*Lezione tenuta a Firenze, il 5/11/99, nell'ambito del ciclo "**Sapere e Narrare: l'uomo e le macchine**", Istituto di Studi Filosofici, Gabinetto Vieusseux, Palazzo Strozzi. Apparso in "**L'uomo e le macchine**", a cura di M. Bresciani Califano, Leo S. Olschki, Firenze, 2002.*

Lo spazio, i fondamenti della Matematica e la resistibile ascesa della metafora: il cervello è un calcolatore digitale

Giuseppe Longo
Laboratoire d'Informatique "Jacques Herbrand"
CNRS et Ecole Normale Supérieure, Paris
http://www.di.ens.fr/users/longo e-mail: giuseppe.longo@ens.fr

Motivazioni e temi

In questo breve testo non si faranno raffronti empirici né diretti fra "cervello" e "calcolatori digitali", o lo si farà molto poco, bensi' si rifletterà soprattutto su questioni di fondamenti della matematica e della conoscenza. Le ragioni per fare questo sono molteplici. In primo luogo, l'Informatica e l'Intelligenza Artificiale, nella sua forma tradizionale o "forte", sono dirette figlie dei paradigmi della Logica Matematica, come specificatesi dalla fine dell'ottocento in poi, in quanto analisi dei fondamenti della matematica e dei modi ad essa correlati di intendere la ragione umana. Inoltre, la filosofia della conoscenza è strettamente correlata a quella della matematica, sin dalle prime riflessioni dei Greci, e, con grande continuità, anche i calcolatori, macchine matematiche, sono stati posti, nel XX secolo, al centro delle analisi cognitive. Infine, e del tutto in generale, il raffronto fra paradigmi scientifici, proposte per la conoscenza o, financo, per la costruzione di macchine, dovrebbero, se possibile, far sempre riferimento, ed esplicitare, i progetti epistemologici soggiacenti: solo cosi' un dialogo e' possibile.

Partendo allora dalla crisi dell'intelligibilità euclidea dello spazio, si accennerà alla "svolta logico-linguistica", al formalismo ed al suo felice matrimonio con il meccanicismo, negli anni '30, per arrivare ad accennare ad una proposta, un progetto scientifico in corso, che torni ad arricchire linguaggio e logica dei problemi del nostro rapporto allo spazio, fisico e del vivente. Si dovrebbe allora capire come l'abbandono, per oltre cento anni e per buoni motivi, di questa componente delle nostre forme di conoscenza, abbia contribuito a menomarne le analisi ed abbia consentito la crescita di una visione monca, del tutto resistibile.

1. Spazi della razionalita' e raggi curvi

Già nel terzo decennio del XIX, il direttore dell'Osservatorio astronomico di Gottingen, Carl Friederich Gauss, si convince della possibilita' di una geometria diversa da quella di Euclide. Per l'esattezza, Gauss pensa che si dovrebbe poter sviluppare una "geometria intrinseca delle superfici", indipendentemente da ogni immersione in spazi ambiente euclidei. Una geometria di superfici curve, in particolare, ovvero con "curvatura non nulla" (per usare un termine messo a punto successivamente). Forse, ma solo lo storico dovrebbe confermarlo, si sta formando quella sensibilità culturale trasgressiva che caratterizza il romanticismo, in particolare nel modo di "vedere" lo spazio: si pensi ai cieli turbati dei pittori Turner e Constable, le tormentate e vorticose tempeste all'orizzonte, che rompono le regolarità cartesiane (ed euclidee) della pittura rinascimentale e neoclassica, la geometria perfetta dei loro spazi.

Ma allora, se l'universo puo' esser curvo, la somma degli angoli interni di un triangolo puo' essere diversa da 180° ... . Gauss sale su tre colline tedesche a vista per misurare tali angoli, ipotizzando quindi una curvatura dei raggi luminosi, in quanto geodetiche (linee di minima distanza) di uno spazio a curvatura non nulla. Ne ricava una misura molto prossima ai 180° e poche conseguenze; ma noi, oggi, ben sappiamo quanto queste misure, fatte non certo fra cime di colli, ma su raggi provenienti da stelle lontane, nascoste dietro un'eclissi solare, confermeranno un cambiamento radicale nella geometria dello spazio fisico, cento anni dopo.

Gauss, malgrado il suo status di grandissimo fra i matematici, conquistato ben presto, non osa trarre le dovute conclusioni della sua riflessione: il fatto cioe' che la negazione del quinto assioma di Euclide (su un piano, data una retta ed un punto fuori di essa, si puo' tracciare una ed una sola retta parallela alla data) puo' essere un'avventura matematicamente interessante (e non contraddittoria). O forse, lo osserva, ma, dicono gli storici sulla base di corrispondenze, non osa rompere il mito millenario della perfezione euclidea del mondo.

In effetti, da duemila anni, l'organizzazione euclidea dello spazio è un assoluto del pensiero. Lo spazio euclideo coincide con lo spazio sensibile, che, sua volta, è esattamente lo spazio fisico. L'assiomatica euclidea è un "a priori", sintetizza "l'intuizione pura dello spazio in sè", anticipando l'esperienza, come riassumerà Kant. Non solo, ma il *rigore razionale* è geometrico: la prova matematica, logica, il ragionamento stesso è certo, quando è condotto "more geometrico". Un filo conduttore lega il pensiero greco a quello di Descartes fino a Kant: il cogito è geometrico, ovvero una sorta di "mi muovo nel pensiero come mi muovo nello spazio" è al cuore della riflessione di quei tre grandi momenti del pensiero umano; l'organizzazione euclidea prima, poi quella delle "coordinate" cartesiane in spazi newtoniani euclidei, dominano la razionalità. Che poteva opporre a tutto cio' il poco più che trentenne direttore dell'osservatorio di Gottingen, se non delle misure poco attendibili e la sua genialità matematica?

2. La rottura non-euclidea

La trasgressione romantica tuttavia continua: Lobachevskij e Bolyai sviluppano una geometria interamente basata su una delle due negazioni possibili del quinto assioma di Euclide (... si possono tracciare molte - quindi un'infinità - di rette parallele alla data). Non fanno neppure loro un mero gioco assiomatico, come la caricatura formalista vuol farci credere, ma esplicitano, sembra senza conoscerla, l'analisi di spazi curvi alla Gauss e la sua connessione all'assiomatica euclidea. Ovvero, anche loro non si divertono a negare assiomi formali, ma propongono una riorganizzazione dello spazio (v. [Lobachevskij, 1855]). Tanto è vero che non si pongono il problema della "coerenza" (non contraddittorietà) dell'assiomatica proposta: chi pensa ad assiomi come sequenze di simboli da manipolare indipendentemente dal loro significato (spaziale in questo caso) ha, come unico riferimento di certezza, una prova di coerenza. Invece i matematici di quell'inizio secolo stanno reinventando il rapporto fra noi e lo spazio fisico: la coerenza, se si pone, è nella possibilità di una interpretazione della variante assiomatica nello spazio sensibile.

L'operazione, come aveva intuito Gauss, è sconvolgente. Cosi' facendo, cadono i pilastri di quelle certezze che avevano retto la razionalità per millenni, quell'io pensante identificato con l'essere nello spazio (e nel tempo) euclidei. Difficilmente possiamo immaginare il turbamento nel mondo, ben ristretto, dei matematici e filosofi coscienti della svolta che si propone.

Ma qualcosa di ancora piu' forte accade con Riemann. Allievo in parte di Gauss (scrive la tesi di abilitazione sotto la sua direzione, nel 1854, a Gottingen), egli sviluppa una teoria generale degli spazi curvi, basata sulla nozione di "varietà" (riemanniana). Con lui la geometria differenziale, iniziata da Gauss, raggiunge la maturità: l'analisi geometrica dello spazio si arricchisce degli strumenti del calcolo differenziale. In particolare, distingue chiaramente fra analisi "locale" e "globale" dello spazio: a livello locale, "micro" per dire, lo spazio puo' essere considerato euclideo (a livello "infinitesimale", molto prossimo al piano tangente, puo' valere il teorema di Pitagora: $dz^2 = dx^2 + dy^2$), ma globalmente esso puo' avere una struttura diversa (una diversa curvatura, o variazioni di curvature); o viceversa. Riemann analizza in particolare spazi a curvatura positiva, dove la somma degli angoli interni di un triangolo è più di 180°. Pensa che questo sia fisicamente interessante soprattutto a livello dell'infinitamente piccolo ed arriva a fare una congettura incredibile, già nello scritto di abilitazione:

> «But it seems that the empirical concepts on which are based the spatial definitions of the physical universe, the concept of *rigid body* and of *a light ray*, no longer are valid in the infinitely small. Thus, it is permissible to think that physical relations in space in the infinitely small do not correspond to the axiom of [euclidean] geometry; and, in fact, this should be allowed if this would lead to a simpler explanation of the phenomena.
>
> ... in a continuous manifold the metric relations must be introduced on different grounds (a linear element does not need to be represented as the square root of a second order

> differential form). ... Thus either the real elements ... form a a discrete manifold or the foundation of metric relations must be found elsewhere, *in cohesive forces that act on it*. »

E ben presto arrivano gli insulti. Dühring, potente filosofo accademico ben noto ad Engels, in un testo, del 1872, premiato come *saggio sulla geometria* dalla facoltà di filosofia di Gottingen (!), scrive:

> «Thus the late Gottingen mathematics professor, Riemann, who - with his lack of independence except for Gaussian self-mistification - was led astray even by Herbart's philosophistry ... . It is not surprising that the somewhat unclearly philosophising physiological professor of physics, H. Helmholtz, commented on this absurdity in a favorable sense.»

Il plauso entusiasta a Dühring fa pensare che forse Gauss aveva avuto ragione ad esser prudente nel diffondere le sue idee ... 40 anni prima.

Anche Riemann, quindi, come i suoi predecessori e grandi geometri, pone un problema di ristrutturazione dello spazio fisico, ma con ancor maggiore lucidità scientifica e filosofica. Maggiore, perchè egli si pone esplicitamente il problema della non arbitrarità della costruzione geometrica proposta. Sotto l'influenza di Herbart, cerca di non buttare a mare il rapporto fra il soggetto conoscente e mondo: investiga le regolarità dello spazio che, a suo dire, sono soggiancenti ad ogni proposta geometrica. Insomma, crede che la geometria debba rimanere "significante", luogo privilegiato del ragionamento e della conoscenza. Tuttavia è cosciente che tale luogo non puo' esser descritto da scelte assiomatiche *valide a priori*, ma è il risultato di una proposta umana, radicata in alcune proprieta' nell'interfaccia fra noi ed il mondo: la *connettività*, ad esempio, la *continuità* (la struttura topologica globale) e *l'isotropia* dello spazio. Anche la variante geometrica che più si allontana dalla intuizione euclidea, la generalizzazione a molte dimensioni o a "varietà" topologiche o metriche (rimanniane, diciamo noi), fa riferimento a queste "regolarità" dello spazio fenomenale.

3. La risposta logicista e la svolta "nel linguaggio". L'Aritmetica.

Gli audaci tentativi filosofici di Riemann (ed altri, fra cui, piu' tardi, Helmholtz) di salvare l'intuizione geometrica erano tuttavia troppo embrionali, troppo deboli di fronte all'enormità della catastrofe della certezza euclidea. Una risposta ad alto livello, non basata su insulti "reazionari", ma, a sua volta originale e profonda, si prepara ben presto, costruita con tutt'altri strumenti.

Frege arriva a Gottingen pochi anni dopo la morte di Riemann (morto a 40 anni, nel 1866). Ben conscio della crisi gravissima in cui si trovano i fondamenti della matematica (e della conoscenza), riconosce, kantianamente, il valore "intuitivo" della geometria [Frege, 1873], ma proprio per questo, contrariamente a Kant, vuole escludere il suo ruolo fondazionale (si veda, fra i tanti, [Tappenden, 1995], da cui provengono le citazioni di Dühring e di Frege, 1873 e 1874, qui riportate). Di fatto, la generalizzazione geometrica si distacca ben presto dall'intuizione e diviene logico-concettuale:

> «The wildest visions of delirium ... remain so long as they remain intuitable, subject to the axioms of geometry. Conceptual thought alone can after a fashion shake off this joke, when it assumes, say, a space of four dimensions or positive cubature. To study such conceptions is not useless by any means; but it leaves the ground of intuition entirely behind [Frege, 1884; §. 14]»

L'intuizione non puo' che essere euclidea ed è persa nella generalizzazione moderna, che è solo simbolica. Frege non parla di Riemann, forse non osa (era il vero successore del princeps matematicorum, Gauss), ma se la prende con Herbart, interlocutore filosofico di Riemann, ed con Stuart-Mill: rotto il quadro euclideo, il riferimento alle proprieta' intuitive dello spazio non giustifica, tantomeno fonda, le visioni deliranti con cui si possono interpretare gli assiomi geometrici. Va riconosciuto che, con grande rigore filosofico, Frege fa piazza pulita di certo "psicologismo" ed "empirismo fisicalista" di moda all'epoca: l'esperienza matematica non e' soggettiva ne' empirica, bensi' e' «oggettiva in quanto segue una legge, esprimibile con delle parole», e' indipendente dalle nostre sensazioni e rappresentazioni [Frege, 1884; §. 26]; la prova di un teorema «non dipende dal livello di fosforo nel cervello» [Frege, 1884; Introd.].

In conclusione, la certezza è solo nel concetto di numero, come grandezza (magnitude); nel numero, di nuovo, in quanto "concetto", espressione, nel linguaggio, di una legge del pensiero:

> «A concept as comprehensive and as abstract as the concept of magnitude cannot be intuition. There is accordingly a noteworthy difference between geometry and arithmetic. ... The elements of all geometric constructions are intuitions, and geometry referes to intuition as a source of its axioms. Since the object of arithmetic does not have an intuitive character, its fundamental propositions cannot stem from intuition either ... we do not find the concept of magnitude in intuition but create it ourselves.» [Frege, 1874; p. 56-57] ... «the laws of aritmetic govern all that is numerable. This is the widest domain of all; for to it belongs no only the actual, not only the intuitable, but everything thinkable.» [Frege, 1884; §. 14] «... existence is analogous to number. Stating existence is nothing else, but denying the number 0.» [Frege, 1884; §. 53].

Il concetto di numero è più fondamentale e certo di quelli geometrici. Contribuisce addirittura a fondare la geometria, che ha bisogno di parlare di grandezze e rapporti.

> «Every proposition which states a relations betwen lenghts ... follows from the foundation of analytic geometry and can be derived analytically [Frege, 1873; p. 9-10] ».
>
> «... Euclid, in order to define the identity of two ratios between length, makes use of the concept of equimultitudes, and equimultitudes bring us back once again to numerical identity. ... the numbers that give the answer to the question "How many?" can answer among other things how many units are contained in a length. [Frege, 1884; §. 19] »

E questo e' un punto cruciale. Frege sembra non volere uscire dal quadro euclideo: solo in esso i rapporti (numerici) fra lunghezze ed angoli sono invarianti e possono "fondare" la geometria. Infatti, solo la geometria euclidea contiene le omotetie (trasformazioni che conservano i rapporti) fra i propri automorfismi (le proprieta' euclidee non cambiano facendo ingrandimenti e rimpicciolimenti a piacere delle figure, ma su questo torneremo). In questo senso si puo' dire che la "scienza delle figure rigide", la geometria greca, si fonda sul numero, sull'"how many units are contained in a length", invariante cruciale di spazi non curvi.

Invarianti numerici esistono anche nelle altre geometrie, ma dipendono dalla specifica geometria (dal suo gruppo di trasformazioni) e sono ben lungi dall'avere un ruolo "fondante". Infatti, con la svolta riemanniana ed i lavori di Klein (1872) la prospettiva cambia radicalmente. La geometria si fonda sulla nozione di "trasformazione" dello spazio in se' (o "deformazione" dello spazio): continua, differenziabile od altro. Questa eredita' verra' raccolta dalla Teoria delle Categorie, una teoria delle strutture algebrico-geometrico, che (ri-)costruisce la matematica intorno alle nozioni di morfismo, funtore, trasformazione naturale ... in un approccio di "tipo geometrico" alla matematica ed ai suoi fondamenti.

Per Frege, invece, sono le leggi aritmetiche ad essere leggi del pensiero, fondamento anche della geometria, in quanto leggi dei rapporti fra lunghezze (ed angoli). O meglio, l'aritmetica è parte (centrale) della logica, per via della «logical nature of arithmetical mode of inference». Paradigma di questa identificazione è l'induzione aritmetica: legge logica e principio di prova aritmetico.

Tutto cio' ricorda Boole, "The laws of thought" (1854), un'algebra di 0 ed 1, un'algebra (numerica) della logica. Con alcune differenze ed analogie. La differenza principale è una dualità: Boole aritmetizza, algebrizza per l'esattezza, la logica; Frege, al contrario, considera la deduzione aritmetica come deduzione logica («arithmetic is but a developement of logic, any arithmetical proposition is also a logical law, though derived ... computing is deducing» [Frege, 1884; p. 99]; ma anche, il suo sistema logico ... «proceeds according to some fixed rules, similarly to a computations» [Frege, 1884; p. 103]). L'analogia principale è che l'analisi dei fondamenti della conoscenza non deve in nulla far riferimento al rapporto fra l'uomo e lo spazio, anzi. La sua è in un'analisi "logica" dei fondamenti, basata sul numero ed il linguaggio: il linguaggio, quello algebrico di Boole, quello "formulare (di formule)" di Frege, sono i *linguaggi (logici) del pensiero*; pensiero delle quantita', nel caso della matematica. In nome di Euclide, la lezione di Riemann sull'irriducibilita' e la generalita' delle strutture spaziali "non quantitative", ma continue, lisce (differenziabili) ... e delle trasformazioni (deformazioni) su di esse, è messa da parte.

Grazie alla nozione assoluta di quantita', la certezza fregeana è allora nella indipendenza dalla intuizione (kantiana). Ogni riferimento ad essa fa scivolare verso lo psicologismo (Herbart) o l'empirismo (Stuart-Mill). Frege esclude con questo ogni analisi, cara in particolare a Riemann ed Helmholtz, più tardi a Poincaré ed Enriques (ma anche a Brouwer e Weyl), del "knowledge process", del "costituirsi" della proposta di conoscenza; Husserl, invece, indentificherà, negli anni '30, proprio tale analisi con il problema epistemologico dei fondamenti della matematica e della conoscenza, altro tema su cui tornare.

Con Frege comincia quindi l'avventura della restrizione della analisi dei fondamenti al solo linguaggio, ipostatizzato in una logica assoluta e, poi, da Hilbert, in formalismi senza significato, luogo della deduzione meccanica. L'apporto di Frege è di grande rilievo, per la profondità della sua analisi "concettuale" (il numero come *concetto*, contro ogni deriva psicologista od empirista). Al centro di questo approccio sono l'Aritmetica di Peano-Dedekind, in quanto *la* teoria delle quantita' discrete e numerabili, "ben ordinate" come 1, 2, 3 ... (e solo di tali quantita', si sperava) e la teoria delle "collezioni di quantita' senza struttura", la Teoria degli Insiemi.

4. Hilbert e la certezza nella "meccanicità".

L'idea di Leibniz di una "lingua caratteristica del pensiero" è dunque rivitalizzata da Frege con grande originalità: il calculus ratiocinator viene specificato in un calcolo logico (della quantificazione). Questa è infatti l'altra svolta rispetto a Leibniz (e Boole): Frege propone la prima trattazione rigorosa dei quantificatori universale ("per ogni ...") ed esistenziale ("esiste ...") cosi' importanti per gestire le variabili in matematica. Nasce cosi' la Logica Matematica.

Frege non è ovviamente solo nell'impresa. Dedekind e Peano danno una formulazione rigorosa dell'induzione come strumento di prova chiave in Aritmetica, ponendolo anche essi al centro del ragionamento matematico. Ragionamento "significante", tuttavia, perche' identificato a principi logici, universalia della razionalità umana. Anzi, significanti perché, in fondo, per Frege, la costruzione logica, il concetto di numero, fanno riferimento ad un "ontologia", ad un "esistente" al di fuori dell'uomo e di ogni sua interazione, psicologica, empirica, con il mondo.

Non è questa l'attitudine di Hilbert, al volger del secolo. Come Frege, egli da' assoluta centralità al linguaggio (ricordo che Wittgenstein "il" filosofo dell'analisi del linguaggio, almeno nella sua prima fase di lavoro, fa esplicito riferimento al proprio debito con Frege), ma oltre Frege, Hilbert da rilievo alle "forme" del linguaggio. Mi spiego. Con Hilbert nasce l'analisi *formalista* dei fondamenti (della matematica, ma al solito frequenti sono i cenni a quella del "pensiero", in generale), ovvero l'analisi della struttura formale del linguaggio e del ragionamento come deduzione. Essa è basata sull'indipendenza della formulazione assiomatica e della deduzione formale dal significato, non solo "spaziale", ma anche logico.

Hilbert arriva a questa proposta dopo una grande esperienza matematica, in diverse direzioni, che lo aveva portato a risolvere problemi di "esistenza" in modo non construttivo. In breve, aveva dimostrato l'esistenza di soluzioni di sistemi di equazioni differenziali e risolto un importante problema aperto: l'esistenza di una base finita per lo spazio degli invarianti e covarianti delle forme algebriche n-arie. In entrambi i casi aveva dimostrato l'esistenza non gia' "fornendo" la funzione o la base algebrica in questione, ovvero dandola "costruttivamente", bensi' provando che, se si suppone la non-esistenza, si arriva ad un assurdo. Questa è teologia, non matematica, diranno molti. Frege in una corrispondenza che sfiora gli insulti, gli propone di dare per quella via una prova dell'esistenza di Dio ... .

Ma non è questo il senso della proposta rivoluzionaria di Hilbert: per lui, lo statuto dell'esistenza in matematica non è il riferimento ad "enti" od idee comodamente seduti in qualche empireo, ma è quello dato da una prova di coerenza della teoria intesa. Hilbert sta cosi' proponendo una *definizione* della nozione di "esistenza matematica", non ontologica e profondamente originale: si vuol dimostrare che un certo oggetto matematico esiste? Bene, si dia con rigore il sistema assiomatico in cui si è condotta la dimostrazione di esistenza, per assurdo o comunque, si provi la coerenza di tale sistema: *questa è l'esistenza in matematica, e null'altro*. (E' allora che Frege, non cogliendo l'originalità dell'idea di Hilbert, gli propone una breve teoria assiomatica di Dio - essere onnipotente ecc ... - e gli suggerisce di provarne la coerenza). Malgrado le prime incomprensioni, la proposta affascina i piu': sgombra il terreno di duemila anni di metafisica (ma dove stanno questi oggetti matematici? triangoli, cerchi perfetti e ... funzioni di variabile complessa tutti ospitati, in secula seculorum, nella mente di Dio ...). Perchè l'analisi tenga in piedi bisogna ovviamente:

- dare un'assiomatica formale di tutte (le principali) teorie matematiche, a partire ovviamente dall'Aritmetica, ormai al centro dell'attenzione di tutti, fino alla geometria (Hilbert, 1899), origine di tanti sconvolgimenti;
- fare in modo che il significato, come riferimento ad enti, idee o *intuizione* (spazio-temporale ad esempio), non entri in alcun modo nell'uso matematico di questi assiomi, ovvero non interferisca minimamente con la *deduzione*;
- dimostrare la coerenza delle teorie in questione (a cominciare dalla Aritmetica).

La certezza è nella *dimostrabile coerenza* e nella *meccanicità* della deduzione. Perché questo è il nodo: per evitare riferimenti al significato, con la metafisica ad esso usualmente associata (gli enti matematici), ed, ancor peggio, all'intuizione, con le sue ambiguità, per dare piena generalità al ragionamento matematico, esso deve essere "indipendente da Dio, cui fa riferimento Kroneker, da forme speciali dell'intuizione ancorate sull'induzione aritmetica, come vuole Poincaré, e da ogni "actual, contentual assumption". Hilbert propone quindi una "meccanizzazione potenziale" della deduzione. Se il matematico usa, ad esempio, la regola

$$\frac{A \qquad A \textit{ implica } B}{B} \qquad \text{(il classico modus ponens)}$$

la sua applicazione nella prova deve solo dipendere dalla struttura "letterale" delle formule: se il primo A è identico (o sintatticamente unificabile, si dice oggi in dimostrazione automatica) al secondo A e fra A e B c'è una "freccia", allora scrivi (deduci formalmente) B. Questa è la potenziale meccanizzabilità della deduzione, scevra di significato e, inoltre, condotta in modo finitario. Le formule infatti posson ben far riferimento ad oggetti infiniti, ad esempio l'insieme di tutti i numeri interi o persino i reali, questo non deve entrare nella deduzione, che opera su stringhe fnite, grazie a regole fatte di stringhe finite. La loro natura puramente sintattica e la finitezza della regola garantiscono la certezza.

Ci siamo: la macchina per pensare prende forma. Invano Poincaré prima, nel primo decennio del secolo, ed il più illustre degli allievi di Hilbert, Hermann Weyl, a partire dal 1918, protestano: la matematica è "contentual" (ricca di contenuti), la deduzione è significante, radicata in "atti di esperienza", come dirà Weyl, facendo riferimento ad Husserl. La proposta formalista di Hilbert è vincente: il suo problema aperto, fra i tanti nella lista proposta a Parigi nel 1900, riguardante la necessità di una prova formale, finitista, della coerenza dell'Aritmetica, è al centro dell'attenzione. Come dicevo, l'idea propone una "soluzione finale" del problema dei fondamenti: niente più metafisica, niente bisogno di intuizione ... . La proposta è robusta, precisa, la congettura ha un chiaro carattere matematico. La *meta*matematica, che Hilbert inventa, ovvero *una analisi matematica* della *dimostrazione matematica*, mette interamente in mano ai matematici il problema dei fondamenti: basta dare una "prova matematica" di coerenza dell'Aritmetica, di carattere finitario, manipolante solo stringhe finite di simboli (e, quindi, delle principali teorie matematiche, una volta assiomatizzate). I matematici potranno cosi' lavorare con "oggetti ideali" come i numeri complessi e con enti infiniti senza problemi, basta che *la teoria che ne parla* (la teoria formale degli insiemi, si dirà poi) sia finitaria, descritta da assiomi e regole finite e finitamente elaborati. L'infinito è ben necessario; il calcolo infinitesimale, ad esempio, lo usa come strumento di analisi addirittura del finito: la velocità, l'accelerazione, dei corpi intorno a noi, ben al finito, richiedono limiti, cioé l'infinito in atto (derivate ed integrali). Gli infinitesimali, monadi metafisiche per Leibniz, l'infinito teologizzante di Cantor, tecnicamente necessari, non hanno più bisogno di metafisica e teologia per essere giustificati, fondati formalmente: basterà solo dimostrare con calcoli finitari, *potenzialmente meccanizzabili*, la coerenza delle loro formalizzazioni rigorose ed indipendenti da significato. Dissento radicalmente dal progetto, per motivi non metafisici bensi' scientifici (il ruolo del significato, come accennero' poi), ma bisogna riconoscere che il programma del primo Hilbert era forte ed audacissimo, un grande progetto per la matematica e per la conoscenza.

Qualche anno dopo, Hilbert va più in là. Aggiunge a questa proposta cosi' originale, ricca di una epistemologia finitista di grande interesse, una "deriva" positivista. Riprende, senza rendersene conto, il programma di completezza di Laplace dei sistemi di equazioni differenziali rispetto al mondo fisico: il futuro è perfettamente decidibile, a meno di approssimazioni che "conservano, nel tempo, lo stesso ordine di grandezza". In questo senso, ed a meno di inevitabili errori di misura fisica, per Laplace, gli asserti (fisico-)matematici sono decidibili: non esiste "ignorabimus", dicono sia Laplace sia Hilbert. Hilbert, ovviamente, applica il programma alle sue teorie formali, l'Aritmetica in primis: gli assiomi permettono di decidere ogni asserto sintatticamente ben formato, come vero o falso. Spesso si parla in modo unitario del "programma di Hilbert" mettendo insieme questi due momenti del pensiero del grande matematico, forse perchè i teoremi di incompletezza di Gödel faranno piazza pulita di entrambi con un colpo solo; a mio avviso, invece, le due proposte hanno un ben diverso "spessore" filosofico ed epistemologico. La prima è rivoluzionaria, la seconda è una banalità che ogni scienziato positivista (o pre-post-positivista) pensa della propria teoria preferita: che essa possa dire tutto sul mondo. Ma soprattutto, essa evoca un mondo chiuso, predeterminato; è una ipotesi laplaciana, già sconfitta in fisica dal, bada caso, teorema dei tre corpi di Poincaré, [Poincaré, 1892]. Oppure, più semplicemente e per passare dal quadro dei linguaggi formali a quello delle lingue storiche, basta avere una esperienza bilingue per constatare mille volte, che in ogni coppia di lingue umane esistono espressioni dell'una che si possono, forse, tradurre letteralmente nell'altra, ma la cui vera espressività nell'una sfugge all'altra: le lingue sono "relativamente" incomplete, e, quindi, "assolutamente" incomplete. Frammenti di mondo, colti o detti dall'una sfuggono all'altra; ovvero, ogni volta che si sceglie un piano, un livello di rappresentazione della conoscenza, anche cosi' ricco come le nostre lingue storiche, vi sono contenuti significanti (ed in tal caso, anche emozioni, gusti, sensazioni ...) che sfuggono, perché ricchi di determinazioni costruite in una varietà di esperienze storiche diverse, concettuali o linguistiche.

La matematica, piccolo frammento "sui generis" dello sforzo dell'uomo per descrivere il mondo (parte del nostro "historical endeavour towards knowledge" come dice H. Weyl), strumento fra gli altri, ma punta di diamante, per organizzare e capire il mondo in cui siamo, è un sistema aperto (v. [Cellucci, 1998]); come le lingue, è continuamente caricata e ricaricata di significati, in risonanza con le prassi umane. Queste integrano una pluralità di forme di presenza al mondo, non sempre riducibili ad un solo livello di rappresentazione. Perché questo è l'errore centrale del formalismo linguista: non tanto la metodologia riduzionista, in parte inevitabile in scienza, ma lo "schiacciare" la conoscenza su di un solo piano rappresentazionale, il "linguaggio formale". Ed escludendo con questo il significato, come luogo di incontro di una pluralita' di attivita' pratiche e concettuali, integrazione di diverse forme di conoscenza umane (ragionamento logicamente significante ed organizzazione dello spazio fisico, fra gli altri). Integrazione fatta nella storia, ma che inizia o si riflette, nel corso dell'ontogenesi, nella natura e nelle traccie che lascia nel nostro cervello.

Il nostro cervello infatti è innanzitutto un "integratore" di informazioni ed atti fra i piu' svariati; il nostro dialogo nella storia fra esseri muniti di cervello, è una permanante integrazione di atti d'esperienza e di costruzioni mentali, sia nel "privato della nostra mente" sia nell'intersoggettività: solo considerando la pluralità dei possibli modi di conoscenza si puo' sperare di descrivere e capire con "sufficiente" completezza. Ma su questo si tornerà.

5. Intermezzo paradossale.

Muniti dell'apparato che Frege ed Hilbert avevano inventato, ecco dunque la stragrande maggioranza dei matematici interessati ai problemi fondazionali, muoversi bandalzosi verso le prove di coerenza e completezza dell'Aritmetica formale. Lupo solitario, come dirà poi di se stesso, H. Weyl congettura invece che questa ipotesi della meccanizzabilità completa, sia pure di una teoria che parla di una "struttura semplice" (i numeri interi) come l'Aritmetica, è insoddisfacente, che vi potrebbero essere asserti che sfuggono alla deduzione hilbertiana (alcune splendide pagine del libro sul continuo del 1918). Inoltre, la sua analisi fenomenologica del continuo temporale e spaziale è un faro (in particolare lo è stato e lo è per chi scrive).

Ma questo è il privilegio di un matematico con profondo insight filosofico. Gli altri, pur grandi, sprofonderanno in maggioranza nel formalismo o nell'uso di strumenti formali nell'analisi fondazionale (Bernays, Ackermann, ... poi Post, von Neuman, Kleene, Church, Curry, Turing ...). Gli effetti negativi non si contano. Ricordero' solo uno, di analisi storica, prima di parlare della grande ricaduta positiva, la nascita dell'Informatica. Si riscrive, a partire da quegli anni, ma ancora oggi si continua a farlo, la storia della "crisi dei fondamenti", centrandola tutta in alcuni giochi logico-formali. Invece di ricordare che, improvvisamente, alcuni si erano messi a dire, contro Euclide, Descartes, Newton e Kant, che l'universo è curvo, che la luce puo' quindi "andar curvando per geodetiche", che la nozione di corpo rigido, cruciale per la geometria greca delle figure, è inadeguata ai nuovi spazi fisici, ed omettendo di dire che queste proposte "paradossali" cambiano il piano fenomenale su cui noi disegnamo la matematica, cambiano la fisica, rivoluzionano la geometria e la conoscenza tutta, si raccontano da decenni divertenti giochi di parole su insiemi (ordinati) di tutti gli insiemi (ordinati), cui i matematici non avevano mai pensato, o, peggio, storielle da raccontare in barberia la domenica mattina, su barbieri che fanno la barba a tutti e soli quelli che non la fanno a se stessi. Attenzione, la costruzione insiemistica di Cantor e Frege, in cui si dettero quei paradossi, è straordinaria, ma che nel darla questa andasse un po' aggiustata, è cosa ben normale. Sarà lo stesso con il lambda-calcolo di Church degli anni '30 e la Teoria dei Tipi di Martin-Lof, del '70: quale teoria espressiva non è in prima istanza incoerente, proprio perchè vuole esprimere molto? E, d'altra parte, quando mai i matematici avevano lavorato usando l'insieme di tutti gli insiemi o "senza tipi" (nessuno mai si era sognato di "insiemi appartenenti a se stessi")? Problemi di crescita di un nuovo approccio, nel linguaggio, da rivedere con la pratica della prova. Sempre, poi, e facilmente, corretti restringendo, nei diversi contesti, l'assioma di comprensione, che permette di "isolare", definire, insiemi, o la struttura della collezione delle funzioni.

Che la svista diventi "la crisi dei fondamenti" di una cosa cosi' robusta e seria come la matematica, la matematica che "parla del mondo", fa oggi sorridere. O, forse, non si trattava di una "svista" e l'episodio dovrebbe farci riflettere sui problemi inerenti alla visione del linguaggio che si prepara in quegli anni, la visione "referenziale": il linguaggio è ben distinto dal mondo e "predica" sul mondo. Più che del logicismo, essa è conseguenza del formalismo e della distinzione, che gli è propria ed è apparentemente tecnica, fra "sintassi e semantica". Liberi asserti formali indicano realtà esterne oggettive, pre-esitenti: predicati, dati in sintassi e grammatiche formali (magari innate, sic), collezionano insiemi di matite blu, elettroni, positroni od unicorni. Oggetti tutti "già li'". Il linguaggio si prepara ad essere distaccato dal significato, non co-costituente il significato. Semmai questo è il problema, il dramma filosofico lasciato in eredità al secolo ed i paradossi interni alla "svolta linguistica" sono rilevanti, non in quanto "crisi dei fondamenti della matematica", ma in quanto prime e profonde crepe della concezione predicativo-referenziale del linguaggio già presente in Frege.

Isolato, ma durissimo, Poincaré reagisce subito: "la logistique n'est pas stérile: elle a engendré les paradoxes". Poincaré infatti stava inventando, dopo i lavori di Gauss, Riemann, Mach, Helmholtz e Clifford, e contemporaneamente a Lorentz ed a Einstein, una geometria in cui la struttura locale dello spazio è data dalle equazioni di campo (e, quindi, dalla presenza dei corpi ... le cui forze coesive sono correlate alla struttura metrica dello spazio, aveva intuito Riemann); stava proponendo un mondo in cui i fondamenti della geometria si ponevano insieme al suo significato fisico, in cui la fisica si capiva grazie alla geometria, il mondo in cui Einstein sviluppera' una rivoluzione scientifica. In esso la rigidità dei corpi, la struttura della materia e della luce presentavano paradossi matematici (geometrico-cognitivi) formidabili, sfide scientifiche del tutto attuali, nella fisica della relatività ed ancor più, oggi, in fisica quantistica, non paradossi tutti interni a nuove proposte logico-formali, giochi di parole e fra parole, presto superati con un riferimento alla prassi della matematica.

Attenzione, i paradossi del linguaggio sono una cosa seria. Si pensi al paradosso del mentitore: "questa frase è falsa". C'è qui la sguardo del primo pensiero filosofico, quello greco, sul problema del significato. Forse esso è correlato a quella svolta cognitiva per l'uomo che è l'invenzione ed il perfezionarsi della scrittura fonetica. Infatti, si puo' pensare che l'ideogramma, il geroglifico, sia immediatamente significante: per quanto astratto, il significato "è li'", nel disegnino. Il fonema, in se' insignificante, sembra porre all'uomo il problema drammatico del "che sto dicendo?" Come questi "(archeo-)simboli", i fonemi, diventano significanti, cosa è questa frase, questa collezione di fonemi, primo insieme simbolico? La congettura storica che faccio qui è del tutto arbitraria, senza documentazione alcuna, ma non riesco ad imaginare un paradosso del genere senza l'esperienza della scrittura fonetica. L'analogia possibile con il paradossi del barbiere, basata sull'autoreferenza, propria ad entrambi, è uno sguardo a volo d'aquila, che dimentica, nel paradosso del mentitore, la correlazione al significato (ed il contesto storico) e, di nuovo, vede solo la "forma" del paradosso greco.

In effetti, tale paradosso puo' essere posto accanto all'altro che i greci, sempre loro, posero agli albori della riflessione dell'uomo sulla conoscenza: il paradosso di Zenone. Anche in tale caso, la centralità del problema è evidente: cosa sta accadendo con questa mia rappresentazione a segmenti e punti dello spazio, con l'operazione concettuale del dividere, applicata al movimento ed al tempo? Che vo' dicendo dello spazio-tempo fisico con la mia geometria e le mie misure aritmetiche?

In questi due esempi classici, il problema linguistico è analogo, per profondità, a quello della rappresentazione geometrica dello spazio sensibile. Non certo nella seconda metà dell'ottocento, quando, mentre la geometria sconvolge il mondo della matematica e della fisica, alcuni logici fan giochi di parole su piccoli errori di formalizzazioni della matematica, per di piu' estranei alla matematica. Eppure, logicisti e formalisti ci han raccontanto per decenni che quella era la crisi dei fondamenti, dimenticando, rimuovendo direbbe uno psicanalista, il problema, il dramma, dello spazio e della sua intelligibilità geometrica. Mi rendo conto di esser troppo polemico e della paradossalità di queste mie osservazioni su una crisi, quella interna alla teoria degli insiemi, che ha stimolato tanta bella matematica: forse, quando saremo usciti dalla dieta unilaterale dell'analisi solo logico-linguistica della conoscenza ed avremo trovato un po' di equilibrio, si potranno situare meglio i paradossi di Burali-Forti (sugli ordinali) e di Russell (sull'autoappartenenza) cui facevo riferimento, che sono stati senz'altro begli insights sulle formalizzazioni allora in fieri della matematica. Infatti, il problema non è matematico, ed i più illustri fra i logicisti e formalisti dell'epoca erano grandi matematici, ma filosofico e storico. Soprattutto storico: non si puo' analizzare il dibattito sui fondamenti, a cavallo dei due secoli, escludendo la "crisi" del locale/globale che, da Riemann ad Einstein, rivoluzionerà l'intellegibilità geometrica dello spazio fisico o le riflessioni, siapure meno profonde, di Helmholtz e Poincaré sullo spazio del vivente, sguardi originali sulla visione ed il movimento.

Per questo e per il momento, si ha forse il diritto di essere volutamente provocatori (e paradossali), anche verso gli autori di quelle teorie (dei Tipi di Russell, ad esempio) che, nella versione per la Teoria della Calcolabilita' degli anni '30 (v. poi), mi hanno permesso a lungo di guadagnarmi la vita (v. pagina web di chi scrive); inoltre si tratta di teorie di grande fascino matematico e ricche di applicazioni. Quando avremo superato le monomanie filosofiche del logicismo e del formalismo, si potrà allora, più equilibratamente, come dicevo, evidenziare tutti gli elementi della "crisi dei fondamenti", di cui pure i paradosi logico-linguistici sono una componente importante. In particolare, come prime crepe nella visione referenziale del linguaggio cui si acccennava. La soluzione infatti proposta, ai primi del secolo, da Zermelo, e rimasta egemone in Teoria formale degli Insiemi, restringe la possibilità di scrivere liberamente predicati per definire insiemi di "oggetti": per definire od isolare un insieme, non basta un predicato formalmente ben scritto, ma lo si deve fare relativamente ad una costruzione "già data", all'interno di un universo semantico costruito, magari, solo a partire dall'insieme vuoto. La soluzione è sintomatica del necessario coinvolgimento del significato nella costruzione linguistica, sebbene i formalisti cerchino di limitarlo ad una "ipotesi ontologica" (cosi' si dirà!) minima: l'"esistenza" dell'insieme vuoto.

6. Macchine per pensare

Teorie formali, quelle in fieri al volgere del secolo, per altro cosi' ben concepite, da permettere, negli anni '30, appunto, di descrivere con rigore il "pensiero artificiale". Infatti, ma è storia ben nota, lavorando al programma hilbertiano (prove di coerenza, decidibilità e completezza dell'Aritmetica, fra l'altro), Curry forse per primo, con la Logica Combinatoria del '29, poi Herbrand e Gödel, propongono linguaggi per la deduzione effettiva, "meccanica". Calcoli di funzioni e sistemi di equazioni (Kleene) che rendono rigorosa l'intuizione di Hilbert della deduzione finitista. Nasce la matematica della calcolabilità, intesa come formalizzazione matematica del *ragionamento* matematico. In sistemi diversi, tuttavia. Ognuno, si pensa, con il suo campo di applicazione.

Nel 1931, Gödel dà una nozione di funzione calcolabile che usa per descrivere la metateoria dell'Aritmetica. E, prodezza tecnica e concettuale straordinaria, riesce cosi' a codificare la deduzione, una nozione metateorica, nella teoria formale, ovvero nell'Aritmetica assiomatizzata alla Peano-Dedekind, la teoria cui faceva riferimento Hilbert nel suo programma. Cio' fatto, riscrive il paradosso del mentitore a livello sintattico, ovvero scrive nel linguaggio dell'Aritmetica la frase "questa frase è *indimostrabile*" (si noti la differenza), nell'ipotesi, hilbertiana, che "verità" e "dimostrabilità formale" coincidano (l'ipotesi di completezza). Dimostra allora, ma quest'ultimo passaggio è relativamente facile, che, qualora si supponga che l'Aritmetica è coerente, "questa frase è indimostrabile", codificata appunto come asserto dell'Aritmetica, è indimostrabile in Aritmetica e che lo è pure la sua negazione. Dunque l'Aritmetica è incompleta: c'e' un asserto, aritmetico, che le sfugge, che non puo' decidere.

Poi, in un secondo teorema, dimostra che "questa fase è indimostrabile" è, all'interno dell'Aritmetica, equivalente alla (frase che codifica la) coerenza dell'Aritmetica. Quindi, se l'Aritmetica è coerente, e proprio allora, metodi finitisti, in quanto codificabli nell'Aritmetica, non possono dimostrare tale coerenza. Sembra la fine del programma di Hilbert, nei suoi due aspetti che avevo prima "filosoficamente" distinto, ma ... manca qualcosa, che Gödel nota subito, in un commento al suo teorema: non è detto che le funzioni calcolabili, che ha contestualmente definito, rappresentino ogni forma possible di deduzione effettiva.

Il problema è superato nel '36, quando Turing e Kleene dimostrano l'equivalenza dei numerosi sistemi formali per la calcolabilità, incluso quello proposto de Gödel per dimostrare il suo teorema: allora, ogni forma di deduzione metateorica effettiva puo' essere codificata nell'Aritmetica e l'incompletezza è "assoluta", si dirà.

Sorprendendemente, ma non troppo, questo risultato di equivalenza, che segna la fine del sogno laplaciano di Hilbert, è anche l'inizio di una nuova avventura scientifica, l'Informatica, ispirata proprio a quella filosofia. Anzi, quegli anni sono il momento di inizio e, forse, quello scientificamente più felice del matrimonio fra formalismo e meccanicismo che ha cambiato il secolo.

Sempre con lo scopo di dare una nozione rigorosa di calcolo deduttivo, Turing infatti inventa la distinzione fra hardware e software: dà una nozione precisa di programma (insieme finito di regole formali od istruzioni) come ben distinto dalla "macchina" che lo deve realizzare. Nasce la programmazione di macchine che potranno esser materializzate in qualsiasi modo: elettriche, meccaniche, idrauliche, elettroniche ... *neuronali*; se esse permettono di implementare un linguaggio di programmazione Turing-completo, ovvero con il livello di espressività dei vari sistemi appena dimostrati equivalenti, allora possono "ragionare formalmente", simulando in tutto il ragionamento deduttivo umano. La razionalità, per quasi tutti i matematici investiti dal problema, è esattamente nei "se ... allora ... altrimenti" logico-formali cosi' ben descritti dalla nascente programmazione. L'operazione schizofrenica raggiunge il suo compimento: i limiti che Gödel, con i teoremi di incompletezza, ha posto alla deduzione formale sono gli stessi per la macchina e per l'uomo. La razionalità umana è meccanizzabile o non è. L'intelletto si trasferisce fuori dall'uomo: la certezza razionale è nella macchina.

Quell'amputazione del rapporto allo spazio qui ricordata, dovuta alla costernazione per la perdita della certezza euclidea (e Frege è esplicito su questo nesso causale, fra la crisi della geometria e la sua proposta), ha contribuito non poco, insieme certo ad altri elementi di crisi, al costituirsi di una teoria della conoscenza menomata dell'"umanità": la conoscenza è nella macchina. Husserl, negli stessi anni '30, parla di una crisi *nel* sapere (e nel rapporto fra gli uomini: siamo nella Germania nazista), come "perdita di senso", in quanto costruito insieme nella storia, nei contesti di vita. E, nell' "Origine della Geometria" ripone al centro dell'analisi epistemologica, in quanto analisi di una "genesi concettuale", il problema del rapporto allo spazio: «la geometria ... e' generata nei nostri spazi di umanita', a partire da una attivita' umana.» [Husserl, 1936]. Il menomare la matematica di uno dei suoi tre pilastri, la logica, i calcoli formali ed i principi di costruzione geometrici (simmetrie, connettivita' ...), è stato uno dei modi per toglierle uno degli elementi costitutivi del senso, fra i piu' radicati nelle nostre prassi umane (quel muoversi nel pensiero come muoversi nello spazio, che citavo).

Il sotto-prodotto del formalismo linguistico in matematica, l'Intelligenza Artificiale (I.A. forte, come si dice oggi), intravista dunque negli anni '30, prendera' il suo avvio concreto con uno scritto di Turing del 1950. Come si è cercato di dire, questo è stato possibile poiché è passati dalla conoscenza come dialogo fra l'uomo ed il mondo, fatto, in matematica, di geometria e logica e calcoli (poiché tutti e tre gli elementi coesistono nella prova), dalla conoscenza come tentativo, con questi strumenti, e nel mentre si costruiscono questi strumenti, di capire lo spazio ed il linguaggio, alla conoscenza come calcolo simbolico-formale, indipendente dal significato, spaziale e logico in particolare, manipolazione certa perchè finitaria e meccanica, non perchè "significante".

Conosciamo le enormi conseguenze positive di questa operazione schizofrenica. Queste macchine, lungi dal rimpiazzare l'uomo nei compiti cognitivi, lo aiutano, ben al di là del previsto, arricchendo l'azione ed il pensiero con la loro straordinaria velocità ed incrollabile capacità di iterazione, con reti di comunicazione e basi di dati enormi, con la loro "logica" perfetta, perché estranea a contesti e significati. Inoltre, alcuni sistemi interattivi riescono anche a collaborare alla prova matematica, quando si passa loro il lemma ben formalizzato, la cui dimostrazione richiede calcoli mostruosi, l'induzione già ben organizzata (il carico induttivo già ben scelto); fuori dal mito, lo strumento tecnico, il calcolatore, è assolutamente formidabile. Anzi, sono queste esperienze che ci stanno facendo capire come l'astrazione matematica non sia la stessa cosa della formalizzazione, errore cruciale dell'hilbertismo (più che di Hilbert) e che "l'intelligenza" non è "indipendente dalla codifica", tema su cui torneremo. La matematica è certo astratta ma non per questo è solo formale: essa manipola oggetti simbolici significanti, non puramente formali, nel senso di "stringhe di simboli" ed "oggetto di manipolazione" indipendenti da significato. La matematica è normativa, ma la norma, la regola, non è solo la regola formale, certa perché priva di senso.

La matematica poi, centra degli invarianti concettuali, è *basata* su invarianti concettuali, ma non per questo si puo' considerare ogni costruzione concettuale "invariante" rispetto "tutto" (rispetto ogni "implementazione"): è compito del matematico proprio capire il buon livello di invarianza. E' l'esercizio che fa nella prova: questa dipende esattamente da queste e quelle ipotesi, è indipendente da queste altre; qui e non li' si situa la sua invarianza. E l'intelligenza umana passa *anche* attraverso la codifica o rappresentazione o non è del tutto indipendente dalla rappresentazione. Ovvero, cerchero' di sostenere per sommi capi (si tratta di un progetto in corso), che il sustrato e la tecnica di rappresentazione dell'intelligenza, compresa la sua organizzazione spaziale, contengono informazione indispensabile.

7. Portabilita' e metempsicosi

Già ricordavo che l'informatica come disciplina scientifica inizia quando Turing concepisce la distinzione fra "programma" e "macchina" (pura distinzione matematica perché, nel '36, queste non sono che rigorose esplicitazioni matematiche della idea della meccanizzabilita' della deduzione), e quando, negli stessi anni, si dimostra l'indipendenza della classe delle funzioni calcolate dal linguaggio di programmazione e dalla macchina (finitisti) che le definiscono. Non solo, ma Turing, usando l'idea di Gödel alla base della rappresentazione della metateoria nella teoria, la gödelizzazione, scrive una "macchina universale". Paradigma della nozione moderna di compilatore, essa prende come input un numero ed un programma, codificato come sequenza di numeri, e valuta quel programma su quell'argomento. Questa indipendenza della programmazione, dei linguaggi informatici e della loro espressività, dall'implemetazione specifica nonché dalla macchina fisica, è il paradigma chiave dell'Informatica. E lo è anche per le teorie delle conoscenza "funzionaliste" della conoscenza che ne sono derivate: quel che interessa è la "funzione", quella propria del cervello, pensare, dedurre .... Una volta ben descritta formalmente, tale funzione puo' essere traferita su qualsiasi altra macchina, anche diversa da quella biologica che abbiamo nel cranio.

In Informatica, la "portabilità del software" è il versante pratico dell'indipendenza funzionale, versante assolutamente ineludibile se si vuol fare Informatica in modo sufficientemente generale (e scientifico). I programmi, i linguaggi, i compilatori, le basi di dati ... devono essere descritti indipendentemente dalle macchine su cui implementarli (il software Microsoft fa spesso eccezione a questo, ma solo per motivi di monopolio commerciale). Al punto che se, per dire, il vostro personal sta "muorendo", per età ed acciacchi, si possono prendere tutti i dati ed i programmi in esso, nonché il suo compilatore e sistema operativo e ... trasferire il tutto su di un altro calcolatore. La "metempsicosi" cioé fa parte della pratica scientifica e tecnica dell'Informatica, ne è parte essenziale: splendida facilità tecnologica, ma ben misero paradigma se trasferito, con la metafora "il cervello è un calcolatore digitale", alla analisi della cognizione umana, almeno per chi non sia induista.

Perchè questa è la sfida cruciale per chi voglia esser, nell'analisi della cognizione umana, materialista e monista, senza essere meccanicista, nonchè evitare il neo-dualismo proposto dalla filosofia funzionalista: come puo' il nostro cervello, in cui l'hardware ed il software sono tutt'uno, unità di materia biologica, a suo agio solo nella scatola cranica di un uomo vivente, e vivente nella storia, essere allo stesso tempo luogo di costruzioni concettuali di grande generalità e stabilità?

La risposta data dal susseguirsi del logicismo e del formalismo, fino al funzionalismo, è stata la seguente, riprendendo il sunto schematico qui fatto: individua leggi universali del pensiero, algebre booleane o l'induzione ed i quantificatori fregeani; scrivile in sequenze finite di simboli, in ultima istanza codificabili come 0 ed 1, e proponi leggi di manipolazione formale, indipendenti dalle ambiguità del significato, dai riferimenti allo spazio o ad altri luoghi di incertezza; riscrivi tutto questo in un linguaggio formale, detto di programmazione, ed ecco l'uomo raziocinante riprodotto nella macchina.

Peccato pero' che i dimostratori automatici, anche per l'Aritmetica, il luogo della meccanizzazione, si fermano di fronte al problema, ben modesto, della scelta della carica induttiva; che risultati di incompletezza concreta fanno entrare il significato, quello dell'infinito in particolare, nonché l'ordine e strutture ad albero, come nozioni geometriche, in modo essenziale persino nella prova aritmetica (v. [Longo, 1999a]). Per non dire di robot che cercano di fare due passi nel giardino della Carnegie Mellon University, risolvendo equazioni differenziali a velocità straordinarie, 0 ed 1 che si susseguono in nanosecondi, e si arrestano per ... l'ombra di un albero sul cammino.

Come riprendere, per l'analisi della conoscenza umana, i temi eliminati dal percorso concettuale qui descritto, pur conservando la ricchezza di un esperienza di grande spessore matematico? Difatti la Logica Matematica è stato uno dei settori matematici più profondi ed originali del secolo, e fra i meno sterili, perchè madre di una disciplina di gran rilievo, l'informatica: l'analisi fondazionale che essa propone va arricchita, non dimenticata.

I paradossi della conoscenza, posti dalla geometria e dal suo rapporto allo spazio fisico, possono essere un primo punto di partenza.

8. La strutturazione geometrica dell'informazione

Vediamo allora due primi esempi, a mio avviso paradigmatici, in cui l'organizzazione geometica "dell'informazione" è ineludibile. Nel 1877, Cantor, nel porre le basi della teoria degli insiemi, dimostra che si "puo' codificare" il piano cartesiano, e, in effetti, ogni spazio di dimensione finita, con la retta. La tecnica è facile per noi, oggi, ma il teorema, un nuovo "paradosso" della geometria dello spazio, sconvolse l'autore: si distrugge cosi' la nozione cartesiana di dimensione? Con una sola coordinata, magari scritta come sequenza di 0 ed 1, posso determinare un punto del piano, dello spazio .... Dedekind osserva allora, confortandolo in una lettera, che la sua corrispondenza bigettiva è ovunque discontinua: si dira' poi che la dimensione è un invariante topologico (ovvero che è conservata solo da isomorfismi di spazi topologici). L'intelligenza dello spazio è persa dalla "codifica" di Cantor.

In altri termini, la retta ed il piano non hanno *senso matematico* senza la loro struttura topologica, in effetti metrica od addirittura di spazi vettoriali, dove l'"isomorfismo" e' assolutamente falso (la curva continua di Peano che ricopre il quadrato [0,1] non e' bigettiva). Eppure, questo risultato è rimasto, in "the back of the mind" di tanti, sorta di paradigma del cosi' frequente ... "ma intanto "tutto" si puo' codificare con sequenze di 0 ed 1". Lo si ritrova spesso nelle "simulazioni" funzionaliste della visione umana, persino in un testo del 1993 di Jonhson-Laird: cominciamo con il codificare, con una telecamera, l'immagine pixel per pixel ... .

Un'altro esempio è dato dalle relazioni fra le diverse geometrie, euclidee e non-euclidee. Esse possono esser unificate per "via algebrica". Diventano allora, ciascuna, l'insieme delle proprieta' invarianti rispetto diversi gruppi di trasformazioni. Una si differenzia subito dalle altre, quella euclidea, poiché il gruppo dei suoi automorfismi è l'unico a contenere le omotetie (ovvero, le proprietà euclidee, e solo esse, non cambiano per rimpicciolimenti ed ingrandimenti arbitrari delle strutture geometriche). L'assenza di questa proprietà è accettabile in Fisica, che, a tutt'oggi, non pretende o non riesce ad unificare la microfisica (fisica quantistica) con l'astrofisica (la relatività, benchè i progressi in corso, per via geometrica, siano enormi) ed usa, quindi e dove opportuno, anche geometrie non-euclidee: non si pretende o non si sa passare, per omotetie, dal piccolissimo al grandissimo. Ma, lavorando ad un approccio algebrico unificante, Beltrami e Klein, ben prima della fine del secolo XIX, han dimostrano come si possa immergere (dare una interpretazione relativa di) una geometria nell'altra. A due dimensioni si ottiene anche una rappresentazione intuitivamente efficace (la sfera di Riemann, ad esempio). A più dimensioni tuttavia, e tre sono quelle che interessano, si perde il "senso fisico" delle diverse geometrie. In altri termini, l'equicoerenza cosi' dimostrata è una forma debolissima di equivalenza e fa perdere "l'informazione che conta", ad esempio la strutturazione dello spazio fisico che sta dietro la scelta riemanniana. In altri termini, se si immerge, o "codifica", lo spazio di Riemann in uno euclideo, la traduzione fa perdere, semplicemente ... la "fisica" (la Relatività). Il problema fisico, posto gia' da Gauss e Riemann, è affrontato quando si sviluppa una teoria degli spazi curvi "di per se'", non immersi in varieta' euclidee.

Un fenomeno analogo, ma ancora in questione, lo si ritrova, oggi, proprio in Informatica. I problemi dei processi concorrenti, distribuiti, asincroni (le "reti" di calcolatori, in breve) sono anche problemi spazio/temporali: *distribuzione* nello spazio, di machine che *concorrono* allo stesso processo, con problemi di sincronizzazione, nel *tempo*, quindi. Alcuni dei sistemi per la concorrenza sono oggi oggetto di interessanti tentativi di tradurre, codificare, tali sistemi in teorie essenzialmente sequenziali (ad esempio, il Calculus for Cuncurrent systems di Robin Milner, CCS, nel lambda-calcolo); ovvero, si cerca di "tradurre" il CCS, per dire, in una delle teorie fondamentali della calcolabilità degli anni '30. Quando e se si riesce a farlo, si devono tuttavia fare "passaggi al quoziente", imporre relazioni di equivalenza che sembrano far perdere quel che conta: l'informatica del calcolo concorrente. Il problema è aperto e di interesse cruciale: anche in tale caso, le codifiche possibili, accantonando, fra l'altro, il ruolo dello spazio, sembrano non essere affatto trasparenti Ancora una volta, "l'intelligenza" del sistema è anche nella sua struttura spazio/temporale ed una sua traduzione, che perda quella componenete del "senso" che è nella strutturazione spaziale, non conserva gli invarianti che interessano.

Non si puo' a questo punto non accennare ad un approccio alla rappresentazione e l'elaborazione automatica della conoscenza, alternativo al calcolo digitale, e che sta avendo rapidissimi sviluppi. Negli anni '40, contemporaneamente ai primi passi dei calcolatori digitali, McCullogh, Pitts e, indipendentemente, Hebb, proponevano "reti formali di neuroni". Prendendo spunto, siapure in modo diverso, dalla struttura a "reti di neuroni" del cervello, disegnavano, matematicamente, macchine in cui gli eventi erano codificati dalla dinamica geometrica di reti di elementi a soglie binarie (i neuroni "scaricano", segnale 1, quando vengono "sollecitati" al di là di una certa soglia). Hebb, in effetti, con un'idea puramente teorica, ma certo geniale, congetturava che, nel cervello, l'informazione fosse conservata e trattata grazie a variazioni delle connessioni interneurali. Ovvero, che rafforzamenti ed indebolimenti delle connessioni sinaptiche, fossero il luogo fisico della elaborazione mentale: in effetti, un'informazione sembra memorizzata anche dallo stabilizzarsi (rafforzarsi) di un circuito neuronale.

L'approccio è radicalmente diverso da quello "alla Turing": la geometria delle connessioni ne è alla base. Inoltre, per come poi le teorie "connessioniste" della conoscenza (cosi' si definiscono) si sono sviluppate, la differenza si è ulteriormente specificata. Invece di codificare in stringhe di 0 ed 1 "leggi universali del pensiero", alla Boole, Frege, Hilbert ..., (l'approccio "top-down" alla conoscenza), la matematica delle reti di neuroni cerca di descrivere il costituirsi dell'intelligenza "bottom-up": l'automa interagisce in modo elementarissimo con il mondo (movimento, segnali minimali ...) e ricostruisce "dal basso" frammenti di rappresentazioni, da elaborare dinamicamente. La fisica statistica, la matematica dei sistemi dinamici (v. [Hertz et al., 1991]) hanno grandemente contribuito allo sviluppo del connessionismo, approccio certo ben più vicino a quello che qui si segue (ruolo dello spazio e del tempo nella rappresentazione della conoscenza). Tuttavia due problemi si pongono: la teoria delle reti di neuroni ci dara' un giorno macchine straordinarie, ma "l'intenzionalita'", fra l'altro, della rappresentazione *nel* vivente, a cui si accenna alla fine di questo articolo, le sfugge. Inoltre, non esistono per ora vere "macchine neuronali": per l'implementazione delle reti matematiche, i nostri colleghi sono costretti a trasferire la loro bella geometria dei sistemi dinamici in codifiche binarie, difficilissimo esercizio di programmazione, vero collo di bottiglia e trasfigurazione del loro approccio.

Perchè mai a partire degli anni '50, i vari approcci al calcolo analogico, dalle idee di Wiener alle reti di neuroni formali, siano state sopraffatte dai calcolatori digitali è una storia da scrivere. Certo, vi sono forti ragioni tecnologiche che han fatto preferire, e di gran lunga, la trasmissione e l'elaborazione digitale. Forse per la trasmissione non c'e' dubbio: oggi trasmettiamo anche la musica e la voce su canali digitali, con una efficacia e fedeltà irragiungibili dall'analogico (in effetti, la nostra voce, prodotta analogicamente, il nostro cervello, sono cosi' poco fedeli, cosi' lenti ... ma piuttosto espressivi ed intelligenti...). Quanto alla elaborazione, è possibile che, oltre ad una superiorità delle tecnologie, abbia avuto un ruolo importante l'egemonia della visione dei fondamenti della matematica (e della conoscenza) cui qui si è accennato. E' questa visione che bisogna rivedere, sia per capire meglio il vivente ed il pensante, sia per fare macchine migliori.

9. Dall'intelligibilità dello spazio fisico allo spazio del vivente

Si sono qui fatti alcuni cenni al problema dello spazio fisico, peraltro al cuore della "crisi" di cui si è a lungo parlato. La teoria della Relativita', i suoi aspetti matematici, ne sono la consequenza principale. Tuttavia la Fisica Quantistica sembra presentare sfide non minori. Di recente, le proposte di strutture non commutative hanno dato nuovi insight a possibli organizzazioni geometriche della microfisca ([Connes, 1990]). Persino più sconvolgenti e difficili (ed a chi scrive ancora incomprensibili), sono le analisi condotte in termini di corde e super-corde: il tentativo di unificare Relatività e Quanta, in tal caso, passa proprio per una riunificazione delle diverse geometrie in questione (in questi ambiti si arriva a parlare di non-localita' dei fenomeni, od ubiquita' delle particelle, nel senso di Sant'Antonio, risolta prendendo come elementi di base dello spazio delle corde-segmenti, invece di punti, credo: poderose sfide intellettuali, che l'intelligibilita' geometrica delle esperienze fisiche di oggi ci impongono).

Di una natura in parte simile, in parte radicalmente diversa, sono i problemi che pone la "geometria del vivente". Innanzitutto, va detto, si tratta di problematiche esplicitate solo molto di recente, se comparate al ... paradosso di Zenone od anche alla geometria degli spazi di Riemann. Per questo motivo, e per limiti di spazio (numero di pagine, dico), rinvio alla bibliografia.

Molto succintamente, la biologia ha permesso in primo luogo di introdurre distinzioni e correlazioni importanti fra spazio "esterno ed interno" all'individuo vivente. Gli spazi della visione, ad esempio, sono un gioco continuo fra i due: ricostruzioni permanenti di clues visivi, esplorazioni di un "andar tastando con lo sguardo" di estrema complessita' (v. [Ninio, 1989], [Maffei, Fiorentini, 1995], [Berthoz, 1997] e mille altri cola' citati). L'immagine, lo spazio non sono affatto "assorbiti" passivamente, bensi' continuamente ricostruiti dalla nostra presenza attiva.

L'analisi matematica della visione come "gestalt visive" sta facendo passi avanti straordinari (v. [Morel, Solimini, 1995]): non esiste immagine visiva senza ricostruzione di una unita' soggiacente, interpretazione e proiezione di uno spazio interno. Filosoficamente, la distinzione fra sensazione e costruzione mentale è sempre più ardua: il gioco fra le due, ricco di storia filogenetica, umana ed ontogenetica, è al cuore della nostra attività di viventi. Grazie alle analisi moderne della visione e del movimento, si sta gradualmente passando da una geometria delle figure (Euclide), ad una dello spazio (da Descartes a Riemann), ad una del movimento e dell'azione (Poincaré e, per l'oggi si veda [Petit, 1997] ed il progetto "Géométrie et Cognition" su web, citato).

Ma l'analisi si arricchisce anche di elementi più fini dello sguardo geometrico alla genetica. Non esiste "codifica" lineare dello sviluppo ontogenetico: l'organizzazione spazio-temporale dell'informazione è cruciale. Le simmetrie, il susseguirsi nel tempo di crescite in una o nell'altra direzione spaziale, contribuiscono alle determinazioni dell'individuo ([Prochiantz, 1997]). L'interazione con lo spazio ambiente, la geometria dell'ecosistema contiene pure informazione essenziale: come spiega Prochiantz, il "programma genetico", nel senso dell'informazione essenziale alla ontogenesi, è nell'interazione, nello spazio e nel tempo, fra individuo ed ecosistema.

Soffermandosi un attimo sul sistema nervoso, i cento miliardi di neuroni del nostro cervello, connessi fra loro con fino diecimila sinapsi ciascuno, vivono una permanente ristrutturazione delle geometrie relative: le sinapsi, fra l'altro, cambiano continuamente posizione, punto di contatto. Non solo, ma l'informazione è pure codificata dalla strutture finissime della comunicazione intersinaptica: le proteine che vengono scambiate trasportano informazione anche sulla base della loro struttura biochimica tridimensionale e, a parita' di componenti, questa contribuisce a determinare l'interazione con gli enzimi, processo cruciale nel vivente. Pensare di codificare questi due soli tipi di strutturazioni delle funzioni cerebrali in stringhe di 0 ed 1, trascurando la geometria dell'interazione, non solo è impossibile per motivi di complessità, ma è concettualmente errato. Un po' come erroneamente, ma brevemente, Cantor penso' che la retta reale possa "codificare" il piano cartesiano: l'informazione è anche nella strutturazione geometrica, come la topologia è nella dimensione cartesiana del piano; in entrambi i casi, la codifica lineare perde esattamente "quel che conta".

Si pensa infatti che la strutturazione geometrica dell'informazione, nel cervello, sia uno degli elementi cruciali alla sua elaborazione, sia al livello locale (struttura delle proteine e plasticita' sinaptica, come dinamica geometrica), sia a livello globale delle "assemblee di neuroni" (v. [Edelman, 1992]).

Soffermiamoci a riguardo, sempre molto sommariamente, sul problema della visione e dell'azione e prendiamo l'esempio di un oggetto in movimento, da catturare. L'immagine dell'oggetto è prima riprodotta bidimensionalmente sulla retina. La velocità e l'accelerazione vi sono rappresentate come allargamento e variazione dell'allargamento. L'immagine è trasmessa, tramite un relais, il corpo genicolato, alla corteccia visiva primaria (V1). La trasmissione coinvolge certamente soglie binarie e codifiche digitali, se si vuole, ma anche le strutturazioni geometriche fini dei collegamenti sinaptici, cui si accennava.

Sulla corteccia primaria, l'immagine lascia in primo luogo una "traccia" dei contorni: esistono esperienze recenti, sconvolgenti, che mostrano l'attivazione "analogica" dei neuroni del V1, proprio lungo linee di contorno, deformati solo dal ruolo focalizzante della fovea (il centro della "messa a fuoco", nella retina). Poi, anche la natura tridimensionale dell'immagine è ricostruita. Con il contributo di segnali ottenuti da saccadi ed altri movimenti oculari, ma anche corporei, lo spessore della corteccia è implicato nell'analisi della profondità e del movimento: la corteccia primaria sembra organizzarsi come "fibrazioni", nel senso geometrico/categoriale del termine (v. [Tondut, Petitot, 1998]), un modo matematico di strutturazione tridimensionale/analogica dell'informazione che ricostruisce la tridimensionalità dello spazio (e che ci permette/suggerisce di considerarlo tridimensionale).

Passiamo allora alla cattura dell'oggetto che soppraggiunge. Se infatti lo si vuole prendere, l'azione presuppone l'organizzazione di un nuovo sistema di riferimento, quello angolare del braccio, misurato da soglie muscolari (v. [Berthoz, 1997]). Un'altra riproduzione analogica del movimento dell'oggetto da catturare, una rappresentazione duale, se necessario. Il cervello integra la pluralità dei sistemi di riferimento e, nel coordinare l'azione, passa dall'uno all'altro: il mondo non è riprodotto centralmente in un sistema di assi cartesiani, con immagini decomposte pixel a pixel. E' costruito/ricostruito come integrazione di una *pluralità di sistemi di riferimento*, gestiti dinamicamente. In alcun modo il cervello sembra comportarsi come una base di dati digitale, bensi' sembra utilizzare esplicitamente la strutturazione geometrica dell'informazione: per questo la sua analisi matematica, geometrica, deve divenire parte essenziale dell'analisi dell'intelligenza umana.

Con un altra provocazione contro il funzionalismo, si potrebbe dire che (quasi) tutta l'intelligenza del gesto di cattura di un oggetto è nel gioco delle codifiche e rappresentazioni, è cioè tutt'altro che indipendente da codifica: anzi che l'intelligenza, in tal caso, forse *non è che* nel passaggio della simulazione dell'evento dalla retina al braccio, attraverso mille codifiche intermedie, analogiche/digitali/biochimiche ... , forse è "solo" nella codifica (geometrica) *nel vivente* del fenomeno fisico.

"Nel vivente", perché questo è il punto. L'uomo che vuole prendere l'oggetto è ricco di intenzionalità, che entra in gioco fin nella scelta del tipo di analogia. Ed è questo l'ulteriore ruolo della struttura della rappresentazione: a differenza della "fedelissima" rappresentazione digitale, pixel per pixel, propria ai calcolatori elettronici, la rappresentazione analogica, in particolare nel vivente, sulla cellula, nel sistema del corpo, è già una scelta intenzionale, sia essa precosciente. Infatti, l'analogia "sceglie" di rappresentare/codificare quel che interessa (i soli contorni, la velocita' o variazione di profondita' relativa ...).

Con questo cenno all'intenzionalità ed ai suoi mille livelli, dal precosciente al cosciente, un problema enorme, chiudo questa frettolosissima sezione, sperando solo di aver stimolato il lettore ad andar oltre scorciatoie che pretendono di codificare l'intelligenza umana in stringhe di 0 ed 1, e dimenticano, in primo luogo, l'essenziale incompletezza di tali rappresentazioni anche per i limitati scopi della fondazione della matematica. Quando poi si vuole parlare non solo di concettualizzazioni compiute e specifiche, quali la matematica, ma anche della pluralità delle forme di intelligenza che caratterizzano l'uomo, per di piu' immerso nella rete dell'intersoggettivita' e, quindi, nella storia, l'analisi di contesti intenzionali, nello spazio e nel tempo, diviene ineliminabile. E questa è una sfida interdisciplinare di grande rilievo cui la matematica moderna e la riflessione sui suoi fondamenti puo' ancora una volta contribuire, purché sappia porsi accanto a discipline che studino l'uomo in quanto essere vivente e vivente nella storia.

Bibliografia

(Il manifesto/progetto "Géométrie et Cognition", nonché versioni preliminari o riviste degli articoli dell'autore sono downloadable da http://www.di.ens.fr/users/longo)

Asperti A., Longo G. **Categories**, **Types and Structures**, M.I.T. Press, Boston, 1991.

Barendregt H. **The lambda-calculus: its syntax, its semantics**, North-Holland, revised edition, Amsterdam, 1984.

Barwise J., Moss L., **Vicious Circles: on the mathematics of non-wellfounded phenomena**, CSLI Lecture-Notes 060, Stanford Univ. 1996.

Berthoz A. **Le sens du mouvement**, Od. Jacob, Paris, 1997 (trad. italiana presso Boringhieri). (Recensione/articolo downloadable da http://www.di.ens.fr/users/longo.)

Boi L. **Le problème mathématique de l'espace**, Springer, Berlin-Paris, 1995.

Cellucci C. **Le ragioni della Logica**, Laterza, Bari, 1998.

Chatelet G. **Les enjeux du mobile**, Seuil, Paris, 1993.

Connes A. **Géométrie non-commutative**, Vrin, Paris, 1990.

Dehaene S. **The Number Sense**, Oxford UP, Oxford, 1998. (Recensione/articolo downloadable da http://www.di.ens.fr/users/longo.)

Edelman G. **The matter of Mind**, Basic Books, New York, 1992.

Enriques F. **Problemi della Scienza**, Zanichelli, Bologna, 1906.

Enriques F. **Memorie Scelte di Geometria, vol.II, 1898-1910**, Zanichelli, Bologna, 1959.

Frege G. "On a geometrical representation of imaginary forms in the plane", in **Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy**, Oxford, Oxford UP, 1984.

Frege G. **The Foundations of Arithmetic**, New York, Evanston, 1950.

Frege G. "Methods of calculation based on an extension of the concept of magnitude", in **Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy**, Oxford, Oxford UP, 1984.

Fowler D. **The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction**, Oxford, Oxford UP, 1999.

Gödel K., Nagel E., Newman J., Girard J.-Y. **Le théorème de Gödel**, Paris, Seuil, 1989.

Goldfarb W. "Poincaré Against the Logicists" Essays in the History and Philosophy of Mathematics, in W. Aspray and P.Kitcher (eds.), **Minn. Studies in the Phil. of Science**, Minneapolis, Univ. of Minnesota Press, 1986.

Harrington L. et al. (eds) **H. Friedman's Research on the Foundations of Mathematics**, Den Hague, North-Holland, 1985.

Herken R. **The Universal Turing Machine**, Berlin, Springer-Verlag, 1995.

Hertz J., Krogh A. and Palmer R. **Introduction to the Theory of Neural Computation**, 1991.

Hindley R., **Basic Simple Type Theory**, Cambridge, Cambridge UP, 1997.

Hilbert, **Les fondements de la géométrie**, 1899 (trad. fran., Dunod, 1971).

Husserl E. **Chose et espace**, 1907 (trad. fran., PUF, Paris, 1962).

Husserl E. **L'origine de la Géométrie**, 1936 (trad. fran., PUF, Paris, 1962)

Iversen B. , **An invitation to geometry**, Aarhus University Press, Aarhus, 1989.

Lassègue J., **Alan Turing**, PUF, Paris, 1998.

Lobachevskij N. **Nouveaux principes de la Géométrie**, 1856 (trad. italiana di L. Lombardo-Radice, Einaudi, Torino, 1955).

Longo G. "Mémoire et Objectvité en Mathématiques", **Le Réel en Mathématique**, colloque de Cérisy, 1999 (à paraître).

Longo G. "The mathematical continuum, from intuition to logic" in **Naturalizing Phenomenology: issues in comtemporary Phenomenology and Cognitive Sciences**, (J. Petitot et al., eds) Stanford U.P., Stanford , 1999.

Longo G. "Mathematical Intelligence, Infinity and Machines: beyond the Gödelitis" **Journal of Consciousness Studies**, special issue on Cognition, vol. 6, 11-12, 1999a.

Maffei L., Fiorentini A. **Arte e Cervello**, Boringhieri, 1995.

Morel J-M., Solimini S. **Variational Methods in Image Segmentation**, Berlin, Birkhäuser, 1995.

Ninio **L'empreinte des sens**, Odile Jacob, Paris, 1989.

Petit J.L. (ed.) **Les neurosciences et la philosophie de l'action**, Vrin, Paris, 1997.

Petitot J. "Objectivité faible et philosophie transcendantale", dans **Physique et Réalité**, M. Bitbol, S. Laugier (eds), pp. 201--236, Diderot, Paris, 1987.

Philosophy of Computer Science, special issue of **The Monist** (G. Longo ed.), vol. 82, n.1, Jan. 1999.

Poincaré H., **Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste**, Flammarion, Paris, 1892.

Poincaré H. **La Science et l'Hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902.

Poincaré H. **La valeur de la Science**, Flammarion, Paris, 1905.

Prochiantz A. **Les anatomies de la pensée**, Odile Jacob, Paris, 1997. (Recensione/articolo downloadable da http://www.di.ens.fr/users/longo.)

Riemann B. "On the hypothesis which lie at the basis of geometry", 1854 (english transl. by W. Clifford, **Nature**, 1873; trad. italiana di R. Pettoello, Boringhieri, 1999).

Riemann B. **Oeuvres Mathématiques**, intro. by F. Klein, trad. par C. Hermite, Paris, 1968.

Tappenden J. "Geometry and generality in Frege's philosophy of Arithmetic" **Synthese**, n. 3, vol. 102, March 1995.

Tondut Y., Petitot J. Géométrie de contact et champ d'association dans le cortex visuel", preprint, CREA, Polytechnique, Paris, 1998.

Zellini P. **Breve Storia dell'Infinito**, Boringhieri, Torino, 1980.

Weyl H. **Das Kontinuum**, 1918 (trad. italiana di B. Weit, Bibliopolis, Napoli, 1977).

Weyl H. **Raum, Zeit, Materie**, 1919 (english transl.: Dover, New York, 1952).

Weyl H. "Comments on Hilbert's second lecture on the foundations of mathematics." [1927] *in* van Heijenoort J., **From Frege to Gödel**, Harvard Univ. Press, Boston, 1967.

Weyl H. **Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences**, 1927 (english transl., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1949).

Weyl H. **Symmetry**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.