Chaînes de Markov

Exercice 1 **Indépendance du passé et du futur**

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états Q. Soient $j_1, \ldots, j_k, i_0, \ldots, i_{n-1} \in Q$, on pose $A = \{X_{n+1} = j_1, \ldots X_{n+k} = j_k\}$ et $B = \{X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$.

1. Montrer que $P(A \mid X_n = i,\ B) = P(A \mid X_n = i)$.

2. Montrer que $P(A \cap B \mid X_n = i) = P(A \mid X_n = i)P(B \mid X_n = i)$.

Exercice 2 **Equations d'équilibre global**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états S, avec pour matrice de transition P.

1. Montrer que les équations d'équilibre global peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$\forall I \subseteq S, \qquad \sum_{i\in I}\sum_{j\notin I} \pi(i)P_{i,j} = \sum_{j\notin I}\sum_{i\in I} \pi(j)P_{j,i}.$$

2. Interpréter ces équations.

Exercice 3 **File d'attente**

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n-ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n+1$-ième début de service (non compris) et du $n+1$-ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc la relation

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}. \tag{1}$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène.

2. Cette chaîne est-elle irréductible ? à quelles conditions l'est-elle ? Quelle est sa période ?

On note Φ_a la série génératrice de A_n, Φ_n celle de X_n et aussi $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$.

3. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1}.

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n,\ \Phi_n = \Phi_{n+1}$.

4. Montrer qu'alors, on doit avoir $E[A] \leq 1$ et que si $E[A] = 1$, alors $P(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \geq 1$, $X_n = X_1$.

Exercice 4 **Processus de naissance et de mort**

Soient $(r_i), (p_i), (q_i)$ des suites telles que, pour tout $i \geq 0$, $r_i \geq 0$, $p_i > 0$, $q_i > 0$ (sauf $q_0 = 0$), et $q_i + r_i + p_i = 1$. Soit P la matrice de transition telle que $P_{ii} = r_i$, $P_{i(i+1)} = p_i$ et $P_{i(i-1)} = q_i$.

1. Donner une représentation graphique de cette chaîne de Markov.

2. Calculer la distribution stationnaire de cette chaîne de Markov, si elle existe. Sous quelles conditions existe-t-elle ? Est-elle unique ?

Exercice 5 **Chaîne de Markov réversible et marche aléatoire**

Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté. À chaque arête $e \in E$, on associe un poids $w(e) > 0$. Pour tout sommet $u \in V$, $V(u)$ est l'ensemble des voisins de u et on pose $w(u) = \sum_{v \in V(u)} w(\{u, v\})$.

Une marche aléatoire pondérée sur G est une chaîne de Markov de matrice de transition P telle que $P_{u,v} = \frac{w(\{u,v\})}{w(u)}$ si $\{u, v\} \in E$ et $P_{u,v} = 0$ sinon.

1. Montrer qu'une marche aléatoire pondérée est réversible. Quelle est sa probabilité stationnaire ?

2. Montrer qu'une chaîne de Markov réversible est une marche aléatoire pondérée.

Exercice 6 **Les cailloux**

Des cailloux $S_1, \ldots S_M$ sont alignés. À la date n, un caillou est pris au hasard, et ce caillou échange sa place avec le cailloux placé juste avant lui. Si le caillou sélectionné est en tête, on ne change rien. Par exemple, avec $M = 5$, si la situation juste avant la date n est $S_2S_3S_5S_1S_4$ (S_2 est en tête) et si S_5 est tire au sort, la situation devient $S_2S_5S_3S_1S_4$, tandis que si S_2 est sélectionné, la configuration reste la même. À chaque instant n, S_i est sélectionné avec probabilité $\alpha_i > 0$. Notons X_n la situation à la date n. Montrer que $\{X_n\}_n$ est une chaîne de Markov homogène, irréductible récurrent positive et que sa distribution stationnaire est

$$\pi(S_{i_1} \cdots S_{i_M}) = C\alpha_{i_1}^M \alpha_{i_2}^{M-1} \cdots \alpha_{i_M}.$$