Approximation poissonienne

Exercice 1 **Bornes de Chernoff pour la loi de Poisson**

Soit X une v.a. distribuée selon une loi de Poisson de paramètre μ. Montrer que pour tout $x > \mu$,

$$P(X \geq x) \leq \frac{e^{-\mu}(e\mu)^x}{x^x}$$

et que pour tout $x < \mu$,

$$P(X \leq x) \leq \frac{e^{-\mu}(e\mu)^x}{x^x}.$$

Exercice 2 **Divisibilité de la loi Poissonnienne**

Soit X une variable aléatoire poissonnienne d'espérance μ. Pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, X\}$ soit B_i une variable aléatoire de Bernoulli d'espérance p. Soit Y le nombre de B_i tel que $B_i = 1$ et Z le nombre de B_i tel que $B_i = 0$.

Montrer que Y et Z sont des variables aléatoires poissonniennes d'espérance μp et $\mu(1-p)$, et qu'elles sont indépendantes.

Exercice 3 **Approximation vs. réalité**

On jette n balles uniformément et indépendamment dans n urnes. Soit p_n la probabilité que chaque urne contienne exactement 1 balle.

1. Donner une borne supérieure pour p_n en utilisant l'approximation poissonnienne.

2. Donner une expression exacte pour p_n.

3. Interpréter le quotient de p_n et sa borne supérieure en termes d'une probabilité.

Exercice 4 **Collectionneur de coupons**

Soit X le nombre de boîtes ouvertes jusqu'à ce que le collectionneur ait obtenu tous les coupons. On veut montrer que

$$\lim_{n\to\infty} P\big(X > n \log n + cn\big) = 1 - e^{-e^{-c}}$$

pour tout $c > 0$.

Pour ça, on interprète l'événement $X > n \log n + cn$ comme une urne étant vide après le jet de $m = \lfloor n \log n + cn \rfloor$ balles dans n urnes. On dénote par $\mathcal{E}$ l'événement qu'aucune urne n'est vide si le nombre de balles dans chaque urne est une variable poissonnienne à espérance $\log n + c$ et par Y le nombre total de balles.

1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} P(\mathcal{E}) = e^{-e^{-c}}$.

2. Montrer que $P\big(|Y-m| > \sqrt{2m\log m}\big) \to 0$ quand $n \to \infty$.

3. Montrer que $P\big(\mathcal{E} \mid |Y-m| \leq \sqrt{2m\log m}\big) - P\big(\mathcal{E} \mid Y = m\big) \to 0$ quand $n \to \infty$.

4. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\mathcal{E}) = \lim\limits_{n\to\infty} P\big(\mathcal{E} \mid Y = m\big)$.

5. Conclure.

`Exercice 5` `Balles et urnes`

On jette n balles dans n urnes.

1. Quelle est la probabilité que l'urne 1 ait exactement une balle étant donné que exactement une balle est dans les 4 premières urnes ?

2. Quelle est l'espérance conditionnelle du nombre de balles dans l'urne 1 étant donné que l'urne 2 est vide ?

3. Donner une expression pour la probabilité que l'urne 1 contienne plus de balles que l'urne 2.

4. À chaque tour, on jette les balles uniformément et indépendamment dans les urnes et on retire les balles qui sont seules dans leur urne. S'il y a b balles au début d'un tour, quel est le nombre espéré $f(b)$ de balles retirées dans cette ronde ?

`Exercice 6` `Processus de branchement sous condition d'extinction`

L'*historique* d'un processus est la séquence $H = (Z_0, Z_1, \ldots, Z_T)$ du nombre d'enfants de chaque individu (parcourt en largeur). En notant $Y_t = \sum_{s=0}^{t} Z_s$, on doit donc avoir $Y_0 = 1$, $Y_t > t$ pour $t < T$, et $Y_T = T$ si $T < \infty$.

1. Soit $(x_0, \ldots, x_t)$ un historique fini. Exprimer $P(H = (x_0, \ldots, x_t))$ en fonction de la loi de Z.

On considère désormais que Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 1$. On note p la probabilité d'extinction du processus (rappel : $p = e^{\lambda(p-1)} < 1$) et $\mu = \lambda p$.

2. Montrer que μ est l'unique solution de $\frac{\phi(s)}{s} = \frac{\phi(\lambda)}{\lambda}$ telle que $s < 1$.

3. Montrer que, conditionnellement à l'extinction du processus, la loi de l'historique coïncide avec celle de l'historique pour une loi de reproduction de Poisson de paramètre μ.