École Normale Supérieure   Traitement du signal
21 mars 2017

Feuille d'exercices n^{o}7

Exercice 1

Soit $p \in [0; 1]$. Soit ϵ une variable aléatoire qui vaut 0 avec probabilité p et 1 avec probabilité $1 - p$. On considère le processus tel que $X[n] = (-1)^{n+\epsilon}$.

1. Dire en fonction de p s'il est stationnaire ? stationnaire au sens large ?

2. Pour les cas où il est stationnaire, calculer son espérance et son autocovariance.

Exercice 2 : processus gaussiens

Dans cet exercice, on admet que, si une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est gaussienne, alors, pour toute fonction linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(X)$ est également une variable aléatoire gaussienne.

1. a) Soit $X[n]$ un processus gaussien stationnaire et $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ à support fini. Montrer que $X \star h$ est toujours un processus gaussien stationnaire.
b) Quelle est l'espérance de $X \star h$? son autocovariance ?

2. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme $\gamma(\theta) = a_{-d}e^{-id\theta} + ... + a_d e^{id\theta}$, où les $a_{-d}, ..., a_d$ sont des réels. Montrer qu'il existe un processus gaussien stationnaire d'espérance nulle et dont la covariance satisfait $\hat{R}_X = |\gamma|^2$.

3. [Plus difficile] Montrer plus généralement que, pour toute fonction F paire, positive et 2π-périodique telle que $\int_{-\pi}^{\pi} F^2(s)ds < +\infty$, il existe un processus gaussien stationnaire d'espérance nulle et dont la covariance satisfait $\hat{R}_X = F$.

Exercice 3 : estimation de $\hat{R}_X$

Soit $X[n]$ un processus du second ordre, stationnaire au sens large et centré. On pose :

$$F_N(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{-in\omega} \right|^2$$

et l'on propose d'utiliser F_N comme estimateur de $\hat{R}_X$.

1. Montrer que l'on peut récrire F_N de la façon suivante :

$$F_N(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{|k|<N} \sum_{p=0}^{N-1-|k|} X[p]X[p+|k|]e^{-ik\omega}$$

2. a) Calculer le biais $B_N(\omega) = E(F_N(\omega)) - \hat{R}_X(\omega)$.
b) Montrer que celui-ci tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, sous des hypothèses sur $R_X[k]$ que l'on précisera.

3. On suppose que X est un bruit blanc gaussien. Calculer la variance $V_N(\omega) = E(|F_N(\omega) - E(F_N(\omega))|^2)$. Montrer que l'estimateur n'est pas « consistant », c'est-à-dire que $V_N(\omega) \not\to 0$ quand $N \to +\infty$.

4. On découpe le signal en L morceaux : on pose $X_l[n] = X[n + (l-1)M]$ pour $0 \leq n \leq M-1$ et $X_l[n] = 0$ sinon. On considère alors $F_{l,M}$ l'estimateur précédent appliqué au signal X_l :

$$F_{l,M}(\omega) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} X_l[n] e^{-in\omega} \right|^2$$

On considère alors le nouvel estimateur pour $\hat{R}_X(\omega)$ qui est construit simplement en moyennant les estimateurs $F_{l,M}$:

$$\tilde{F}_{L,M}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} F_{l,M}(\omega)$$

On suppose toujours que X est un bruit blanc gaussien. Calculer le biais et la variance de ce nouvel estimateur. Comparer ces résultats avec les précédents.

Exercice 4 : filtrage adapté

On veut détecter un signal connu $f[n]$ translaté en un point p inconnu et dégradé par un bruit stationnaire $B[n]$. Le signal observé s'écrit donc :

$$D[n] = f[n-p] + B[n]$$

La détection se fait par un filtrage $h[n]$ suivi d'un seuillage.

1. On définit le rapport signal sur bruit du filtrage par :

$$\rho[n] = \frac{|f \star h[n-p]|^2}{E\left(|B \star h[n]|^2\right)}$$

a) Exprimer $f \star h[0]$ en fonction de $\hat{f}$ et $\hat{h}$, sous la forme d'une intégrale.
b) Exprimer $E\left(|B \star h[n]|^2\right)$ en fonction de $\hat{h}$ et de la puissance spectrale $\hat{R}_B$ de B.

2. Soit $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} \text{ tq } \hat{R}_B(\omega) = 0 \text{ et } \hat{f}(\omega) \neq 0\}$.
a) Montrer que si Ω est de mesure non-nulle, alors il existe h tel que $\rho[p] = +\infty$.
b) Montrer que si $\hat{R}_B$ ne s'annule pas, alors :

$$\rho[p] \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{R}_B(\omega)} d\omega$$

et en déduire l'expression d'un filtre h atteignant cette borne.
c) Montrer que si B est un bruit blanc, on peut choisir ce filtre indépendamment de la variance du bruit.

3. On détecte la présence et la position du signal par un seuillage :

$$\theta_T(D \star h[n]) \quad \text{avec } \theta_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \geq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner une valeur de T en fonction de f et h et une condition sur $\rho[p]$ pour que $\theta_T(D \star h[p]) = 1$ avec forte probabilité et $\theta_T(D \star h[n]) = 0$ avec forte probabilité pour n loin de p.
(On supposera que $f \star h[k] \to 0$ lorsque $|k| \to +\infty$.)