Christophe Clavier ⋆ **Borne inférieure d'un éventuel nombre parfait impair**

Résumé : Un entier N est dit *parfait* si $\sigma(N) = 2N$, où $\sigma(N)$ est la somme des diviseurs (pas nécessairement premiers) de N. Par exemple, 6 et 28 sont des nombres parfaits. Nous connaissons aujourd'hui 49 nombres parfaits [1] qui sont tous pairs. La question de savoir s'il existe des nombres parfaits impairs date de l'antiquité et est aujourd'hui encore non résolue : nous n'en connaissons pas et ne savons pas prouver qu'il n'en existe pas. Pourtant, progressivement, la connaissance sur ce sujet permet d'établir des contraintes de plus en plus fortes (mais qui restent négligeables devant l'infini) en termes de bornes inférieures sur N lui-même mais aussi, entre autres, sur $\omega(N)$ [2] ou sur $\Omega(N)$ [3]. Par exemple, un résultat récent prouve qu'il n'existe aucun nombre parfait impair inférieur à 10^{1500}.

Après avoir établi un état de l'art sur la recherche des nombres parfaits impairs, vous étudierez le premier papier cité en référence décrivant une méthode permettant de générer – sous la forme d'un arbre de contradictions – une preuve qu'un nombre parfait impair ne peut pas être inférieur à 10^{160}. La partie principale de votre travail consistera à étudier et comprendre cette méthode, et à l'implémenter pour générer la-dite preuve.

Si le temps le permet, nous pourrons envisager l'étude du deuxième papier cité en référence qui améliore la méthode précédente et permet d'atteindre la borne 10^{300}.

Prérequis : Goût pour les mathématiques récréatives, la factorisation et la primalité. Un bon niveau de programmation en langage C est requis.

Références :

R. P. Brent et G. L. Cohen. *A New Lower Bound for Odd Perfect Numbers* ; Mathematics of Computations, Vol. 53, No. 187, July 1989, pp. 431-437.
Lien : `http://maths-people.anu.edu.au/~brent/pub/pub100.html`

R. P. Brent, G. L. Cohen et H. J. J. te Riele. *Improved Techniques for Lower Bounds for Odd Perfect Numbers* ; Mathematics of Computations, Vol. 57, No. 196, October 1991, pp. 857-868.
Lien : `http://maths-people.anu.edu.au/~brent/pub/pub116.html`

---

1. Le plus grand d'entre eux a été découvert en janvier 2016 et fait plus de 44 millions de chiffres décimaux.
2. $\omega(N)$ est le nombres de diviseurs premiers distincts entrant dans la décomposition de N en produits de facteurs premiers. Exemple : $\omega(180) = 3$.
3. $\Omega(N)$ est le nombres de diviseurs premiers de N non nécesssairement distincts (les multiplicités sont comptées). Exemple : $\Omega(180) = 5$.