Compte rendu du livre:
LA BOSSE DES MATHS
par Stanislas Dehaene
Odile Jacob, 1997.

Giuseppe Longo
LIENS (CNRS) et Dépt. de Mathématiques et Informatique
ECOLE NORMALE SUPERIEURE, Paris

Le livre de Stanislas Dehaene dresse un panorama de très grand intérêt sur un domaine de recherche peut-être peu connu des lecteurs de cette revue: la "Cognition Mathématique". Ce domaine est relativement jeune, mais la masse de données disponibles ainsi que sa diffusion dans le monde sont déjà considérables. Les données se basent sur des expériences sur le "traitement cérébral" des nombres chez les animaux et chez l'homme, de la plus petite enfance à l'age adulte, avec une attention particulière portée aux pathologies neuro-psychiques.

Pourquoi le lecteur, mathématicien ou philosophe des mathématiques, devrait-il s'intéresser à ce livre, dont il pourrait craindre qu'il n'appartienne à un nouveau courant phrénologique? D'abord, par ce que la vieille phrénologie est bien éloignée de l'esprit du livre, ensuite par ce que le texte propose explicitement ou implicitement des problèmes de philosophie des mathématiques d'un grand intérêt. Mais son but est un autre, comme j'essayerai de dire à la fin de ce compte-rendu: c'est de donner un nouveau rôle aux mathématiques, qui s'ajoute à ceux qui lui sont propres, celui de paradigme pour l'analyse de la cognition humaine. On essayera de rendre compte des idées fondamentales du livre et de mentionner quelques réflexions inspirée par sa lecture. Ce que je ne pourrai absolument pas faire, en tant que mathématicien, ce sera d'évaluer la 'validité expérimentale' du travail présenté. Le livre se base sur des essais de laboratoire, de psychologie et de neurologie: il est possible que certains d'entre eux soient biaisés, incomplets ou bientôt dépassés. Nous visons ici seulement à une analyse très préliminaire de la direction de travail et de l'hypothèse philosophique sous-jacente.

L'attention de l'auteur porte surtout sur le cerveau. Toutefois, pour S. D.: "Nos constructions mathématiques les plus abstraites sont le fruit très achevé de l'activité cohérente de notre cerveau et de celui de million d'autres qui, avant nous, ont façonné et sélectionné les outils mathématiques". L'auteur, en effet, souligne à plusieurs reprise l'importance de la construction historique, qui se conjugue avec l'évolution phylogénétique dans un processus cumulatif pour 'constituer' les mathématiques, l'arithmétique en particulier: l'analyse détaillée, qui porte sur 'l'étude des neurones du cerveau individuel', ne fait pas perdre de vue au neuropsychologue le rôle joué par le dialogue entre les cerveaux et au cours de l'histoire, dialogue sous-jacent à toute construction mentale complexe. Mais cette construction, avant de s'élaborer à travers l'histoire humaine, se forme par des parcours évolutifs qui donnent à l'homme "un embryon d'arithmétique comparable au sens du nombre présent chez l'animal": c'est ici la thèse principale de l'auteur. Toutefois, "... ces objets culturels que sont les mots et les nombres viennent ... parasiter des systèmes biologiques au destin initial différent." Voila l'autre thèse importante défendue par S.D.: pour ce qui est la constitution des mathématiques, dans la phylogenèse et dans l'histoire humaine, il y a continuité par rapport au monde vivant (l'existence d'un embryon commun d'arithmétique) et contraste (l'arithmétique humaine se fait sur des structures biologiquement investis d'autres fonctions). Il faudra trouver dans ce jeu dynamique une des raisons de la richesse d'une de nos constructions intellectuelles les plus riches, car même "dans nos comportements d'adultes, [on trouvera] des nombreuses traces de la représentation antique et approximative des nombres que nous partageons avec les animaux." Le livre de S.D. nous encourage à réfléchir au fait que même chez le mathématicien, la construction conceptuelle est un 'dialogue' entre ses capacités d'invention explicite, riches d'histoire, et 'son cerveau de primate' (pour reprendre une expression chère à Bernard Teissier).

Dès la première partie du livre, S.D. nous explique que le rat, le singe, le bébé (quatre mois et demi!) mettent en place des réactions similaires en présence de deux sons, deux flashes, deux points sur un écran. Deux, trois objets sont reconnus en tant que tels même s'ils bougent, s'ils se déforment ou se transforment. L'évolution parait avoir construit des neurones qui réagissent face au nombre d'événements dans l'environnement, indépendamment de leur nature, pourvu qu'ils soient peu nombreux: deux, trois, quatre (voir p. 37, les expériences de R. Thompson). Pour survivre, il faut reconnaître et comparer au moins les petites quantités de nourriture, d'objets ou de points de repère utiles, même en présence de changements 'secondaires'. Voila un embryon de l'invariance mathématique, un concept qui n'est pas évident et qui est devenu profond et complexe dans l'histoire. En fait, le mathématicien sait très bien qu'une notion ou un théorème, en Théorie des Nombres par exemple, sont une 'bonne' notion ou un théorème 'intéressant', s'ils ne dépendent pas des notations choisies pour les nombres: la construction conceptuelle doit être invariante par rapport aux représentations spécifiques. Et on retrouve partout au coeur des mathématiques des formes d'invariance. Piero della Francesca, peintre aux perspectives géométriques parfaites et mathématicien, disait que la différence entre Peinture et Géométrie est que la Géométrie ne dépendent pas de l'épaisseur du pinceau: une invariance élémentaire mais essentielle. En Géométrie, on démontre un théorème sur un système de coordonnées ou de référence spécifique, même un dessin spécifique, mais la validité du théorème ne dépend pas du système fixé. Mais il faut aussi savoir choisir entre 'gros tas', qu'il s'agisse de nourriture ou d'autre chose. Dans ce cas, toutefois, la comparaison est approximative: jamais ou presque jamais les animaux examinés par les éthologues ne se trompent quand ils comparent 2, 3 ou 4 objets (les chimpanzés se débrouillent bien aussi avec 1/2, 1/3, 1/4), mais "ils se trompent de plus en plus souvent" quand ils comparent des quantités plus grandes. S.D. propose alors la thèse selon la quelle notre "compteur évolutif" serait analogique et "à échelle logarithmique": très précis aux bas niveaux, de moins en moins fin pour des grandeurs plus importantes.

Des grands tas peu différents sont représentés comme dans un flou lointain. Et la représentation est spatiale, analogique, une thèse que l'auteur souligne très souvent, en critiquant avec force (et efficacité) le formalisme qui veut baser les mathématiques seulement sur le langage. Il est vrai que le langage humain ajoutera la précision du discret des mots, permettra de généraliser la précision des petits nombres aux grandes quantités, mais ce compteur analogique réapparaît dans mille situations diverses: dans la pratique quotidienne, dans les pathologies, dans l'apprentissage et le travail 'intuitif' du mathématicien.

Cette réflexion sur la dynamique cognitive de la construction conceptuelle des mathématiques est à l'origine d'une critique très sévère que l'auteur adresse à la vision piagetienne du développement des mathématiques chez l'enfant. Le travail expérimental de Piaget parait biaisé du fait du logicisme et de la Théorie des Ensemble, particulièrement à la mode de son temps: il cherche à tout pris les bases logiques et ensemblistes des mathématiques. Le monde forcerait en nous la logique propositionnelle (plus exactement, l'implication logique comme inclusion d'ensembles) et sur ces bases se développeraient les représentations mathématiques. La critique que S.D. adresse à ce point de vue n'est pas seulement philosophique, mais fait référence aussi à une panoplie d'essais pointus et surprenants: Piaget ne s'aperçoit pas que le nouveau né partage des capacités de comptage élémentaire avec les animaux; que l'enfant parvient à compter bien avant tout raisonnement "ensembliste" ou logique (voir les expériences de J. Mehler, K. Wynn et d'autres, p. 50 et suivantes). Ce qui fait comprendre, sinon justifier, les erreurs de Piaget est le fait que la plupart des outils dont dispose le neuropsychologue contemporain ne sont disponibles que depuis très peu de temps.

Malheureusement, le point de vue de Piaget, en s'appuyant aussi sur le formalisme, si répandu en logique et mathématiques (en raison de ses grands résultats techniques), a suggéré un enseignement élémentaire dans lequel le pouvoir réel d'abstraction de l'enfant est faussé, car on ne lui fait pas utiliser ses capacités "antiques" de comptage et de repérage spatiale et on l'astreint à des a priori logiques ou ensemblistes purement philosophiques. S.D. s'engage longuement sur ce thème et esquisse des éléments pour une didactique des mathématiques élémentaires qui tiennent compte de la réalité de l'enfant et de son histoire d'être vivant; ces quelques pages du livre sont fortement recommandées à l'instituteur qui voudrait comprendre la monstruosité qu'il y a à 'compter à partir de 0', comme celle qu'il y a dans l'application des 'règles' ensemblistes, dans l'étude purement linguistique de l'arithmétique, apprise par coeur et sans lui accorder de la signification, sans espace, sans géométrie d'appuis, sans utiliser ce compteur analogique, que S.D. décrit. Maintenant que nous avons des calculettes (et des ordinateurs), on peut se livré à la joie du raisonnement analogique, du 'voir' sans ou avant de formaliser; on peut mettre en évidence cette rigueur informelle qui est si typique de la pratique des mathématiques et qui est si difficile à cerner; on peut laisser aux machines les calculs si ennuyeux pour l'enfant et, pour les adultes, grâce aux techniques de la démonstration automatique, qui ne peut être qu'interactive, on peut laisser de plus en plus aux ordinateurs les détails formels des preuves.

Mais l'erreur commise par Piaget est une des conséquences, dans mon opinion, de l'erreur, qui date d'un siècle, de vouloir baser les mathématiques sur elles mêmes. En effet, la Logique (Mathématique) n'est qu'une des disciplines mathématiques, un autre jeu de règles mathématiques, comme Wittgenstein avait très bien souligné: au point que l'Arithmétique contient ses propres règles logiques (lemme de représentation au Ier Théorème de Gödel, 1931). Le problème des fondements des mathématiques doit être posé à l'extérieur des mathématiques, en particulier comme problème cognitif. On doit reconstruire la spécificité des mathématiques, qui est forte, tout en les reconnaissant comme partie du monde, comme émergentes de notre rapport avec le monde (avec "les régularités du monde", pour citer S.D. ou ... Hermann Weyl dans "La Symétrie"). Leur fondement est dans nos "actes d'expérience", pour utiliser une expression chérie par Weyl. Un fondement donc qui présuppose notre action dans le monde; comme le mouvement, par exemple, dans les réflexions de Poincaré sur les fondements de la Géométrie (recenment reprises par A. Berthoz dans le "Sens du Mouvement", Odile-Jacob, 1997). Mais, attention, c'est justement grâce aux Théories de la Démonstration, des Ensembles, des Modèles, les trois théories au coeur de la Logique Mathématique et qui ont su démontrer leur propre limite (en particulier au cours de ces trente dernières années), que nous pouvons aujourd'hui reprendre une réflexion qui fasse sortir les Mathématiques du jeu autofondationnel dans lequel elles sont encore piégées. Et aussi contribuer par cela à la discussion sur la cognition humaine.

Un chapitre traite brièvement de l'histoire des systèmes numériques: il est surprenant de voir comme les thèses du neuropsychologue se retrouvent dans l'histoire, bien connue, de cet effort incroyable qu'a fait l'homme pour quantifier avec précision le monde. Chez certains peuples on compte en pointant aux doigts, jusqu'à 20, aux coudes, aux genoux et ainsi de suite jusqu'à utiliser une trentaine de parties du corps (Chapitre IV). S.D. décrit ensuite l'extension difficile, linguistique et 'formelle', du comptage élémentaire, ainsi que les mille tentatives empiriques, toutes basées sur ces notions invariantes ancestrales, pre-linguistique: I, II, III (les mêmes symboles dans toutes les notations primitives pour les nombres). Le 0 est le tout dernier chiffre que les systèmes de numération savent nous donner. On obtient alors la règle la plus générale pour l'extension infinie d'un langage pour les nombres, celle permise par la notation positionnelle: en ajoutant des chiffres (à droite), le 0 en particulier, on se donne la possibilité d'aller vers l'infini autant que l'on veut. Mais le sens de ces nombres se base sur nos représentations spatiales, ce compteur analogique antique que le langage affine et étend bien au-delà des pratiques animales: on range les grandeurs dans un "espace mental", une ligne que nous 'voyons' dans nos têtes et qui reste le lieu de la signification, des ambiguïtés ou approximations, de l'analogie. De plus on étend aussi sur ces espaces, et grâce à ces espaces, l'invariance, cette invariance dont on soulignait l'importance et qui, de pratique cognitive élémentaire, pre-linguistique, se transforme alors en la 'stabilité conceptuelle' des notions mathématiques; celle-ci n'est pas propre à la notation linguistique, des nombres en particulier, qui est toujours spécifique.

On pourrait donc commencer à ébaucher la thèse que l'arithmétique trouve son origine dans le comptage élémentaire, étendu par le langage, et dans la représentation spatiale. Il y a cent ans, l'opération de successeur et l'induction arithmétique, en tant que notions linguistiques, ont été proposées comme fondement de Arithmétique, mais en fait des Mathématiques (fondement logique ou formel, cela dépend des auteurs: Frege ou Hilbert). Or, l'opération de successeur a bien pu avoir eu besoin du langage pour être posée dans toute sa généralité. Toutefois nous 'organisons' dans un espace mental la suite croissante des nombres, comme nous montre S.D: c'est dans cet espace que 'le successeur' acquiert une signification, ainsi que son 'horizon mathématique', la limite infinie. Mais, surtout, il me semble que ce n'est pas sur l'induction logico-formelle, linguistique, jeu de symboles décrit par Dedekind et Peano, que se fonde l'Arithmétique: elle se fonde sur le 'bon-ordre' dans le quel nous rangeons, dans nos têtes, les nombres (un ensemble est 'bien-ordonné' si et seulement si il est totalement ordonné et ne contient pas de chaînes descendantes: il réalise alors l'induction formelle). S.D. discute sur plusieurs pages la variété de nos représentations mentales, en fait spatiales, des nombres entiers: lignes droites, lignes courbes, de gauche à droite, pour nous les occidentaux, de droite à gauche chez les arabes ou les iraniens. Le comptage, étendu par le langage, est comme simulé dans un espace mental qui est le lieu, selon S.D., ou un aide à la comparaison des grandeurs et devient une partie essentielle de la signification. L'élément commun aux differentes organisations spatiales est le fait d'être bien-ordonnées, donc inductives. L'induction logique ou formelle, que l'on exprime dans le langage, est alors une conséquence non pas un fondement du monde du comptage, de l'Arithmétique. Voila une thèse à développer et qui nous donnerait le fondement cognitif, et non pas logico-formel, de ce que Poincaré plaçait, justement, aux bases des mathématiques et bien en amont de la logique: l'induction arithmétique (" ... elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui même" La Science et l'Hypothèse, Flammarion, 1968, p. 42). L'induction se fonde sur l'ordre spatial (le bon-ordre), cet invariant dans lequel nous organisons les nombres et leur donnons une signification, dès que le langage nous permets d'aller plus loin que le comptage animal dans cette extraordinaire construction conceptuelle que sont les mathématiques. Extraordinaires et uniques quant à leur généralité et leur objectivité, car elles se basent sur l'invariance et la stabilité conceptuelle: c'est leur nature même. Cette invariance que l'on trouve, dans le cas des nombres, dans les expériences pre-linguistiques dont nous parle S.D., qui se concrétise dans les notations linguistiques et, puis, atteint un niveau plus profond, en raison de la signification dans l'espace de cette même généralisation linguistique et de l'appréciation dans l'histoire de la pluralité des notations possibles: la notion mathématique de nombre est indépendante de toute notation symbolique. Le 'working mathematician', appréciant plus que n'importe quel mortel l'invariance et la stabilité des concepts mathématiques, leur attribue souvent une 'objectité' concrète ou absolue, comme l'enfant qui, reconnaissant petit à petit des invariances et des stabilités autour de lui, se fait ainsi une théorie des objets du monde.

S.D. souligne en plusieurs endroits la faiblesse du cerveau dans les pratiques formelles des mathématiques: les tables de multiplications, les algorithmes abstraits sont digérés avec grande peine. Ils demandent un codage étanche aux ambiguïtés, sans signification, imperméable aux analogies: c'est la catastrophe si, pour calculer 7x6, on évoque 7+6. Au contraire, "lorsqu'on se trouve face à un tigre, il n'est pas inutile d'activer rapidement ses souvenirs du comportement des lions". Je pense, toutefois, que le mathématicien, vis-à-vis d'un théorème à démontrer, d'une conjecture, se comporte presque comme nos ancêtres face à un tigre, et non pas comme le voudrait la caricature formaliste ou logico-computationnelle de la déduction mathématique: il cherche des analogies, il utilise des métaphores, se regarde autour pour trouver des outils ou techniques de preuve, des structures adaptées. S'il n'en trouve pas, il peut en inventer de nouveaux: si ceux ci sont importants, ils pourront contribuer à construire un nouveau cadre théorique (une nouvelle forme de civilisation, induite par les outils qu'il a construits). L'analyse de ces aspects ne doit pas être une analyse de la 'Logique de la Decouverte' ni de la 'Psychologie du Mathématicien', mais doit être posé comme analyse des fondements de la construction conceptuelle.

Après le travail très important qui a été fait en ce siècle en Théorie de la Démonstration (comme analyse formelle et logique des démonstrations existantes), travail qu'il faut continuer car il met en évidence des concepts et des méthodes au coeur des mathématiques, il est aussi nécessaire d'analyser scientifiquement la constitution de ces conceptualités mathématiques, en tant que pratique cognitive et historique. C'est en cela que le travail de S.D. et de ses collègues peut nous aider. Contrairement à ce que l'on dit habituellement en Philosophie des Sciences, l'analyse de la genèse de la construction conceptuelle, doit faire partie de la recherche de ses fondements, de sa justification. Pour ce qui concerne les mathématiques, après Frege, et sa bataille contre le 'psychologisme' et 'l'empirisme', il a eu une séparation très nette et techniquement très fructueuse qui a opposé:
- fondement à genèse
- déduction à créativité.
Cette clarification conceptuelle est à l'origine de la Logique Mathématique et de la notion moderne de rigueur formelle et, en proposant des outils formidables dans le but de formaliser complètement le raisonnement (mathématique), elle a ouvert la voie à l'invention de ces machines symboliques, les ordinateurs, qui ont changé notre vie. Il faut maintenant dépasser ce clivage et revitaliser une analyse directe des principes de cette construction conceptuelle qui s'appelle 'les mathématiques', sans se limiter à essayer de les coder dans un langage formel ou prétendre de les avoir fondé quand on met en évidence des principes de preuve qui permettent d'en dériver des fragments. Mais il faut aussi aller plus loin. Dans l'analyse des constructions conceptuelles, il faut toucher aux points où celles-ci émergent de nos pratiques de vie, se précisent en tant que résultats de notre histoire d'êtres vivants et

d'êtres sociaux. En mathématiques, en particulier, où les objets ne sont donnés que par des constructions conceptuelles, savoir comment celles-ci ont été rendues possibles et se sont précisées, à partir de leurs origines cognitives, nous informe sur les concepts eux mêmes (ce que l'on a essayé de faire pour l'arithmétique, d'une façon très préliminaire: l'analyse 'logique' des concepts a proposé les notions de successeur et d'induction comme fondements opérationnels de la preuve formelle, mais la fondation de ces opérations, leur signification et justification, se trouve dans leur genèse cognitive et historique - le comptage élémentaire et le rangement de l'infinité potentielle des nombres entiers, qui nous est donnée aussi grâce au langage, dans nos espaces mentaux). Pour mieux comprendre cette proposition, il faut souligner que l'objectivité, en mathématiques, se situe dans les processus constitutifs, non pas dans les résultats de ces processus. Les nombres réels, par exemple, n'ont aucune objectivité en soi: ils l'acquièrent grâce à la construction de Cantor-Dedekind. Ils ne sont pas déjà là: la 'définition' de Cantor-Dedekind n'est pas une réduction des 'points réels' aux entiers, mais elle constitue les réels standards, à partir des entiers; il y a, en plus, d'autres constructions, non-standards, qui suivent d'autres parcours. Chacune de ces constructions conceptuelles n'est qu'une tentative d'exprimer ce continu 'intuitif' qui se présent dans des formes différentes: le continu du geste et du mouvement dans l'espace, le continu du temps phénoménologique, ce flux sans points de H. Bergson et H. Weyl. C'est la solidité (cognitive - à partir du bon ordre des entiers ... - et conceptuelle) et la généralité de la construction (standard), qui donne à son résultat, les réels (standards), un extraordinaire niveau d'objectivité, presque 'd'objectité' pour certains. Et si l'objectivité mathématique est dans la construction, tous les moments de son émergence du monde contribuent à fonder ses concepts: là où ils se constituent, dans la généralité de nos processus mentaux, en tant que processus biologiques, mais aussi quand ils se forment, s'enrichissent et se transforment dans le dialogue entre êtres humains, au cours de l'histoire.

Revenons maintenant au texte de S.D.: en fait, sa lecture, extrêmement agréable et stimulante, est une source permanente d'inspiration pour le mathématicien qui, comme l'auteur de ce compte-rendu, ne se sent pas à l'aise dans le débat entre formalistes, logicistes et platoniciens.

La partie la plus importante de l'expérience scientifique de S.D. concerne l'analyse des pathologies cérébrales et leurs conséquences sur les activités mathématiques. La dernière partie du livre présente certaines de ces connaissances, si souvent acquises malheureusement en regardant la souffrance d'autrui. S.D. raconte le cas du jeune autiste anglais que l'on amène au théâtre, dans une tentative pour le faire dialoguer avec le monde, lui qui ne pense qu'aux nombres. A la fin du spectacle, son seul commentaire sera "les acteurs ont fait 5.202 pas et prononcé 12.445 mots" ... ce qui était parfaitement exact. Ou ce calculateur prodige, bon à s'exhiber dans les cirques, pour lequel les nombres forment un "zoo mental parfaitement familier": en voyant 3.844, il dit sans hésitation "salut, 62 au carré!". Très audacieusement, S.D. rapproche ces pathologies psychiques du dialogue entre Hardy et son élève Ramanujan, deux mathématiciens extraordinaires, les deux grands théoriciens des nombres de ce siècle. Alors que Ramanujan se mourrait sur un lit d'hôpital, Hardy lui rendit visite et lui dit: "mon taxi portait le numéro 1729 ... nombre bien ennuyeux" ... "mais non, répliqua Ramanujan, c'est un nombre fort intéressant. C'est le plus petit nombre qui s'exprime de deux manières différentes comme une somme de deux cubes". Mais qu'y a-t-il en commun entre ces différentes 'folies'? C'est d'abord le choix, pathologique ou conscient, d'une pratique de vie, d'une concentration extrême sur une construction conceptuelle spécifique, grâce ou au prix d'un déséquilibre mental, grave ou léger, souvent payé au prix de la solitude. Il s'agit, comme dit S.D., de la passion qui façonne l'intelligence sur une base singulière, chaque fois différente. En cela, S.D. prend très nettement ses distances de la phrénologie: d'abord en mettant en évidence la distribution des tâches dans le cerveau (dont on parlera plus loin), ensuite en émettant l'hypothèse, formulée avec prudence, que, tout au plus, dans la genèse du talent mathématique, il peut y avoir des différences innées "minimales" et que ce qui compte seront les développements possibles de ces différences, dans la vie vécue. S.D. souligne (mais peut-être pas assez) la grande découverte de la neurologie des dix dernières années: à savoir que la plasticité du cerveau est énorme et permanente, et que les pratiques de vie modifient un aspect crucial de ses formes, les connexions neuronales. En fait, puisque, comme dit S.D., les calculs purement formels semblent parasiter des systèmes biologiques au destin initial différent, on pourrait même supposer que la différence innée, entre calculateurs fous et grand matheux d'un coté et normaux de l'autre, serait une prédisposition à une plus grande plasticité, au moins dans certaines zones cérébrales ... moins d'inné donc pour digérer plus de folie algorithmique.

La troisième partie du livre (en trois chapitres) développe d'abord une analyse pointue de l'organisation cérébrale liée aux pratiques arithmétiques. Elle se base sur l'observation des lésions cérébrales et sur des techniques récentes d'analyse neurologique non-invasives (caméra à positons, potentiels évoqués). On découvre alors les bases du monde fascinant et encore mal connu de l'élaboration numérique cérébrale, qui fait l'objet des recherches de ces chercheurs. La lenteur de l'hémisphère droit du cerveau, qui compare comme dans une géométrie mentale les quantités numériques et reconnaît les chiffres (mais ne reconnaît pas leur écriture en lettre: 4 et non pas 'quatre', par exemple); la rapidité formelle de l'hémisphère gauche, qui traite les nombres comme des mots, mais sait "lire" aussi les chiffres. La mémorisation des tables de multiplication, très localisée et située à coté du Pater Noster et de Frère Jacques; la distribution, au contraire, des calculs plus complexes qui mobilisent une pluralité de localisations cérébrales, ainsi que de stratégies, souvent indirectes, parfois de nature géométrique etc. On peut avoir des disgraphies graves, sans acalculie; des acalculies sans disgraphies. S.D. décrit aussi ce jeu complexe de partage de tâches, dont aucune n'est parfaitement autonome ni signifiante en soi, car ce qui compte, ce qui donne signification et aperception, sont les réseaux de réseaux de connections neuronales; les émotions, qui modifient profondément les performances et la compréhension; le rôle, dans les activités arithmétiques, de la région pariétale inférieure, où convergent "des informations véhiculées par la vision, l'audition et le toucher, ce qui convient à merveille aux nombres dont l'abstraction s'applique à toutes les modalités sensorielles", le lieu, on dirait, de cette invariance cognitive antique qui, dans notre hypothèse, nous a peut-être permis de concevoir et de pratiquer la bien plus profonde invariance conceptuelle des mathématiques et qui en pourrait être le fondement.

Dans le tout dernier chapitre, l'auteur, avec un courage remarquable, s'aventure dans des considérations de philosophie des mathématiques. D'abord, un point de désaccord: l'analyse proposée de 'l'erreur mathématique' est un peu superficielle ou peu adaptée à ce siècle, quoiqu'elle touche un vrai enjeu. Dans la figure 9.1, le jeu incomplet entre intuition et déduction n'est pas très significatif: la chaine de raisonnement n'est pas particulièrement longue, comme pretend l'auteur. L'erreur par 'mauvaise définition' (en fait, dans l'exemple, 'mauvais dessin': je crois pouvoir l'analyser dans les mêmes termes) n'est plus de notre siècle: la sortie des paradoxes logiques, le débat sur les définitions prédicatives/imprédicatives, par exemple, mais aussi le progrès mathématique général nous ont bien enseigné qu'est que c'est qu'une 'bonne définition'. L'analyse de l'erreur mathématique devrait être faite, mais elle est très complexe, aujourd'hui: l'analyse de certains clivages profonds entre intuition et preuve en devrait faire partie. Pour le reste, S.D. développe les remarques déjà mentionnées sur l'enseignement élémentaire des mathématiques, où les rapports entre comptage et espace, construction conceptuelle et pratique de mathématiques sont considérés comme essentiels. Pour ce qui est la critique du formalisme et du logicisme, pour S.D. (et pour moi même), la construction linguistique et logique est si nettement ultérieure et dérivée du comptage élémentaire et de l'organisation spatiale-mentale des grandeurs, donc non 'fondatrice', qu'il y a très peu d'autre à dire, pour le moment; tout au plus le langage se mêle de l'espace, pour nous aider à préciser les grands nombres et 'tendre vers' ou 'concevoir' l'infini. Mais les analyses formelles et logiques, quoique essentiellement 'incomplètes' du point de vue fondationnel, gardent toutefois un grand intérêt mathématique (et appliqué: l'Informatique!) et les meilleurs parmi ces analyses nous conduisent pour une partie du chemin, pour mettre en évidence les principes (possibles) de preuve, syntaxiques, et de construction, géométriques, dont il faut chercher le fondement cognitif. Quant au platonisme, peu répandu en Logique, mais très commun en mathématiques, surtout dans sa version naïve et ontologisante, il est intéressant de lire l'opinion du (neuro)psychologue sur cette philosophie émergente de la praxis mathématique. En effet, les remarques de Hardy, Hermite, Thom ou de maints autres grands mathématiciens, dont quelques unes sont rapportées par S.D., ont surtout besoin de l'analyse du psychologue et de l'anthropologue, car leur mysticisme passionné et dévot est un objet d'étude intéressant pour une analyse cognitive et historique des mathématiques. Cette perception concrète des objets mathématiques est propre aussi au calculateur prodige qui voit immédiatement dans 3.844 son cher d'ami 62, déguisé au carré: pour maints mathématiciens passionnés, les structures conceptuelles des mathématiques, de la Géométrie en particulier, sont là, ils les voient. Ce qui est tout à fait vrai, mais non pas en raison d'une ontologie intrinsèque ou à une objectivité indépendante du monde de ces structures, mais grâce à une performance cognitive extraordinaire qui est propre au mathématicien de grand talent et bien entraîné, une performance qui est encore à explorer.

Du point de vue philosophique, S.D. penche enfin vers un constructivisme révisé et ouvert, en partie existant, en partie à proposer: son point de départ se retrouverait dans l'analyse de l'évolution et de l'histoire de l'homme. Si on y ajoute l'analyse de la démonstration, il s'agit d'un constructivisme que je partage et qui doit beaucoup à l'intuitionnisme de L.J.E. Brouwer (sans son solipsisme et son refus du rôle du langage), à Henri Poincaré, à Hermann Weyl et Federico Enriques (pour le rôle qu'il donne à la géométrie et à l'histoire).

En conclusion, la réflexion que m'inspire ce livre remarquable est que nos représentations du monde, mathématiques en particulier, se constituent d'abord dans la phylogenèse, mais que, ensuite, la richesse de ces constructions, en tant qu'expériences historiques et individuelles, leur donne une autonomie conceptuelle. Cette richesse s'alimente aussi du contraste entre la phylogenèse du cerveau et le développement de la praxis mathématique dans l'histoire, en raison même de la plasticité du cerveau, qui se façonne dans l'ontogenèse (plasticité qu'il faudrait, me semble-t-il, souligner davantage que dans le livre). Aux nombres, en tant que fondement de l'algèbre ou des algèbres et systèmes logiques, il faudrait toutefois ajouter aussi le rôle directe de la Géométrie: notre rapport avec l'espace, la simulation mentale du mouvement sont autant (plus?) fondateur de la connaissance (mathématique) que les nombres (et les langages). Il n'y a pas de raison de croire, comme le croyaient les pères fondateurs de la Logique Mathématique, que l'Arithmétique est le fondement ultime des Mathématiques: la Géométrie est là avec sa richesse mathématique, ses propres conceptualisations et son 'évidence' autonome. En fait, on en entrevoit des conséquences de ce changement de priorité même en Théorie de la Démonstration: la sémantique 'géométrique' (catégorique) des systèmes formels (mon propre intérêt) guide depuis longtemps leur conception, jusqu'aux percées récentes, par exemple, de J. Y. Girard où la Géométrie a non seulement inspiré des nouveaux systèmes logiques, mais réapparaît également, inattendue, dans la structure même des preuves (les 'réseaux de preuve').

Enfin, mais c'est très important, il faut mentionner le rôle original et 'pur' que peuvent avoir les mathématiques dans l'analyse de la cognition humaine. En bref, ce livre peut sûrement avoir des retombées importantes en philosophie des mathématiques, nous aider à proposer une 'fondation cognitive des mathématiques', mais son but est un autre. Cette construction conceptuelle particulière, que sont les mathématiques, n'est pas détachée des autres formes de connaissance, mais garde en même temps une grande spécificité.

Aucune des autres formes de représentation du monde que nous possédons ne se base autant sur l'invariance conceptuelle, dont on a parlé; aucune ne fait de l'indépendance de la représentation, de la notation spécifique, le coeur de sa conceptualisation et de sa généralité. De plus, les mathématiques gardent à tout niveau une grande simplicité, même quant elles sont profondes: l'élégance, la recherche de ce qui est 'stable' et 'essentiel', en bref la simplicité comme méthode, en font partie constituante. Ce rôle de l'invariance et de la stabilité en mathématiques peut donc nous aider dans ces premiers pas de l'analyse cognitive de l'homme, telle qu'elle se développe actuellement. On pourra utiliser ensuite ces expériences dans l'étude aussi des autres formes de connaissance, en générale plus complexes et dont les bases peuvent être plus difficiles à isoler, car elles sont plus riches d'ambiguïtés, moins 'élégantes' et 'essentielles' que celles des mathématiques.

Ringraziamenti. Desidero ringraziare di cuore Karine Chemla et Jean Lassègue per la loro lettura appassionata ed attenta del testo, per i mille commenti, per aver capito quel che volevo dire, in un francese spesso italianizzato, ed aver cercato di farmelo scrivere.

Nombreux mathématiciens (normalement peu intéressés à la Logique Mathématique) et maintes philosophes ne citent à cet égard que le Ier Théorème d'Incomplétude de Gödel. Or, on peut bien dire que ce résultat n'est qu'une 'astuce diagonale', comme rétorquent encore certains formalistes et logicistes. Toutefois, même en restant aux années '30, il y a eu d'autres résultats, au coeur de l'incomplétude et riches de conséquences: par exemple, le lemme de représentation de Gödel (la métathéorie de l'Arithmétique est codable dans l'Arithmétique), le IIème Théorème de Gödel (si l'Arithmétique est cohérente, elle ne démontre pas sa propre cohérence) et la preuve de cohérence de l'Arithmétique, de Gentzen (par 'élimination de coupure'). Si, en plus, on se lance au delà des années '60, en Logique, on découvre bien d'autres incomplétudes pour les formalismes logiques: l'indépendance de l'Hypothèse du Continu et de l'Axiome du Choix, les théorèmes de Normalisation (versions combinatoires de l'élimination de coupure, à la Tait-Girard, par exemple) ainsi que l'indépendance d'autres propositions combinatoires intéressantes (mais moins riches en applications des théorèmes de Normalisation), comme les théorèmes de Paris-Harrington et la 'Forme Finie de Friedman' du théorème de Kruskal. Les méthodes de preuve de ces énoncés se basent sur une 'géométrie' et une 'pratique de l'infini', extrêmement solides, mais qui échappent à la déduction formelle finitaire.

Par exemple, $1/n$ pour $n \geq 1$ est une chaîne descendante. 'Bon-ordre' et 'induction' sont 'équivalents', si on formalise tout les deux (c.à d. ils sont équivalents sur les ensembles définissables dans le langage fixé). Mais ce n'est pas le niveau formel, des formules linguistiques, qui nous intéresse, mais celui des fondements de ces formules.

J'imagine que ceux qui comptent, jusqu'à ... 33, en pointant aux doigts, aux coudes et aux genoux doivent avoir une géométrie mentale des nombres 'limité' et spatialisée de façon différente.

Frege balaye avec efficacité le psychologisme, tout comme la phrénologie de son époque (même s'il ne la connaît peut-être pas, il dit avec fermeté que l'Arithmétique ne dépend pas de "la teneur du phosphore dans le cerveau", Fondements de l'Arithmétique, 1884); il ridiculise aussi, à juste titre, l'empirisme en mathématique de Stuart Mill. Mais ces théories sont bien loin des "actes d'expérience" dont parle Weyl, mathématicien, élève de Husserl en philosophie. Entre nous et Frege il y a, au moins, les réflexions sur la 'praxis' et la 'constitution du soi dans le monde' de Husserl et Wittgenstein, ainsi que la Théorie de la Démonstration moderne, avec ses remarquables succès techniques et ses débâcles philosophiques.

Par exemple, l'induction formelle est un principe de preuve, tandis que le bon-ordre de la suite des entiers, ou de leur généralisation ordinale, est un principe de construction géométrique. Les nombreux résultats d'incomplétude récents (voir la note 1) donnent des énoncés qui se situent dans le décalage entre les deux: on démontre que certaines propriétés sont valables dans la construction, mais qu'elles ne sont pas démontrables par la seule syntaxe formelle. Débâcle philosophique du réductionnisme linguistique, mais succès technique remarquable de son outil mathématique, la Théorie de la Démonstration. (J'ai essayé de mettre en évidence ces thèmes dans un article récent, centré sur le "Continu Mathématique".)

Comme le fait remarquer S.D., page 267: "Même si l'introspection du mathématicien le persuade de la réalité des objets qu'il étudie, ce sentiment n'est probablement qu'une illusion. Sans doute ne peut-on atteindre le plus haut niveau en mathématiques qu'en se formant une image mentale très vive des concepts que l'on manipule. Cette image acquiert alors la force d'une illusion, occultant l'origine humaine des objets mathématiques et leur conférant un semblant d'existence indépendante."

Le livre de S.D. nous a permis de réfléchir sur notre 'vision' commune, en tant qu'hommes modernes, des entiers dans l'espace. Toutefois, il n'y a pas toujours un 'socle' cognitif commun si solide: par exemple, le regard sur le continu de nos collègues analystes non-standards leur permet de 'voir' les nombres réels d'une façon bien différente de celle qui est la plus courante en mathématiques. Notre effort dans la praxis mathématique façonne la construction mentale, lui donne, comme je disait, une objectité qui est comparable à la reconstruction, dans la vision et dans la mémoire, des images du monde.

u
Revue de l'Association H. Poincare', n.6, pp. 6-16, 1997.

±ˇV»˜˜aê±IÃ±7~≈π7`~†``ô˜SÊäπ»%®º~AÃp≤n|'»~¿öReÊÛKKÛê#Vwπt~ƒb∏o~…
i∏j`Vw
ºl|∑~g`‰``ô~ø~∑~g`‰ö~GK#®ip|g`‰∂n|Ê¯öVwiUIuÉ∂]u#»`a{Ç#˜Ä¯~
ê6›Ω˜n|,œu~á#˜```êπf~ñ»b~áπ^»[®πW``˜g`‰åÊ¯¯\˜ñ_<ßπ=G\~™Ä(˜Ä%π/
\˜êFIu#`\~i``ô\~»öÛl}K#ReÊê–∞
˜˜`æua'êVw
U¢»ªfä
æ›πVb∏R®πp|¯~)ø¶ª~ì¯∑n|¯NV\w»1NV

Ä

@

@
Ä

#6I_rsÇ∫/€˛¥œ(.ß5ÕCìCïH—LPLeLÄXıXˆZe]m\zÜ|≠|
ÆıÍÍÍÍÍÍı„„ÍÿÕ¬∑¨°ñ°ÍãÄÍ°uÍj_T°°Í

$Th§

Ú
…
Ö
Ú
Ú
Ú∏"@ˇˇ@ˇˇ@ˇˇ@ˇˇ@ˇˇ@ˇˇ¿ˇˇm@ˇˇ@ˇˇ @ˇˇ
@ˇˇ@ˇˇ
@ˇˇ

«@ˇˇéPˇˇ
u@ˇˇPˇˇ £@ˇˇ
äPˇˇ[@ˇˇ
…Pˇˇ

$T
$T

X»…Õ–   œ“◊€[”
„$%'∗+-06<BC˘3456789:;<=>?@AB"""R"S
˘·˘‰+7G{‡

Zapf DingbatsPalatinoTimes   HelveticaCourierSymbolXRusse»
Mishawaka…Mishawaka BoldÕ
VT Alt Plain–VT Alt Bold   Semantics   LCMSSI8œLics“
Book Antiqua◊Monotype Sorts€   Wingdings[LCMSS8   ”MT Extra
„LCMSSB8$msam10%msam5'msam7∗msbm10+msbm5-
msbm70wncyb106wncyi10<wncyr10Bwncysc10Cwncyss10˘CMINCH3 LCIRCLE104
LCIRCLEW10
livre dehaene   Microsoft   Microsoft