École Normale Supérieure
21 février 2017

Traitement du signal

Feuille d'exercices n°3

Exercice 1

Soit $T > 0$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $[\omega_0 - \frac{\pi}{T}; \omega_0 + \frac{\pi}{T}]$, pour un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ connu.
Donner une formule permettant de reconstruire f à partir de $(f(nT))_{n\in\mathbb{Z}}$.
2. On suppose maintenant que le support de $\hat{f}$ est inclus dans $\left[-(N+1)\frac{\pi}{T}; -N\frac{\pi}{T}\right] \cup \left[N\frac{\pi}{T}; (N+1)\frac{\pi}{T}\right]$ pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$.
Donner à nouveau une formule de reconstruction.

Exercice 2 : reconstruction à l'aide de moyennes locales

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ un signal à bande limitée : $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset \left[-\frac{\pi}{T}; \frac{\pi}{T}\right]$. On pose :

$$f[n] = \int_{(n-1)T}^{nT} f(t)dt$$

1. Montrer que $f[n] = (f \star \rho)(nT)$, où l'on précisera $\rho(t)$.
2. On pose $\tilde{f}(t) = f \star \rho(t)$. Donner une formule de reconstruction de $\tilde{f}(t)$ en fonction des $\{f[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
3. Donner une formule de reconstruction de $f(t)$ à partir de $\{f[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 3

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$.
On veut établir des théorèmes d'échantillonnage sur un espace de fonctions V autre que l'espace des fonctions à bande limitée. On souhaite que, pour toute fonction $f \in V$, la formule suivante soit valable :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\rho(t - nT)$$

où $\{\rho(. - nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille libre de V.

1. Montrer que :

$$\rho(nT) = 0 \text{ si } n \neq 0$$
$$\rho(0) = 1$$

et que $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\rho}\left(\omega + \frac{2k\pi}{T}\right) = T$. (On fera l'hypothèse que $\hat{\rho}$ décroît suffisamment rapidement pour que cette somme converge convenablement.)

2. Donner des exemples de couples (ρ, V).

Exercice 4 : suréchantillonnage

On s'intéresse à la vitesse de convergence de la formule de reconstruction

$$f(t) = \sum_n f(n)\mathrm{sinc}(\pi(t-n))$$

où $f \in L^2(\mathbb{R})$ est telle que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\pi; \pi]$.
On pose, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $f_N(t) = \sum_{|n|\leq N} f(n)\mathrm{sinc}(\pi(t-n))$.

1. Montrer que $f_N \to f$ dans L^2 et $f_N \to f$ uniformément.

2. a) Montrer que, pour toute f et pour tout t, $|f_N(t) - f(t)| = o(N^{-1/2})$ (quand $N \to +\infty$).
b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction f telle que, pour tout $N > 0$, $\left|f_N\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \geq N^{-(1/2+\epsilon)}$.

3. On s'intéresse maintenant aux fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{Supp}(\hat{f}) \subset [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
Montrer qu'il existe une fonction ρ telle que, pour toute fonction f de ce genre :

$$f(t) = \sum_n f(n)\rho(t-n)$$

et telle que, si on pose $f_N(t) = \sum_{|n|\leq N} f(n)\rho(t-n)$, on a, pour toute f, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f_N(t) - f(t) = o(N^{-k}) \qquad \text{quand } N \to +\infty$$

Exercice 5 : qualité de l'approximation et régularité

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'ensemble des fonctions continues de $[0; 1]$ vers $\mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque segment de la forme $[k2^{-n}; (k+1)2^{-n}]$ avec $k \in \{0, ..., 2^n - 1\}$.
Pour toute fonction continue $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\epsilon_n(f) = \inf_{g\in E_n} ||f - g||_\infty$$

1. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\epsilon_n(f) = o(2^{-n})$ quand $n \to +\infty$.

2. On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\epsilon_n(f) = O(2^{-\alpha n})$. Montrer que f admet une dérivée dans L^∞.
[Par ≪ admet une dérivée dans L^∞ ≫, on veut dire qu'il existe $\tilde{f} \in L^\infty$ telle que, pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t) - f(0) = \int_0^t \tilde{f}(u)du$.]