Théorème de Foster (2)

Exercice 1 **File d'attente**

On considère une file d'attente : des clients arrivent et font la queue devant un guichet. Le guichet sert un client à la fois. On note X_n le nombre de clients dans le file (y compris celui qui est en train d'être servi) juste avant le départ du n-ième client et A_{n+1} le nombre de clients arrivant dans la file entre les instants du $n+1$-ième début de service (non compris) et du $n+1$-ième départ (compris). On suppose aussi que A_{n+1} est indépendant de X_n et que (A_n) est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées.

On a donc la relation

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}. \tag{1}$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov homogène.

2. Cette chaîne est-elle irréductible ? à quelles conditions l'est-elle ? Quelle est sa période ?

On note Φ_a la série génératrice de A_n, Φ_n celle de X_n et aussi $\pi_n(0) = P(X_n = 0)$.

3. Donner une relation entre Φ_n et Φ_{n+1}.

On veut maintenant trouver des conditions pour que la file soit dans un état *stationnaire*, c'est-à-dire que $\forall n$, $\Phi_n = \Phi_{n+1}$.

4. Montrer qu'alors, on doit avoir $E[A] \leq 1$ et que si $E[A] = 1$, alors $P(A_n = 1) = 1$ et $\forall n \geq 1$, $X_n = X_1$.

Exercice 2 **$\mathbb{N}^3$**

On considère la chaîne de Markov X sur $E = \mathbb{N} \times \{0\} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{N} \times \{0\} \cup \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{N}$ de noyau de transition Q défini de la manière suivante : $Q((0,0,0), a) = \frac{1}{3}$ si $|a| = 1$, et si $|a| > 0$ et $Q(a, b) > 0$, alors on est dans l'un des trois cas suivants :

- $|a| = |b|$
- b est obtenu à partir de a en retranchant 1 à sa composante non nulle
- b est obtenu à partir de a en ajoutant 1 à sa composante non nulle.

On note p_a et q_a les probabilité obtenues dans les cas (2) et (3) respectivement et on suppose que $\limsup_{|a| \to +\infty} p_a - q_a < 0$.

Montrez que X est récurente positive.

Exercice 3 **Arbre**

Soit $G = (S, A)$ un arbre et r un sommet quelconque de S. On définit d l'application qui à $s \in S$ donne la distance de s à la racine. On définit sur ce graphe un noyau de transition

Q irréductible qui est tel que la limite supérieure de la différence entre la probabilité de se rapprocher et la probabilité de s'éloigner de r est strictement inférieure à 0 et qu'il existe un entier $l > 0$ tel que quelque soit le sommet x à distance au moins l de r, la probabilité de se rapprocher de r à partir de x est strictement inférieure à la probabilité de s'éloigner de r à partir de x.

Montrer que Q est récurrent positif.