ainsi,

$$(a : b) = (\lambda^4 a : \lambda^5 b).$$

Il se trouve que la courbe de Bring \mathcal{B} est de genre 4, et que l'icosaèdre de genre 4 habite sur cette courbe.

On va calculer une fonction de Belyi non pas pour l'icosaèdre mais pour l'hypercarte H "double" : on trace sur le même dessin à la fois la carte elle-même et sa carte duale.

- 24 sommets noirs de degré 5 : anciens sommets et centres de faces de l'icosaèdre ;
- 30 sommets blancs de degré 4 : points d'intersection des arêtes de la carte elle-même et de sa carte duale ;
- 60 faces de degré 2.

Fait : Discriminant du polynôme $p(x) = x^5 + ax + b$ est

$$D(p) = \prod_{1 \leq i < j \leq 5} (x_i - x_j)^2 = 256 a^5 + 3125 b^4.$$

Proposition : La fonction de Belyi de l'hypercarte "double" H ci-dessus définie est

$$f(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) = \frac{256 a^5}{256 a^5 + 3125 b^4}.$$

Notons aussi que

$$f - 1 = -\frac{3125 b^4}{256 a^5 + 3125 b^4}.$$

$$f = \frac{256 a^5}{256 a^5 + 3125 b^4}$$

Sommets noirs :

1. L'équation $a = 0$ est de degré 4 ; si on l'adjoint au système de degré 6 c'est normal que l'on obtient 24 solutions.
2. Les sommets sont tous de degré 5 car le numérateur est proportionnel à a^5 .

Du point de vue du polynôme $p = x^5 + ax + b$:

1. On a $a = 0$, on peut donc choisir $b \neq 0$ arbitrairement.
2. Considérons l'équation $x^5 - 1 = 0$. Il y a 5 solutions – racines 5ème de l'unité \Rightarrow 120 permutations possibles de ces racines.
3. Certaines suites sont *proportionnelles*. Soit ε la racine primitive de l'unité, $\varepsilon = e^{2\pi i/5}$; alors, par exemple, les suites

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$$

et

$$\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, 1$$

sont proportionnelles (ici $\lambda = \varepsilon$) et représentent donc le même point projectif.

4. Au total, on obtient $120/5 = 24$ points projectifs.

$$f - 1 = -\frac{3125 b^4}{256 a^5 + 3125 b^4}$$

Sommets blancs :

1. L'équation $b = 0$ est de degré 5 ; si on l'adjoint au système de degré 6 c'est normal que l'on obtient 30 solutions.
2. Les sommets sont tous de degré 4 car le numérateur est proportionnel à b^4 .

Du point de vue du polynôme $p = x^5 + ax + b$:

1. On a $b = 0$, on peut donc choisir $a \neq 0$ arbitrairement.
2. Considérons l'équation $x^5 - x = 0$. Il y a 5 solutions – zéro et les racines 4ème de l'unité.
3. Il y a 5 possibilités de choisir lequel des x_i soit égal à 0 ; il reste 4 racines 4ème de l'unité \Rightarrow 24 permutations, mais certaines entre elles sont proportionnelles ; finalement, on obtient $5 \cdot (24/4) = 30$ points projectifs.

$$f = \frac{256 a^5}{256 a^5 + 3125 b^4}$$

Faces :

1. Rappelons que le discriminant

$$D(p) = 256 a^5 + 3125 b^4 = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^2.$$

2. L'équation $\prod_{i < j} (x_i - x_j) = 0$ est de degré 10... etc., etc., etc.

3. Du point de vue du polynôme $p = x^5 + ax + b$:

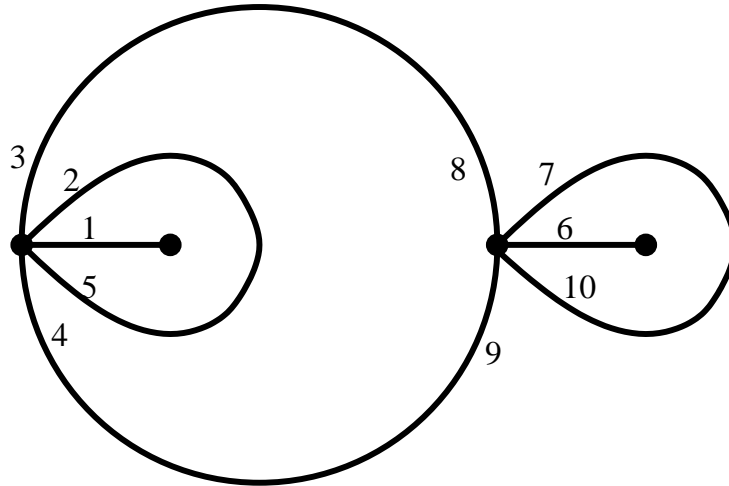
Il y a 10 possibilités de choisir une paire $x_i = x_j$, puis il reste 6 permutations des trois autres racines, soit 60 points projectifs.

Quelques remarques supplémentaires :

1. Il faut aussi démontrer que pour toutes les autres valeurs de a et de b il y a 120 points projectifs différents.
2. Pourquoi c'est notre hypercarte et non pas une autre ? – Toutes les cartes régulières jusqu'au genre $g = 15$ sont classifiées (Conder, Dobcsányi, 2001) : il en existe une seule avec un aussi grand groupe de symétries.
3. La fonction de Belyi pour l'icosaèdre de genre 4 lui-même n'est pas aussi belle que celle-ci.
4. La construction de Klein est différente : elle peut être représentée comme la projection des polyèdres de Kepler à partir de l'origine sur la sphère (avec 12 valeurs critiques qui sont les sommets de l'icosaèdre habituel). Les calculs sont plus compliqués.
5. Une piste à explorer : $p(x) = x^6 + ax + b$, etc.
6. On va en explorer une autre...

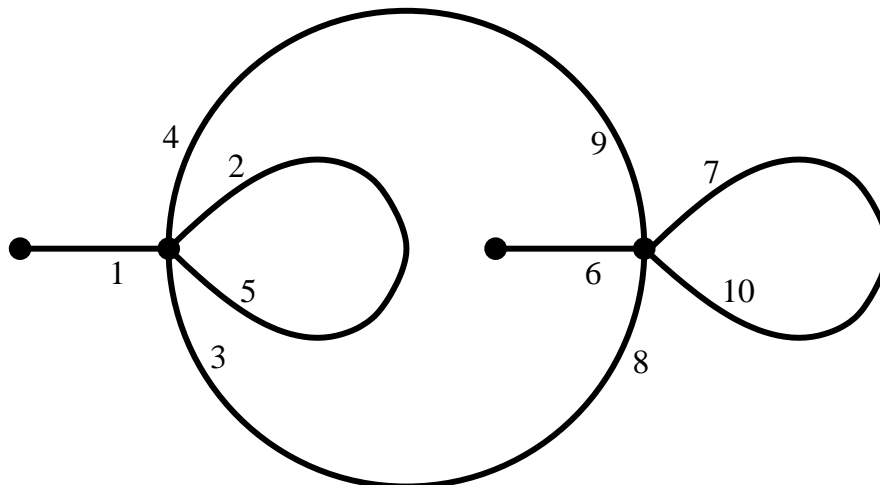
COUSINS DE BRING

Quotients des icosaèdres de genre 0 et 4 par une rotation d'ordre 5



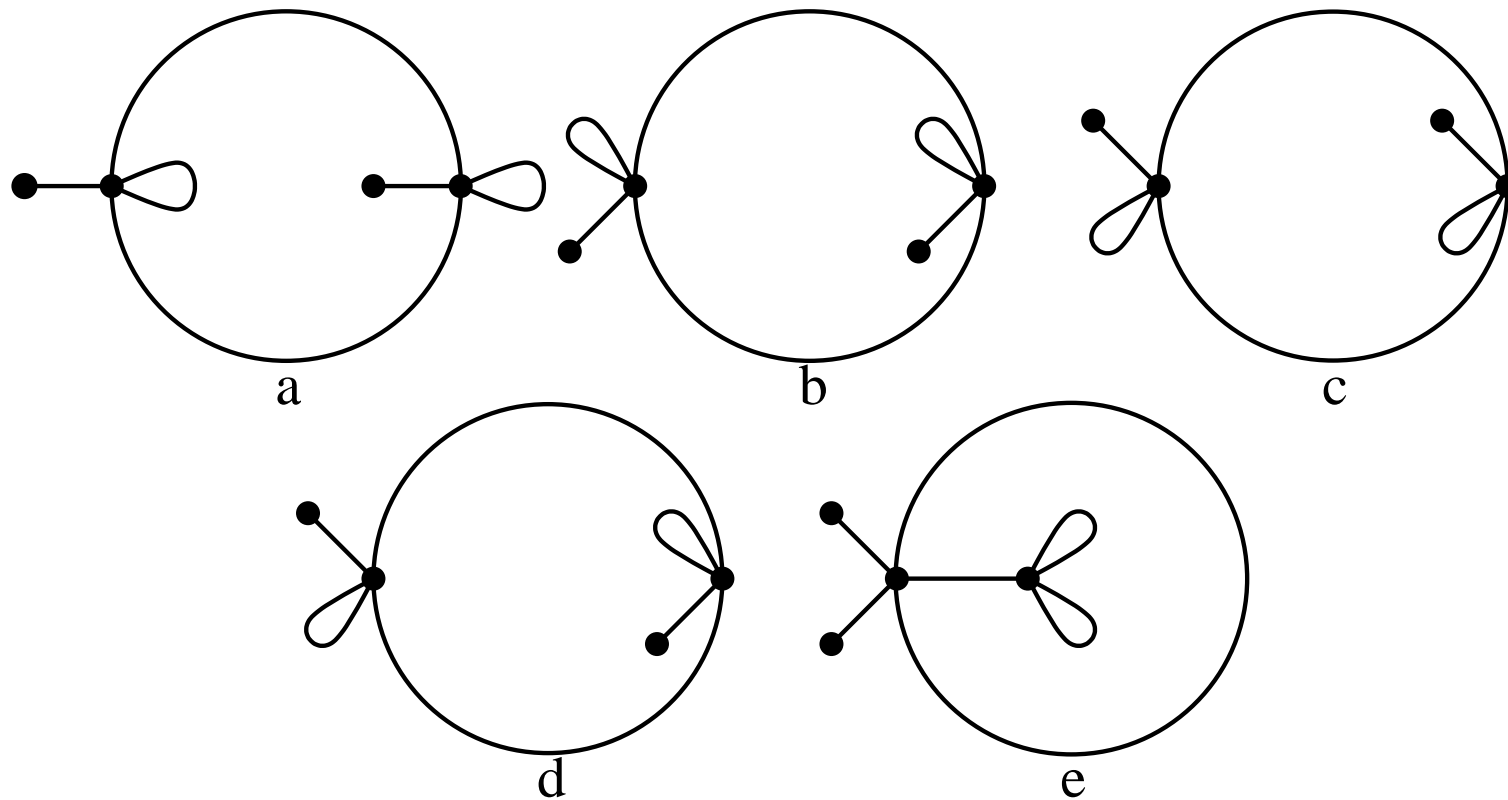
DEGRES DES FACES :

3, 3, 3, 3



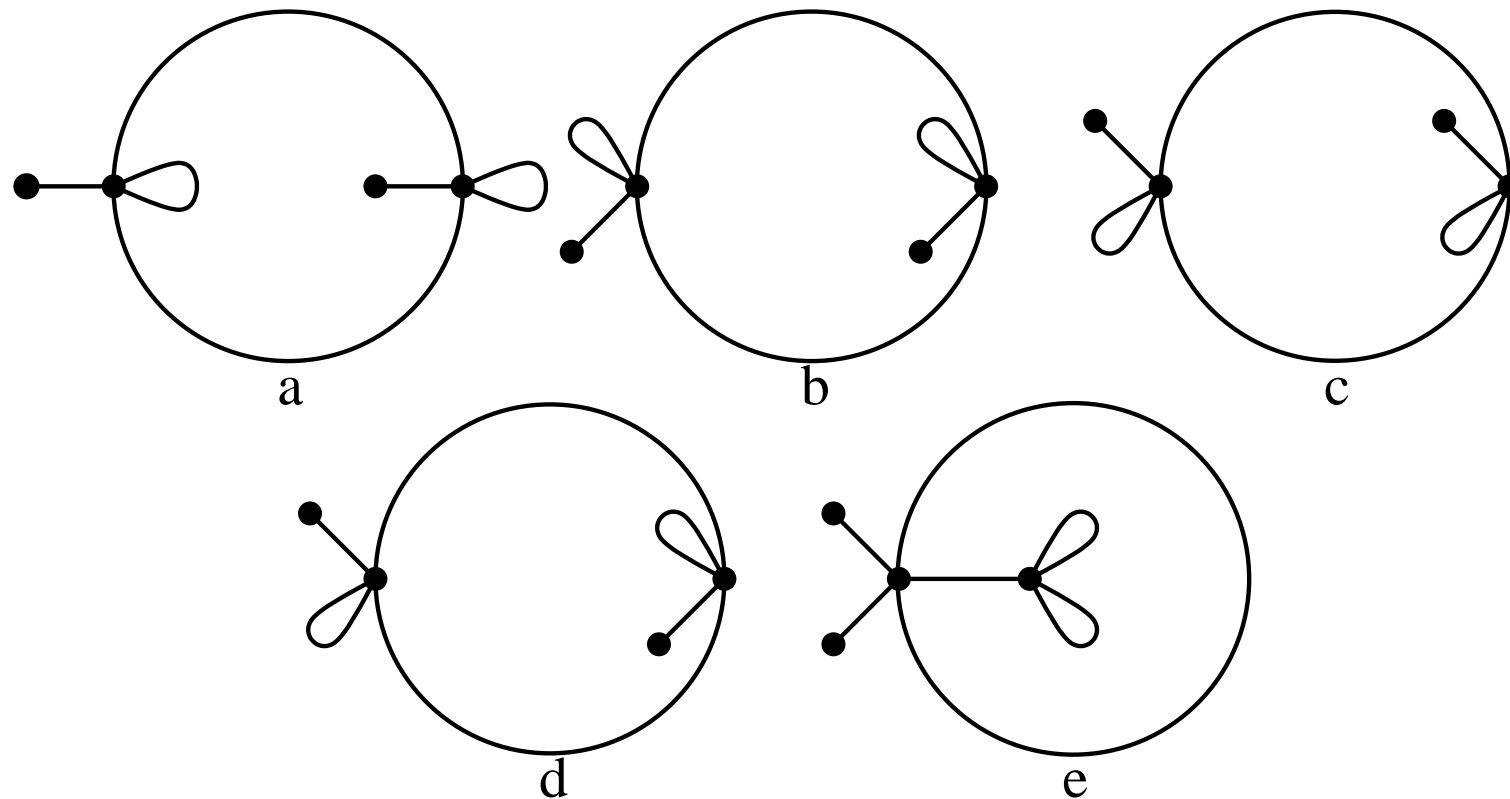
DEGRES DES FACES :

5, 5, 1, 1



Les cartes ayant

- les sommets de degrés 5,5,1,1
- les faces de degrés 5,5,1,1



Idée : Construire les revêtements de degré 5 de toutes ces cartes, avec 4 points de ramification qui sont les sommets et les centres des faces de degré 1, et tels que les 4 permutations g_1, g_2, g_3, g_4 qui déterminent le revêtement sont cyclique d'ordre 5.

Résultats : Cartes de genre 4 avec 12 sommets de degré 5, 30 arêtes et 12 faces de degré 5.

Il nous faut des quadruplets de permutations

$$g_1, g_2, g_3, g_4$$

tel que chaque g_i est un cycle de longueur 5, et leur produit

$$g_1 g_2 g_3 g_4 = 1.$$

Il y en a 60 non-isomorphes, dont 47 asymétriques et 13 symétriques de l'ordre de symétrie 5.

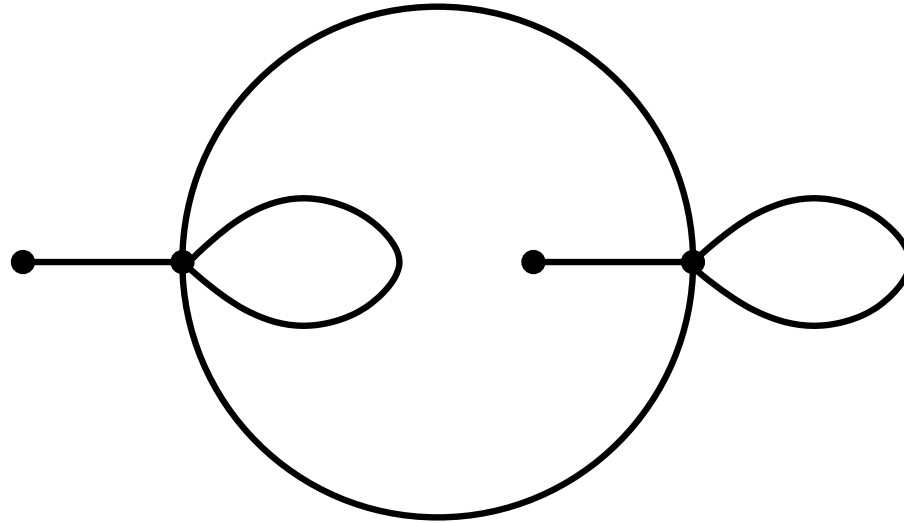
Soit $60 \cdot 5 = 300$ cartes de l'assortiment de degrés recherché.

Ce que je ne sais pas :

1. Si toutes les 300 cartes ainsi obtenues sont différentes.
2. S'il n'y a pas d'autres qu'on ne peut pas obtenir par ce procédé.

Remarque : Les revêtements des cartes (b), (c), (d), (e) ne peuvent pas donner l'icosaèdre car leurs groupes cartographiques sont beaucoup plus grands que A_5 .

Considérons alors un exemple avec la carte (a).



Fonction de Belyi :

$$f(x) = -\frac{1}{64} \frac{(x-1)^5 (x+1)^5 (x^2 - 4x - 1)}{x^5 (x^2 + x - 1)}.$$

Considérons la courbe

$$y^5 = \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 + x - 1}.$$

Faits :

1. Toutes les surfaces de Riemann de genre $g \geq 3$ se subdivisent en deux classes disjointes : les surfaces de type canonique, et les surfaces hyperelliptiques.
2. Les surfaces hyperelliptiques peuvent être représentées sous forme

$$y^2 = P(x), \quad \deg P = 2g + 1 \text{ ou } 2g + 2.$$

3. Les surfaces de type canonique admettent un plongement dans l'espace projectif $\mathbb{C}P^{g-1}$ en tant que courbes algébriques de degré $2g - 2$.
4. Il devient clair que la courbe de Bring est de type canonique : genre $g = 4$, degré $2g - 2 = 6$, et l'espace $\mathbb{C}P^3 \subset \mathbb{C}P^4$ est défini par l'équation $\sum_{i=1}^5 x_i = 0$.

Or, la courbe

$$y^5 = \frac{x^2 - 4x - 1}{x^2 + x - 1}$$

est hyperelliptique : le changement de variables

$$y = s, \quad t = 4xy^5 + 2y^5 - 4x + 8, \quad x = \frac{1}{4} \cdot \frac{t - 2s^5 - 8}{s^5 - 1}$$

la transforme en courbe

$$t^2 = 20s^{10} + 80.$$

Étant donné que le dessin détermine complètement la surface de Riemann sur laquelle il est plongé, la carte obtenue par le revêtement ci-dessus ne peut pas être isomorphe à l'icosaèdre de genre 4.

Remarque : Nous n'avons pas construit explicitement la carte en question.

```
> with(algcurves);
```

```
[AbelMap, Siegel, Weierstrassform, algfun_series_sol, differentials, genus,  
 homogeneous, homology, implicitize, integral_basis, is_hyperelliptic,  
 j_invariant, monodromy, parametrization, periodmatrix, plot_knot,  
 plot_real_curve, puiseux, singularities]
```

```
> f := y^5*(x^2+x-1)-(x^2-4*x-1);
```

$$y^5 \sqrt{x^2 + x - 1} - x^2 + 4x + 1$$

```
> genus(f, x, y);
```

4

```
> is_hyperelliptic(f, x, y);
```

true

```
> W := Weierstrassform(f, x, y, s, t);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 &] \\ - & s & - 2 & + & - & t &] \\ [2 & 10 & / & 5 & \backslash & 5 & 2 & 4 &] \\ [t^2 - 20s - 80, y, 4 \sqrt{y - 1} / x + 2y^5 + 8, \frac{\quad}{5}, s] \\ [& 5 &] \\ [& s - 1 &] \end{bmatrix}$$



Plancher mosaïque de la basilique St. Marc à Venise ; attribué à Paolo Ucello (1430).

Source : Weisstein, Eric W. "Small Stellated Dodecahedron." From MathWorld—A Wolfram

Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/SmallStellatedDodecahedron.html>

Merci !