Fonctions Génératrices

Exercice 1 **Ordonnancement aléatoire**

On veut distribuer n tâches à m processeurs, où m qui divise n. Chaque tâche nécessite 1 unité de temps avec probabilité p, et $k > 1$ unités de temps avec probabilité $1 - p$ (les durées de chaque tâche sont indépendantes).

Donner une bornes de type Chernoff sur le temps d'exécution global dans le cas où l'on attribue $\frac{n}{m}$ tâches à chaque processeur.

Exercice 2 **Population totale**

On considère un processus de branchement donc la probabilité d'extinction est 1. On note $\mathcal{Z} = \sum_{i,n} Z_i^{(n)}$ la population totale, et $g_{\mathcal{Z}}$ sa fonction génératrice.

Montrer que $g_{\mathcal{Z}}(s) = s\, g_Z(g_{\mathcal{Z}}(s))$.

Exercice 3 **File d'attente**

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n-ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n+1$-ième début de service (non compris) et du $n+1$-ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc la relation

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}. \tag{1}$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène.

2. Cette chaîne est-elle irréductible ? à quelles conditions l'est-elle ? Quelle est sa période ?

On note Φ_a la série génératrice de A_n, Φ_n celle de X_n et aussi $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$.

3. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1}.

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n$, $\Phi_n = \Phi_{n+1}$.

4. Montrer qu'alors, on doit avoir $E[A] \leq 1$ et que si $E[A] = 1$, alors $P(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \geq 1$, $X_n = X_1$.

Exercice 4 **Tournoi**

Un *tournoi* est un graphe complet de n sommets pour lequel chaque arête a une orientation. Si les sommets représentent des joueurs, chaque arête peut être interprétée comme un match entre ces deux joueurs : l'arête pointe vers le gagnant. Un *classement* est un ordre donné sur les joueurs. Étant donné un tournoi, on aimerait donner un classement des joueurs. On dit qu'un classement est en désaccord avec le tournoi sur l'arête i, j si $j > i$ (l'arête pointe vers j mais j est moins bien classé que i).

1. Prouver que pour tout tournoi, on peut trouver un classement qui est en désaccord sur au plus 50% des arêtes.

2. Prouver que, pour n suffisamment grand, il existe un tournoi tel que tout classement est en désaccord avec au moins 49% des arêtes.