Modèles et Algorithmes des Réseaux

Chaînes de Markov et files d'attente

3 novembre 2015

Exercice 1 (Et si le taux d'arrivée double demain ?)**.** Considérons une file M/M/1 avec le taux d'arrivée λ et de service μ tels que $\lambda < \mu$. Supposons que le taux d'arrivée va doubler demain et que nous devons modifier notre système afin de garantir le même temps moyen de séjour des paquets. Doit-on :

— Doubler μ ?

— Moins que doubler ?

— Plus que doubler ?

Donner une explication intuitive.

Si on double le taux de service, quelles mesures de performance vont changer parmi :

— utilisation du serveur,

— débit,

— nombre moyen de paquets dans le système $E[N]$,

— temps moyen dans le système, $E[T]$?

Exercice 2 (Un lien avec connexions hétérogènes)**.** Soit $M = K \times L$, avec K et L des entiers positifs. Le lien a M canaux (serveurs) partagés entre les connexions lentes et rapides. Une connexion lente nécéssite 1 canal et une connexion rapide L canaux. Les demandes de connexion de chaque type arrivent selon des processus de Poisson indépendants de taux λ_L (connexions lentes) et λ_R (connexions rapides). Si le lien a encore suffisamment de canaux disponibles pour une nouvelle connexion, alors la demande de connexion est acceptée et le temps de service est Exp(1). Sinon, la demande est bloquée (i.e. rejetée).

1. Donner la chaîne de Markov décrivant l'évolution du système.
2. Trouver la distribution stationnaire.
3. Donner la probabilité B_L de blocage d'une connexion lente et la probabilité B_R de blocage d'une connexion rapide.

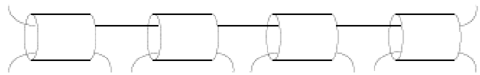
Exercice 3 (Stabilité d'un modèle dynamique des flots)**.** On considère un réseau de L liens de capacités $C_1, \ldots, C_L$ partagés par N classes de flot. On note r_i la route et x_i le nombre de flots de classe i. On suppose que le débit total alloué à ces flots $\phi_i(x)$ ne dépend que de l'état du système $x = (x_1, \ldots, x_N)$ et est partagé équitablement entre tous les flots de classe i. De plus, on suppose que $\sum_i \phi_i(x) > 0$ dès lors que $x \neq 0$.

Les flots de classe i arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ_i, requièrent le transfert d'un fichier de taille aléatoire de distribution exponentielle de taux μ_i, puis quittent le système. Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov sur l'espace d'état $\mathbb{N}^N$, de taux de transition :

$$q(x,y) = \begin{cases} \lambda_i, & y = x + e_i, \\ \mu_i \phi_i(x), & y = x - e_i. \end{cases}$$

1. Montrez que la chaîne de Markov est irréductible.
2. Soit $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ l'intensité de traffic des flots de classe i. Montrez que si la condition suivante n'est pas remplie, alors la chaîne est transitoire :

$$\sum_{i : l \in r_i} \rho_i \leq C_l, \ l = 1 \ldots, L.$$



3. Considérons le réseau linéaire suivant :

   et supposons que la capacité des liens est allouée prioritairement aux flots des routes courtes (avec préemption et conservation du travail déjà effectué). Montrez qu'une condition nécessaire pour que le réseau soit stable (la chaîne soit récurrente positive) est donnée par :

   $$\rho_0 \leq \prod_{i \geq 1} (1 - \rho_i),$$

   où ρ_0 est l'intensité de traffic des flots sur la route longue et $\rho_i,\ i > 0$, celle des flots des routes courtes.

4. Montrer que la chaîne de Markov associée à l'équité proportionnelle est stable sous les conditions usuelles de trafic :

   $$\sum_{i:l \in r_i} \rho_i < C_l,\ l = 1 \ldots, L.$$

   Indication. Utiliser le critère de Foster-Lyapunov.

Exercice 4 (Comparaison de deux politiques de partage)**.** Un canal de communication est partagé entre $K > 1$ classes d'utilisateurs. Dans le slot de temps n, il y a A_n^k paquets de classe k qui arrivent dans le système. Les arrivées de la classe k dans les différents slots de temps sont indépendantes et idéntiquement distribuées. Les arrivées entre les différents classes sont indépendantes. Les deux politiques suivantes sont considérées :

a. Le slot de temps n est atribué à la classe k avec probabilité p_k, avec $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$, les attibutions étant indépendantes pour les différents slots de temps, et indépendantes des arrivées. Dans ce cas, un paquet de classe k est transmis s'il y a des paquets de cette classe en attente au début du slot n.

b. Le slot de temps n est attribué de manière proportionelle au nombre de paquets en attente au début de slot.

Soit X_n^k le nombre de paquets de classe k en attente au début de slot n et soit $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^K)$.

— Montrer que pour chaque politique, X_n est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{N}^K$.

— Donner des conditions suffisantes pour l'irréductibilité et apériodicité pour les deux politiques.

— Pour la politique b), montrer que la chaîne est récurrente positive si

$$\sum_{k=1}^{K} \mathbb{E}[A_0^k] < 1.$$

— Montrer que pour la politique a) il ne peut pas y avoir récurrence si $\mathbb{E}[A_0^k] > p_k$ pour un k. Que se passe-t-il pour la classe k, sous la politique a), si $\mathbb{E}[A_0^k] = p_k$?