TROU SPECTRAL DE CHAÎNES DE MARKOV

SEM 25 10 2013

1/5

Chaîne de Markov discrète, homogène en temps, à états $1, 2, \ldots, n$

$$\rightsquigarrow \quad P_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

$P \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ est stochastique par ligne, càd

$$P \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{1}$ est vecteur propre à droite

---

distribution stationnaire $\pi \in \mathbb{R}_+^n$ est un vecteur propre à gauche :

$$^t\pi \cdot P = {}^t\underline{\pi}$$

Souvent, P^t s'approche à $\underline{\pi}$ quand $t \to \infty$, càd

$$\lim_{t \to \infty} P^t = \mathbb{1} \cdot {}^t\pi$$

Q) quand et avec quelle vitesse ?

1) $\boxed{\text{QUAND ?}}$

→ si la chaîne est <u>irreductible</u> et <u>apériodique</u>

---

irreductible = tout état est accessible de tout autre état

= le digraphe $G(P)$ décrit par P est fortement connexe

= la valeur propre 1 est simple

---

apériodique = l'ensemble des t tels que $P_{i,i}^{t} > 0$ est relativement premier

= le pgcd des longueurs des cycles de $G(P)$ est 1

= la valeur propre 1 est dominante

càd $|\lambda| < 1$ pour toute autre valeur propre λ

Si le pgcd est k, alors le pgcd de P^k est 1.

SEM 25 10 2013 [2/5]

$\rightsquigarrow$ $\lim_{t\to\infty} P^{kt+d}$ existe pour tout $d \in \{0, \dots, k-1\}$

$\rightsquigarrow$ $(P^t)_{t\geq 0}$ est asymptotiquement k-périodique

---

2) $\boxed{\text{QUELLE VITESSE ?}}$

valeurs propres :

$$1 = |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

vitesse exponentielle

Posons $P^\infty = \lim_{t\to\infty} P^t$.

On regarde $\|P^t - P^\infty\|$ quand $t \to \infty$ pour une norme sous-multiplicative (e.g., total variation distance $\frac{1}{2}\|\cdot\|_1$).

[3/]

Comme $P \cdot P^\infty = P^\infty \cdot P = P^\infty \cdot P^\infty = P^\infty$,

en posant $Q = P - P^\infty$,

on a $P^t - P^\infty = (P - P^\infty)^t = Q^t$.

$\boxed{\text{THM}}$ (GELFAND)

$$\lim_{t \to \infty} \|Q^t\|^{1/t} = \rho(Q)$$

où $\rho(Q)$ est le rayon spectral de Q, càd le plus grand module des valeurs propres de Q.

⇝ Quelles sont les valeurs propres de Q ?

Il est $Q = P \cdot (\underbrace{I - P^\infty}_{B})$.

$= B \cdot P$

On montre que B est une projection orthogonale, sur $\langle \pi \rangle^\perp$

-) $B^2 = B$ ✓

-) Si $\langle v, \pi \rangle = 0$, alors

$$Bv = v - P^\infty v = v - \mathbb{1} \cdot \underbrace{{}^t\pi \cdot v}_{=0} = v$$

SEM 25 10 2013 — 3/5

$$\Rightarrow \quad B|_{\langle \pi \rangle^\perp} = id \quad \checkmark$$

-) Pour tout v, on a

$$\langle Bv, \pi \rangle = \langle v, \pi \rangle - \langle \mathbb{1} \cdot {}^t\pi \cdot v, \pi \rangle =$$

$$= \langle v, \pi \rangle - \langle v, \pi \rangle \cdot \underbrace{\langle \mathbb{1}, \pi \rangle}_{=1}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Img} B = \langle \pi \rangle^\perp$$

-) $\underline{\ker B = ?}$

$$Bv = 0 \Leftrightarrow v = P^\infty v = \langle v, \pi \rangle \cdot \mathbb{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad v \in \langle \mathbb{1} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \ker B = \langle \mathbb{1} \rangle$$

$\Rightarrow$ $\boxed{4}$ Pourquoi pas $\langle \pi \rangle$?

Solution :

Définir un nouveau produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle_\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \overline{y_i}$$

Il est $\langle v, \pi \rangle = \langle v, \mathbb{1} \rangle_\pi$ ✓

$\Rightarrow \quad \langle \pi \rangle^\perp = \langle \mathbb{1} \rangle^{\perp_\pi}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{C}^n = \ker B \oplus \operatorname{img} B$$

$$= \langle \mathbb{1} \rangle \oplus \langle \mathbb{1} \rangle^{\perp_\pi}$$ ✓

$\rightsquigarrow$ projection orthogonale par rapport à $\langle \cdot , \cdot \rangle_\pi$.

Retour aux valeurs propres de Q,

Tout vecteur propre de Q est dans $\langle \mathbb{1} \rangle^{\perp_\pi}$

car $Qv = BPv \in \langle \mathbb{1} \rangle^{\perp_\pi}$

SEM
25 10
2013
4/5

Or, pour tout vecteur

$v \in \langle \mathbb{1} \rangle^{\perp\pi}$, on a

$Qv = Pv$.

et $Q\mathbb{1} = 0$.

$\Rightarrow$ le spectre de Q est celui de P sauf la valeur 1 qui est devenue 0.

$\Rightarrow \quad \rho(Q) = |\lambda_2|$ de P

$\Rightarrow$ [GELFAND]

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} \|P^t - P^\infty\|^{1/t} = \\ &= \lim \|Q^t\|^{1/t} = \rho(Q) = \\ &= |\lambda_2| \end{aligned}}$$

Donc la vitesse de convergence est plus grande quand $|\lambda_2|$ est plus petit.

On appelle $1-|\lambda_2|$ le <u>trou spectral</u> et on le veut grand.

---

3) $\boxed{\text{COMMENT LE BORNER?}}$

Commencons avec le cas reversible.

P reversible $\Leftrightarrow$ $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$

$\Leftrightarrow$ $\langle Px, y\rangle_\pi = \langle x, Py\rangle_\pi$

$\Leftrightarrow$ P est auto-adjoint par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\pi$

$\rightsquigarrow$ P reversible $\Rightarrow$ P diagonalisable.

Prendre un vecteur propre correspondant à λ_2 et utiliser l'inégalité de Poincaré donne

min dans π

entrée minimale de P qui est >0

$$1-\lambda_2 \geq \frac{\pi_{min} \cdot P_{min}}{2D}$$

D ← diamètre de $G(P)$

SEM 28 10 2013

5/5

Si P n'est pas reversible, on peut utiliser le fait que $P^* \cdot P$ le soit.

adjoint par rapport à $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$

La matrice $\dfrac{P^* + P}{2}$ est ~~aussi~~ reversible. aussi.
