*Francis Bailly*
**Physique, CNRS, Meudon**
bailly@cnrs-bellevue.fr

*Giuseppe Longo*
**Labo. d'Informatique, CNRS – ENS et CREA, Paris**
http://www.di.ens.fr/users/longo

# Incomplétude et incertitude en Mathématiques et en Physique[1]

À **Gilles Châtelet**
et à **Giulio Preti**
pour leur rationalisme critique, imprégné d'humanisme
et de sens de l'histoire

## Introduction

Ce texte naît d'une réflexion commune sur des sujets mathématiques et physiques qui, bien que relativement techniques, présentent des enjeux philosophiques importants. En fait, le problème épistémologique de la complétude des théories formelles et des théories physiques, ainsi que le «principe d'incertitude» en Mécanique quantique sont au cœur de toute philosophie des sciences. Or non seulement celle-ci a fait l'objet d'un intérêt majeur de la part des deux auteurs auxquels est dédié cet article, mais, plus encore, leur travaux nous permettent d'étayer le point de vue que nous allons mettre à l'avant par la suite. Construire l'objectivité scientifique nous semble en effet être la visée essentielle de la réflexion épistémologique de Preti comme de Châtelet : l'un et l'autre visant une construction qui se nourrit de l'histoire humaine et qui, par cela même, engendre une connaissance efficace et valide.

On renverra tout au long de cet essai au volume de Gilles Châtelet [Châtelet, 1993] dont les passages sont plus étroitement liés aux sujets abordés. Cette introduction se propose en revanche de reprendre quelques thèmes développés par Giulio Preti et qui représentent un arrière-fond philosophique commun aux réflexions plus spécifiques qui la suivent.

Parmi les thèmes communs à Preti et Châtelet, on trouve le geste et l'action. Pour Preti, c'est l'action qui constitue la connaissance — et, inversement, «hypothèses, théories et concepts scientifiques sont des *instruments* de l'action»[2]. Preti se situe sur la lignée de John Dewey lorsqu'il fait remarquer que la connaissance (comme «vérification») «est le processus à travers lequel la proposition est construite comme vraie», puisqu'il faut remplacer la notion de «vrai» par celle de «vérifié», une notion qui «ne préexiste pas à la vérification ; au contraire, elle en dépend comme résultat» .

L'engagement de Preti contre le mythe des catégories abstraites (voire absolues) telles que «vérité» ou «fait empirique» apparaît évident : celles-ci doivent être remplacées par la description d'un processus opérationnel. «Les principes logiques eux-mêmes — pour le rationalisme, l'*a priori* de tous les *a priori* — n'échappent pas à cette conception : ils ont aussi émergé tout au long de l'expérience millénaire du genre humain comme des formes très générales d'assertibilité garantie, comme des règles (donc pratiques, instrumentales) que le

---

[1] Publié dans Paolo Parrini & Luca M. Scarantino (eds), **Il pensiero filosofico di Giulio Preti**, Guerini & associati, Milano, 2004. A paraître aussi dans un volume en mémoire de Gilles Châtelet (C. Alunni ed), Presses de Rue d'Ulm, Paris, 2005.

[2] Toutes les citations de cette section sont tirées de [Preti, 2002].

discours doit respecter». Or une telle «historicité n'est pas uniquement dans le devenir de la pensée : elle est immanente, présente et opérante dans le moindre moment de l'expérience». Car l'expérience est «un rapport actif avec les données» – elle «n'est pas seulement sentir ou percevoir, c'est aussi tendre et désirer, relier et évaluer». Et d'ailleurs, «toute la connaissance est expérience ; mais non l'inverse. L'expérience (…) coïncide avec le rythme même de la vie» et ne devient connaissance que lorsqu'elle est recherche, c'est-à-dire lorsqu'elle est «repensée dans la pensée conceptuelle». On retrouvera ce même sentiment de construction de la connaissance et recherche de l'assertibilité dans les deux pratiques scientifiques abordées en parallèle dans les deux parties de cet essai : les Mathématiques et la Physique – de même qu'on y retrouvera le même «rapport actif aux données».

Nous voici maintenant confrontés à un slogan, au sens le plus positif du terme : l'une de ces remarques qui permettent de caractériser une philosophie. Pour Preti, *les idées sont des plans d'action* : elles «ne sont pas des objets d'une *théorie*, mais des *plans d'action*, des invitations à l'action selon un cadre opérationnel spécifique». Ce même sentiment actif de la connaissance, ce trait si humain de l'effort cognitif en friction avec le réel (ce qui est propre à la connaissance scientifique), on le retrouve dans le «geste» de Châtelet. C'est la fatigue des hommes organisant le réel pour le rendre intelligible, incarnant des expériences aussi diverses que le cours de l'histoire et qui incluent l'expérience de notre socialisation. En fait, Preti n'oublie pas d'insister sur la dynamique historique qui a vu naître la pensée scientifique, et les Mathématiques en particulier, là où le débat rationnel est devenu le véhicule du pouvoir politique, dans la «démocratie» grecque. La discussion dans l'espace de l'agora permet d'isoler ces passages du raisonnement qui, en rien absolus, peuvent néanmoins être proposés comme «universels» à la rationalité humaine, et devenir ainsi praxis scientifique.

La construction historique doit bien évidemment être comprise au sens large, non «sociologique» mais constitutif de connaissance historique – un niveau qu'on atteint par oscillations, prospections, tâtonnements : des marches qui construisent l'objectivité puisque le réel, qu'ils organisent, les canalise de façon dynamique. C'est une histoire qui remonte loin, jusqu'à l'aventure évolutive de l'homme, permettant ainsi de comprendre, comme le dit Jean Petitot à propos de Preti [Petitot, 2002], que «des a posteriori 'phylogénétiques' fonctionnent comme a priori 'ontogénétiques'». L'action visant à isoler des régularités dans le monde commence avec notre expérience animale et se prolonge jusqu'à cette forme constitutive de connaissance que nous appelons Mathématiques, lieu maximal de stabilité et d'invariance conceptuelle. C'est bien ce sentiment d'une construction objective qui se fait jour au cours de l'Histoire qui permet, nous dit Preti, d'exorciser le phantasme de l'absolu et, à la fois et par cela même, de faire disparaître celui du scepticisme.

On peut bien sûr se demander dans quelle mesure le fait de concevoir l'épistémologie comme analyse d'une genèse n'ait pas les traits d'une analyse fondationnelle, en Mathématiques comme en Physique. Depuis Frege, on a voulu disjoindre l'analyse des fondements, visant essentiellement à envelopper les Mathématiques en un tissu de certitudes absolues, de l'analyse des «origines» au sens où on la retrouve, par exemple, chez [Husserl, 1933]. Preti et Châtelet visent en revanche à réaffirmer le caractère «fondateur» de l'analyse à l'intérieur d'un parcours humain, de l'action et du geste qui constituent la connaissance. Il faut dépasser la distinction traditionnelle entre *fondements* et *reconstruction d'une genèse*, au sens de Husserl, car la certitude scientifique, donc son fondement, réside dans la capacité d'expliciter les choix et les méthodes cognitifs auxquels on fait appel (y compris leur dynamique historico-constitutive), le système de référence (physique et conceptuel), les instruments de mesure et d'accès au réel. Pour parvenir à construire des objectivités dans les sciences, il faut savoir fixer et expliciter ces paramètres tant au niveau conceptuel qu'au niveau de la praxis, empirique comme déductive. On verra que la Physique quantique nous apprend, plus que toute autre discipline, l’importance de cette explicitation et le rôle paradigmatique pour le fondement de la connaissance scientifique qu’elle peut jouer.

## Partie I. Le geste dans la preuve : l'incomplétude mathématique des formalismes et les fondements cognitifs des mathématiques (par G. Longo).

### I.1 Les machines, le corps et la rationalité

Depuis un siècle, des hordes de suites finies de signes sans signification hantent les espaces des fondements mathématiques et de la cognition, voire les espaces de la rationalité. Des règles, elles aussi suites finies de suites finies de signes, les transforment en d'autres suites sans signification. Parfaites et certes, les une et les autres, elles prétendent transformer le rationnel dans le rationnel, elles se posent en paradigme de la rationalité, car en fait *la rationalité humaine* est dans la machine, la certitude est dans la machine qui manie ces suites. Le "sequence-matching" règne incontesté : quand une suite colle parfaitement à la suite en prémisse de l'une de ces règles (la première sous la main, à la Turing), elle est transformée en ses conséquences logico-formelles, et voilà appliqué le pas élémentaire du calcul. Ce pas est certain car il est "hors de nous" ; sa certitude est indépendante de notre action dans le monde, elle est due à sa potentielle ou effective mécanisabilité.

Tout cela est bien formidable lorsqu'on pense à la transmission et à l'élaboration des données digitales, mais, pour ce qu'il en est des fondements des mathématiques (et de la connaissance), c'est une attitude schizophrène qui se répète. L'homme qui a inventé la roue, dans l'enthousiasme de son invention de génie, a sûrement déjà dit « mon mouvement, le mouvement est là, *dans la roue* ... la roue est complète : on y va partout » (or la roue est formidable, mais dès qu'il y a une marche ...) ; et il croyait ainsi placer ou retrouver, hors de soi-même, son propre mouvement. C'est ainsi que le levier et la catapulte deviennent le paradigme du bras et de son action (Aristote). Les engrenages et les cordes des horloges coïncident avec les mécanismes du corps, y compris ceux du cerveau (Descartes) ; et la contraction des muscles est comme la contraction des cordes mouillées (les iatro-mécaniciens cartésiens du XVIIe siècle, voir [Canguilhem, 2000]).

Mais, on nous explique, la dernière machine, l'ordinateur, a été inventée en se référant à l'homme et à sa pensée, tandis qu'il n'a peut-être pas été ainsi pour le levier et la catapulte ou les mécanismes à horlogerie et leurs ressorts, qui ne ressemblent point à nos propres rouages corporels. Voilà l'argument fort du formaliste : cette fois, nous avons d'abord transféré dans le "potentiellement mécanisable" la preuve mathématique (Peano, Hilbert), en fait la rationalité humaine, ensuite les ingénieurs ont produit, sur ces bases, la machine. Cette fois, elle dérive de notre modèle de la raison : rien à voir avec la roue, la catapulte et les horloges, qui ont été "plaquées" de l'extérieur sur l'homme. (Mais le levier et la catapulte ne simulent-ils pas - ou étendent - le bras humain ?). Il s'agit d'un argument fort, du point de vue de l'histoire, mais qui laisse cette fonctionnalité de l'homme, en fait de l'animal, son intelligence, en dehors de lui-même, de son propre corps, de son cerveau, de son vécu, de son expérience active du monde. Et la schizophrénie reste. Elle a tout simplement précédé (et permis) l'invention de la machine, l'ordinateur : elle est en amont, dans le paradigme de la déduction mathématique, voire de la cognition, car l'homme, dans le geste minimal (élémentaire et simple) de la pensée, transcrirait des suites finies sans signification, dans des suites finies sans signification (de Peano à Turing, voir [Longo, 2002/2]; certains font aussi référence à Hobbes et Leibniz).

Mais, où se trouve cet "human computer" dont l'action élémentaire de pensée serait si simple? Quant au cerveau, l'activité du moindre neurone est d'une immense complexité : les neurones ont des tailles très différentes, ils déclanchent des importantes cascades biochimiques à l'intérieur et à l'extérieur, ils changent de formes et de structure de champ électrostatique ; de plus, leur activité n'est jamais isolée de celle d'un réseau, d'un contexte de signification, du monde. En fait, pour ce qui en est de "la pensée", quand nous passons d'une phrase à une autre, par la plus simple des déductions (un "si … alors ... " disons), nous ne faisons pas du sequence-matching, mais nous déplaçons et déformons des immenses réseaux de signification. La machine avec ses portes logiques très simples, avec son logiciel construit sur des primitives encore plus simples, peut seulement essayer d'imiter, fonctionnellement, nos activités cognitives, surement pas de les modéliser, dans le sens physico-mathématique, c'est-à-dire de reconstruire un cadre mathématique et/ou artificiel qui reproduit les mêmes principes constitutifs de l'objet visé. Et, même l'imitation fonctionnelle, on la reconnaît facilement[3].

En revanche, quelques rares calculs algébriques demandent des procédés purement mécaniques ; ce sont ces calculs, qui, justement, isolés des contextes et de la signification, sont la mort des mathématiques, de leur sens, de leur richesse expressive.

### I.2 L'amibe, la motricité et la signification

Quoi d'autre ont en commun les horloges, les formalismes et les ordinateurs? Tous nos artefacts sont en fait constitués de composants élémentaires *et* simples : on met ensemble des rondelles et des cordes, des suites de 0 et 1, des portes logiques individuellement très simples et on les compose dans des constructions énormes, qui atteignent parfois une très grande complexité. Car la complexité est le résultat d'une construction, qui encastre et superpose des éléments constitutifs d'une extrême simplicité : c'est ça la force de la construction artificielle, sa reproductibilité, son accessibilité (on peut la démonter composant par composant). Au contraire, la composante biologique élémentaire, la cellule, est extrêmement complexe : elle contient déjà toute la complexité objective du vivant; elle est élémentaire car, si on la découpe, elle n'est plus vivante[4].

La contraposition de l'artificiel au naturel que l'on vient d'esquisser, en référence à l'élémentaire *et* simple des artefacts par rapport à l'élémentaire *et* complexe des phénomènes naturels, est au cœur de nos analyses : on la retrouvera dans la complexité des symboles du langage, de la cellule vivante, des cordes en physique quantique. À chaque niveau phénoménal, dans cette classification en trois niveaux, grossière mais riche d'histoire, de la façon par laquelle le monde se présente à nous, l'élémentaire paraît extrêmement complexe□ peut-être le plus complexe de ce réel, sûrement la plus difficile à comprendre.

De plus, la cellule, comme l'amibe, change à l'intérieur ainsi que dans ses rapports avec l'extérieur ; elle bouge. Et cela est essentiel au vivant, à partir de son action dans l'espace, jusqu'aux phénomènes cognitifs, car « la motricité est l'intentionnalité originaire » [Merleau-Ponty, 1945]. Or, dans notre opinion, la signification est *constituée* par l'interférence d'un signal avec un geste intentionnel, soit-il "originaire". Par ce biais, le geste, qui commence par l'action motrice, enracine la signification entre nous et le monde, à l'interface entre les deux. Le signal chimique, thermique ... qui affecte l'amibe ou la cellule est "signifiant" pour ce vivant, par rapport au changement intérieur en cours, à son action, à son mouvement. Le neurone, auquel arrive la décharge synaptique qui déforme sa membrane et son champ électrostatique, réagit par une cascade biochimique, par une déformation ultérieure de son champ électrostatique, bref par une action, un geste à son niveau, par sa motricité interne et externe. L'unité vivante minimale, élémentaire, est préservée, pendant que l'action en cours est modifié par le signal (tout neurone, comme tout vivant, est toujours en train d'agir). Cette modification est à l'origine de la signification, une thèse déjà esquissée dans [Longo, 2003]. Bien évidemment, le réseau de neurones aussi se modifie, et le réseau de réseaux, et le

---

[3] La distinction imitation vs. modélisation est inspirée par [Turing, 1950] et explicitée dans [Longo, 2002/2], où l'on discute des limites de l'imitation à la Turing.

[4] Cette comparaison artefact-vivant est faite dans [Bailly, Longo, 2003] et introduit une analyse de la complexité biologique.

cerveau, dans un corps qui change. C'est l'activité modifiée de cet enchevêtrement et couplage énormément complexe de niveaux d'organisation qui rend signifiante la friction du vivant au monde. Le résultat est non-additif, voire non-compositionnel (on ne peut pas le reconstruire en composant les significations élémentaires "morceaux par morceaux"), car il demande l'activité de tout le réseau. La perception elle-même est enfin la différence entre une prévision active et un signal (une analyse qui va de [Merleau-Ponty, 1945] à [Berthoz, 1997]). Pour cette raison, la perception mène à la signification : elle dépend de la prévision, qui est une action et accompagne toute autre action ; elle est le résultat d'une interférence entre un signal et une action, l'anticipation.

Et, pour l'homme, la signification requiert l'action dans une communauté communicante, l'interaction avec les autres dans la culture symbolique, riche de langage, de gestes et d'évocations. L'intentionnalité permet donc la signification, à partir de l'intentionnalité originaire, la motricité. Cette même intentionnalité qui enveloppe tout objet de pensée, en tant que "visée". Le "geste", dans le sens de Gilles Châtelet, dont on parlera, en fait aussi partie.

### I.3 L'abstrait et le symbolique ; la rigueur

Par ce parcours constitutif, enchevêtré et complexe dès son origine - une origine qui est dans l'action du vivant - on parvient donc à cette culture symbolique qui est la nôtre. Ses symboles sont signifiants, ils renvoient au monde, ils sont en résonance avec le monde. Chaque symbole, chaque phrase a une "longueur de corrélation" énorme dans l'espace du présent et de l'histoire. Et l'espace des corrélations est presque un fait physique : voilà pourquoi nous utilisons ce terme emprunté de la physique. Cette longueur décrit la distance possible des liens causaux : chaque mot est corrélé, presque physiquement, à un ensemble énorme d'autres mots, actes, gestes, moments vécus, par un individu, par toute une communauté. Ces liens constituent une “variété” dans l'espace et le temps, dans un sens mathématique de variété, car on pourrait lui donner une structure (et l'on commence à le faire, par les analyses modernes des espaces de signification, voir [Victorri, 2002]). Aucune métaphysique de l'ineffable, mais la réalité concrète, matérielle et symbolique, de la complexité phylogénétique, ontogénétique et culturelle de l'homme e de son langage (voir aussi [Cadiot, Visetti, 2001]). Et cela nous éloigne très nettement de la “pensée comme calcul formel”.

Le symbole est donc une expression synthétique des liens de signification. Il se matérialise dans le signe linguistique mais aussi dans le geste, en tant que mouvement et posture du corps. Les deux peuvent être élémentaires, composants minimaux de l'expression humaine, mais ils sont très complexes, car chaque signe signifiant, chaque geste, en fait chaque posture du corps est le résultat d'un parcours évolutif très long et synthétise tout ce parcours. Encore une fois, donc, le composant élémentaire d'une phénoménalité naturelle, le symbole minimal signifiant de la communication intersubjective est très complexe ; communication humaine et animale, car le geste et la posture du corps font partie de l'expressivité des animaux.

Or, le symbole linguistique de l'homme est aussi un geste évoqué. Et il n'y a pas, dans l'interaction chez le vivant, un signe sans signification. Mais ces significations sont reliées à la pertinence et peuvent être multiples : la polysémie est au cœur des langues et participe de la richesse et de l'expressivité de la communication ([Fuchs, Victorri, 1996]). Cela est-il compatible avec les mathématiques? On en parlera, car les mathématiques sont symboliques.

Mais les mathématiques sont aussi abstraites. Un autre immense enjeu cognitif. Cette abstraction qui commence par les catégorisations du réel propres au système nerveux de tout animal (voir [Edelman, Tononi, 2000]), encrées sur l'indépendance par rapport à la modalité sensorielle, voire sur la multimodalité de la boucle sensori-motrice ([Berthoz, 1997]). Les concepts de nos cultures en sont l'expression organisée, construite dans l'échange intersubjectif, dans le langage, qui stabilise l'expérience et la catégorisation commune, faite dans l'histoire. L'abstraction mathématique en fait partie, mais elle se singularise, tout comme leur symbolisme.

Les mathématiques enfin sont rigoureuses. La rigueur de la preuve est une rigueur conquise dans une pratique difficile. Elle commence dans l'agora grecque, où la cohérence du raisonnement mène le débat politique, où une esquisse de démocratie fait naître la science, et les mathématiques en particulier, en tant que lieux maximaux du raisonnement convaincant. La rigueur est dans la stabilité de la preuve, dans ses régularités qui peuvent être itérées. La logique (mathématique) est l'ensemble des *invariants de la preuve*, c'est-à-dire des structures qui "passent" d'une preuve à l'autre ou qui sont préservées par des *transformations* de preuves. La logique ne précède pas les mathématiques, elle les suit : elle est le résultat distillé d'une praxis, celle de la preuve. La logique est dans la structure de l'argument mathématique, elle est constituée par ses régularités maximalement stables. Bien évidemment, il a fallu la distiller d'une pratique qui n'a pas toujours été parfaite : pensons à la richesse et à la confusion d'une bonne partie des mathématiques du XIXe siècle. Il fallait imposer des normes : on ne savait même pas ce que c'était que de donner une bonne définition ; certains en faisaient usage (Weiestrass), d'autres, pas moins grands, confondaient l'uniforme continuité avec la continuité (Cauchy). La réponse formaliste de la rigueur parfaite en tant que formelle était peut-être nécessaire. Et seulement aujourd'hui on est enfin en train de mettre en évidence la logique dans la structure de la preuve, [Girard, 2001], et l'on écarte le sequence-matching, la superposition mécanique de suites de signe, moteur de tout formalisme[5].

Donc les mathématiques sont symboliques, abstraites, rigoureuses, il est évident. Mais elles constituent une singularité dans la communication humaine qui participe de ces propriétés, car elles sont *le lieu de la stabilité conceptuelle et de l'invariance maximale*. C'est-à-dire, aucune forme d'expression humaine n'est plus stable et invariante par rapport aux transformations de sens et de discours. Quand on donne une définition en mathématiques, elle reste. La stabilité interdit la polysémie (mais non pas le sens). On impose l'invariance à la preuve. Cette maximalité peut même constituer une définition des mathématiques : dès que l'on est maximalement stable et conceptuellement invariant dans l'expression, on est en train de faire des mathématiques. Mais attention, nous disons "maximal", non pas "maximum", car nous fuyons les absolus. De plus, on ne peut cesser de le dire, les mathématiques font partie de la communication humaine et des instruments que l'homme s'est donné pour organiser et rendre intelligible le monde.

Donc elles sont symboliques, abstraites, rigoureuses. En essayant de sortir de la confusion richissime du XIXe siècle, des « visions les plus sauvages de *délire* » que proposaient les modèles des théories non-euclidiennes ([Frege, 1884, p. 20]) ainsi que de quelques antinomies linguistiques mineures, il fallait proposer un paradigme fort, voire trop fort, pour clarifier : celui de l'arithmétique finitaire comme essence du monde, système logique - ou formel, pour l'école hilbertienne. Réponse courageuse au désordre et à la richesse conceptuelle et pratique des mathématiques de l'époque. Mais réification, parodie presque, de ce qui est symbolique, abstrait, rigoureux de façon maximale, les mathématiques. Une caricature de ces trois piliers

---

5 Par exemple, l'interprétation formaliste et l'application par ordinateur du "modus ponens", "*de* A *et* A□ B *déduit* B", c'est-à-dire sa "sémantique opérationnelle", consiste seulement à contrôler mécaniquement que la suite finie de signes (de 0 et 1) qui encode le premier A est identique à celle qui encode le deuxième A, *alors* écrit, copie en fait, B (c'est ça le "sequence-matching", qui est tout ce que se faire un ordinateur digital, modulo des procédures de "unification syntactique" très simples). Dans les systèmes récents de Girard, on garde seulement la structure géométrique de la déduction (un branchement, pour être bref, dans ce cas), qui ne départage pas syntaxe et sémantique et qui peut gérer, comme nos raisonnements, des réseaux de signification.

de la cognition humaine, le symbolique, l'abstrait, le rigoureux. Ces trois notions, qui sont d'ailleurs fort différentes entre elles, ont été ainsi toutes identifiées, par le formalisme, avec une seule notion, bien plate, celle de formel, en tant que "suite finie de signes sans signification maniée par des règles potentiellement mécanisables"; maniées par ces règles formelles, très simples, comme celle qui change un 0 par un 1 (ou le contraire), un à la fois, dans la machine de Turing. Bref, les identités

symbolique = abstrait = rigoureux = *formel*,

du point de vue de la cognition humaine, constituent apothéose de la pensée simpliste, voire une pensée de la seule mécanique.

Cette fois donc, la théorisation schizophrène précède la machine, dans la simplicité de ses mécanismes élémentaires et des composantes élémentaires de ses langages de programmation. En fait, elle a permis de les inventer : jusqu'à présent, pour construire des artefacts, il faut savoir se donner des briques constitutives très simples. Et la théorie formelle de la calculabilité des années '30 est la fille directe de cet effort d'aliénation de la pensée, hors de l'homme dans son animalité et son vécu historique. Une fois que la machine mathématique est en place (Church '32, Turing, '35 entre autres), elle engendre la machine électronique, programmable, réalisation pratique par von Neuman et Turing (fin des années '40) de la grande invention mathématique de Turing. Peut-être, sans en être un modèle, elle peut même gagner dans le jeu de l'imitation avec un cerveau humain, dira Turing plus tard ([Turing, 1950], voir [Longo, 2002/2] pour une reflexion sur ce texte remarquable). Parodie de la cognition, ces machines sont en train de changer le monde, tout comme, une fois rangés dans un musée le canard et le pianiste de Vaucanson, les engrenages des horloges, poussés par la vapeur, ont permis de construire les machines de cette grande industrie qui a changé la production des biens ainsi que nos sociétés, il y a deux siècles, sans plus essayer d'imiter l'homme.

### I.4 De la réaction platonicienne au "geste"

Bien évidemment pas tous se sont accommodés à cette folie réifiante, le formalisme et ses formidables machines. Gödel, tout d'abord, mais presque tous les grands mathématiciens qui l'ont suivi, de MacLane et Wigner jusqu'à René Thom ou Alain Connes (von Neumann est peut-être la seule exception) ont réagit en se réfugiant dans un platonisme plus ou moins naïf. Les concepts et structures des mathématiques sont "déjà là", il faut les découvrir, les voir (en fait, ces grands "les voient", bien avant la preuve, et cela fait partie de la pratique de tout mathématicien, une performance cognitive à étudier, sans en faire une ontologie). Parfois, et avec une grave incompréhension du théorème lui-même, les arguments ont fait référence au premier théorème d'incomplétude de Gödel, en déclenchant une sorte de "gödelite" qui n'a pas encore disparu des pathologies de la philosophie des mathématiques ([Longo, 1999a]).

Il faut maintenant retrouver le sens dans la preuve, dans l'acte de la déduction, comme veulent aussi les platoniciens, mais sans une ontologie préexistante. Reconstruire le parcours constitutif des mathématiques, en tant qu'analyse de leurs fondements cognitifs, à partir de l'action et du geste qui engendrent la signification chez l'homme, comme l'on vient d'esquisser. Cette approche bien évidemment remplace, en mathématique et en science de la nature, la notion de "vérité ontologique" par celle de *construction de connaissance*, résultat ultime de l'activité cognitive humaine, ainsi que, grâce à cette activité sur le réel, par celle de *construction d'objectivité*. Notre entreprise fait partie de ce projet ; celle de J.-Y. Girard en est la pointe avancée pour ce qui concerne la preuve. Dans l'approche que nous partageons, un rôle non moindre a été joué par nos expériences dans le lambda-calcul, [Church, 1932-33 et 1940]. Malgré son origine formelle, le lambda-calcul encode la preuve d'une façon très structurée[6] : il en préserve l'organisation et se différencie très nettement, par ce biais, des codages nécessaires pour réduire la déduction formelle aux pas élémentaires des Machines des Turing ou des autres systèmes pour la calculabilité. Ces derniers codages détruisent l'architecture de la déduction et en font perdre totalement le sens. Les arbres de Böhm (et même leur moindre variante, les arbres de Levy-Longo, voir [Longo, 1983] ou tapez "Böhm trees" ou "Levy-Longo trees" sur Google) donnent une structure au lambda-termes autrement trop plats. C'est à partir du lambda-calcul que Girard a proposé ses approches qui mettent en évidence la géométrie de la preuve et ces régularités qui gèrent et transforment le sens (voir [Girard, 2001]). Mais l'ombre des méthodes et des philosophies formalistes de Church et Curry ([Curry et al., 1968 et 1972], [Seldin, 1980]]) en est désormais bien lointaine.

Une géométrie de la preuve rigoureuse, donc, qui côtoie l'analyse cognitive que l'on propose de la constitution des concepts et des structures abstraites et symboliques des mathématiques. Or, ces derniers organisent l'espace et le temps, tout d'abord. Et le geste, en tant qu'action élémentaire, mais complèxe, du vivant, est à l'origine de notre rapport à l'espace, de nos tentatives de l'organiser, de la géométrie, donc. Dans ce sens il faut lire Poincaré : le geste et le mouvement qui "évaluent une distance" (voir les nombreuses citations dans [Berthoz, 1997]). On réfléchira maintenant à un autre geste, très ancien, la saccade oculaire consciente, qui trace la ligne de poursuite du prédateur, [Berthoz, 1997].

La mémoire de ce geste est une toute première expérience vers une abstraction mathématique très importante. Elle est une expérience animale "abstraite" car elle est la *mémoire d'une prévision*, la prévision d'une ligne qui n'est pas là et que la mémoire détache de son contexte – la mémoire animale est "forgetful" (oubliante), sa propriété la plus importante : elle oublie ce qui n'est "pas important", ce qui n'est pas l'objet d'intentionalité, d'une visée cosciente ou inconsciente. Mémoire, donc, d'une ligne continue et sans épaisseur, car ligne qui n'est pas là, pure trajectoire, pratique *pré*-conceptuelle des lignes d'Euclide, de nos lignes paramétrisées sur les nombres réels, [Longo, 1997 et 1999]. Voilà l'un des piliers constitutifs de ce parcours de construction de connaissance, dont on parle ici : il va de la mémoire abstraite, catégorisante du prédateur, mémoire de sa propre action dans l'espace (voire de sa prévision), jusqu'à notre concept abstrait, mathématique, rigoureux de ligne continue, donné dans le langage. Mais le sens de cette construction conceptuelle, organisative de l'espace (et de la connaissance), a son origine dans le tout premier geste du prédateur, dans son intentionnalité originaire, dans sa friction signifiante sur le monde, en tant qu'action. Et la construction mathématique bien accomplie, la trajectoire paramétrée sur les nombres réels à la Cantor-Dedekind, par exemple, est signifiante pour nous, car *derrière* nous avons ce geste commun.

Le geste, toutefois, participe aussi de l'autre extrême des pratiques cognitives, la pointe la plus avancée de nos constructions symboliques non-élémentaires, la conceptualisation et le raisonnement mathématique accomplis. À ce geste fait souvent référence Gilles Châtelet.

## I.5 Quelques gestes chez Châtelet et la ligne numérique

Il est bien difficile d'analyser la notion et la pratique du "geste" chez Gilles Châtelet, dans toute son envergure. On choisira ici quelques éléments d'un usage très riche de ce concept polymorphe.

Châtelet en trouve des traces chez Cavaillès, qui apprécie l'intuition construite des

---

[6] Les règles de formation des lambda-termes typés sont exactement les règles de la déduction formelle. Bien que tout reste formel, dans un terme on voit "en transparence" la structure de la preuve [Girard et al., 1990]. Les liens entre types et objets de "catégories géométriques" (les topos en particulier) complètent la richesse mathématique du système (voir [Asperti, Longo, 1991]).

mathématiques : l'intuition précède et accompagne une théorie, car elle « constitue l'unité profonde – mais cette fois saisissable dans l'action – d'une théorie », mais elle la suit aussi, car « comprendre [une théorie mathématique] est en attraper le geste et pouvoir continuer » ([Cavaillès, 1981] cité dans [Châtelet, 1993 ; p. 31]). Châtelet reprend ce rôle du geste : « Ce concept de geste nous semble crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques ... le geste gagne de l'amplitude en se déterminant ... il enveloppe avant de saisir ... [il est une] expérience de pensée », [Châtelet, 1993 ; p. 31-32]. En mathématiques, il y a « ... tout ce parler *dans les mains* ... réservé aux initiés. Une philosophie du physico-mathématique ne saurait ignorer cette pratique symbolique, *en amont du formalisme* ... » [Châtelet, 1993 ; p. 34].

Le geste de l'imagination est à inclure dans ce "sens de la construction" physico-mathématique, le geste qui place l'homme dans une expérience conceptuelle, qui sait se prétendre physique : « Archimède, dans sa baignoire, imagine que son corps n'est qu'une poche d'eau ... Einstein se prend pour un photon et s'installe à l'horizon des vitesses » [Châtelet, 1993 ; p. 36]. « Gauss et Riemann ... [pensent] ... une théorie du mode d'habiter les surfaces » [Châtelet, 1993 ; p. 26]. La géométrie intrinsèque des surfaces et des espaces courbes, de Gauss et Riemann, est le « délire » contre lequel se déchaînera la réaction logiciste (voir [Tappenden, 1995]) et pour lequel on proposera, ensuite, la solution formaliste : ces sont des axiomatiques sans signification, à gérer par des règles formelles, leur cohérence est relative à celle de l'arithmétique formelle, dans laquelle on peut les encoder ([Hilbert, 1899]). Il n'y a donc que l'arithmétique et l'induction arithmétique qui fondent les mathématiques (en tant que lois logiques ou règles purement formelles – ça diffère selon les auteurs), seuls lieux de l'objectivité et de la certitude. La monomanie commence : car, en soi, la théorie des nombres et l'induction sont très importantes et elles sont une composante essentielle des fondements des mathématiques, c'est le régime unilatéral qui gâche tout. Comme l'on disait plus haut, ce recentrage sur le langage et sur les "lois arithmétiques de la pensée" a engendré des machines numériques formidables ainsi qu'une catastrophe philosophico-cognitive encore actuelle.

Mais que est-ce que cette induction magique, logico-formelle, lois ultime de la pensée, logique et signifiante pour Frege, purement formelle, calcul à gérer par une machine, pour Peano et Hilbert ?

Formellement, une fois donné un langage bien formé suffisamment expressif (il faut le 0, le successeur, les règles de gestion de la quantification et peu d'autres, toutes bien élémentaires et simples), on écrit pour les prédicats de ce langage :

$$\frac{A[0] \qquad \forall y\,(A[y] \rightarrow A[y+1])}{\forall x\, A[x]}$$

Règle "catégorique" pour Peano et Frege (mais il n'avait pas ce terme, à l'époque) : c'est-à-dire, la théorie des nombres est là, il n'y a rien d'autre à dire ; cette règle possède un seul modèle, dirait-on aujourd'hui. Mais non, mais non ... un vrai "délire" cette fois se présente : Lowhenheim et Skolem démontreront que l'arithmétique de Peano, qui aurait dû parfaitement coller aux nombres entiers, possède des modèles dans toutes les cardinalités ! Mais il y a pire : conséquences de l'incomplétude, des modèles non-standard (et non-élémentairement équivalents, en termes techniques) accablent de cauchemars les logicistes. Vrais pathologies de l'incomplétude, à la structure d'ordre farfelue ( $\omega + (\omega^*+\omega)\eta$, où $\omega$ est le type d'ordre des nombres entiers, $\omega^*$ son inverse, $\eta$ celui des rationnels) ils ne servent à rien, sauf ... à donner des preuves alternatives des résultats modernes d'incomplétude (exercice joyeux aussi pour l'auteur de cette partie, dans son jeune âge). Si l'on pense, au contraire, que les trois grandes classes de variétés rimaniennes qui modélisent le cinquième axiome d'Euclide et ses deux négations possibles ont toutes acquis un sens physique important, il serait temps de revoir l'orthodoxie fregéenne : le délire est propre à l'axiomatique de l'arithmétique, à l'induction logique ou formelle et à ses modèles, non pas à la géométrie.

Mais on évite de tomber dans le délire, si l'on revient au *sens* de l'induction. Voilà une première idée : « concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » [Poincaré, 1902 ; p. 41]. Cet acte, ce geste itéré est fait dans l'espace, il est le bon ordre de la suite potentiellement infinie des entiers. Mais qu'est-ce que cette suite ? Elle est le résultat d'un parcours constitutif extrêmement complexe. Il démarre par le "petit comptage" et les corrélations établies entre petits groupes d'objets ainsi que le rangement de quelques objets, que nous partageons avec maints animaux, [Dehaene, 1997]. Il continue par nos expériences d'ordonnancement, de comptage et de rangement dans l'espace, aussi anciennes que l'homme, jusqu'à l'énorme variété de leurs expressions linguistiques, dans la préhistoire et dans l'histoire. Des expressions souvent dépourvues de généralité, incapables de proposer un concept général, car encrées sur des objets spécifiques (voir [Dehaene, 1997] et [Butterworth, 1999] au sujet de certaines formes d'énumération chez des peuples qui n'ont pas d'écriture). Peut-être seulement quand l'écriture stabilise la pensée, arrive-t-on à isoler le concept de nombre dans le langage et, ceci, même pas immédiatement. Il paraît en effet que les sumériens avaient différentes notations pour dénoter 5 ou 6 vaches et 5 ou 6 arbres. Pouvons-nous dire qu'ils avaient un concept général de nombre entier ? Il faut en douter. Eux-mêmes et les Égyptiens atteindront beaucoup plus tard la généralité d'une notation uniforme. Et les mathématiques grecques enchaîneront, avec une vraie théorie des nombres (et des concepts tout à fait généraux comme celui de nombre premier, qui ne dépend sûrement pas de la notation).

Et ce concept, qui est atteint par le langage et grâce à lui, est à nouveau placé dans l'espace, car le nombre est aussi une "instruction pour l'action", le comptage et l'ordonnancement dans l'espace. Un espace mental cette fois, celui de la "ligne numérique", que nous tous partageons, [Dehaene, 1997]. Souvent cette ligne est bien drôle, dans notre imagination : elle oscille, elle est finie ... mais pas chez le mathématicien ou la personne tout juste "mathématisée". Dans ce cas, il "voit" la ligne numérique discrète, croissante, se prolonger vers l'horizon, de gauche vers droite, sans limite (dans nos cultures, [Dehaene, 1997]). Cette ligne est donc le résultat d'une dernière opération d'un très long parcours, qui nous mène à remettre dans l'espace, un espace mental, le concept de nombre en tant que itération généralisée, invariant constitué d'un geste itéré dans l'espace physique. Mais son origine est aussi dans l'itération temporelle. On peut reprendre en effet une idée de Brouwer, le fondateur des mathématiques intuitionnistes : le temps phénoménal est défini comme une séquence discrète de moments, en tant que « division d'un moment de la vie en deux choses distinctes, l'une cédant la place à l'autre, mais restant en mémoire » [Brouwer, 1948]. L'intuition mathématicienne de la suite des nombres entiers reposerait alors sur la désintégration subjective et discrète du temps et le calcul serait le déroulement d'un processus dans une temporalité discrète.

Or, dans notre approche, le concept de nombre ainsi que la ligne numérique discrète, qui le structure, sont les invariants constitués par cette pluralité d'actes d'expérience, vécus dans l'espace et le temps, des invariants auxquels le langage et l'écriture donnent l'indépendance propre à l'intersubjectivité – car c'est l'expérience partagée avec autrui qui acquiert la plus grande stabilité. Or, la ligne numérique discrète, ce constitué dans nos espaces mentaux, est un geste mathématique d'une immense complexité□ il résume une histoire conceptuelle qui part du petit comptage et arrive à la pratique mathématique moderne.

## I.6 l'incomplétude mathématique des formalismes

Les théorèmes d'incomplétude nous disent que ce sens structuré du nombre, sa ligne numérique, est élémentaire, par rapport aux mathématiques, quoiqu'il soit très complexe. Plus précisément, on ne peut pas réduire à (décomposer par) des axiomes formels, élémentaires *et* simples, un énoncé du genre "un ensemble générique non-vide de nombres entiers possède un plus petit élément". Cela c'est l'incomplétude mathématique des formalismes.

Pour commencer à comprendre cet énoncé mathématique, que nous appelons le "jugement géométrique du bon ordre" ([Longo, 2002]), sortez de cette page et regardez un instant votre ligne numérique, discrète et croissante, dans la tête. Vous voyez, on espère, cette propriété du bon ordre : isolez d'abord un sous-ensemble générique – générique, car vous n'avez pas besoin de le définir. Alors, "s'il contient un nombre, il contient aussi un plus petit nombre" ... regardez, c'est le premier, qui est bien là, même si vous n'êtes pas obligé de le calculer. Bien évidemment, le bon ordre implique l'induction formelle, mais il en est nettement plus fort. En fait, le bon ordonancement est le "principe de construction" au coeur de la théorie des nombres□et l'induction formelle, un principe de preuve, ne le capture pas□ c'est ça l'incomplétude gödelienne. En général, on peut décrire l'incomplétude mathématique des formalismes comme un décalage – "gap" - entre *principes de construction* (structurels) et *principes de preuve* (formels)□on y réfléchi, au sujet du continu, dans [Longo, 1999b].

Or, on ne comprend pas du tout cette histoire par la preuve du théorème de Gödel, qui est "seulement" un – formidable - théorème d'indécidabilité ; mais elle devient évidente dans les preuves des théorèmes d'incomplétude concrète plus récents (voir [Longo, 1999a et 2002] ; le deuxième de ces textes contient une discussion plus technique[7]). Certains s'obstinent à "forcer" l'induction formelle dans les preuves de ces théorèmes. Chaque fois, une construction ad hoc, d'une difficulté technique extraordinaire, permet de "tirer le cou" à l'induction le long des ordinaux, bien au-delà du dénombrable ou du prédicatif (voir [Longo, 2002] pour des références). Mais la seule méthode uniforme reste la référence concrète à la ligne numérique ; une méthode qui, du reste, appartient à l'expérience de tout mathématicien non-logicien. Celui-ci comprend et utilise l'induction en disant : "cet ensemble de nombres entiers que je considère est non-vide, *donc* il possède un plus petit élément". Et c'est tout et ... "c'est du béton": une fois sortis de l'angoisse fregéenne et formaliste, c'est-à-dire de l'interdit du rapport fondationnel à l'espace et du mythe de la certitude seulement dans le sequence-matching, on travaille très bien avec cette pratique de la structure ordonnée des nombres, avec ce jugement géométrique qui est au cœur des mathématiques. Son élémentarité est la conséquence de l'incomplétude, mais il reste un jugement complexe[8].

---

[7] Reprenons très rapidement l'exercice ci-dessus sur la ligne numérique. La calculabilité du premier élément du sous-ensembles non vide dépendra (du niveau) de la définissabilité du sous-ensemble considéré. Dans certains exemples "concrets" récents, on démontre que, au cours de la preuve, on se trouve à travailler avec un sous-ensemble des entiers, dont la définition, quoique rigoureuse, ne peut pas être donnée dans l'arithmétique formelle, au premier ordre, lieu de la calculabilité effective. Pour cette raison, ce premier élément est loin d'être calculable, quand il existe. Mais, nous, les hommes (un peu mathématisés, c'est évident), on comprend très bien la construction conceptuelle et la preuve rigoureuse, quoique non formelle, sans aucun besoin d'un miracle ontologique ; c'est ainsi que l'on démontre ces théorèmes formellement indémontrables (voir la note suivante et [Longo, 2002], où l'on discute les théorèmes de normalisation et de Kruskal-Friedman). Si les ordinateurs et les philosophes formalistes n'y arrivent pas, c'est leur problème.

[8] Tout approche strictement formaliste rejette aussi des principes nettement moins forts que celui-ci, car il rejette même les systèmes formels qui ne sont pas parfaitement "stratifiés" (prédicatifs)□

Voilà enfin la naturalité des mathématiques ou leur mélange d'artificiel et de naturel : elles contiennent sans doute des fragments entièrement et uniformement formalisables, donc reconductibles à des principes élémentaires et simples, mécanisables (c'est la partie la plus ennuyeuse des mathématiques : on est en train de la transférer dans les machines), mais elles se fondent aussi sur des jugements élémentaires et complexes, comme ce jugement géométrique du bon ordre qui complète l'induction et lui donne un fondement géométrique. Quand on l'utilise, la notion de preuve n'est pas décidable[9] ? C'est un problème pour les machines, comme l'on disait, non pas pour les hommes : en fait, le jugement géométrique du bon ordre est "au fini" et bien effectif du point de vue d'un regard sur la ligne numérique (on ne considère qu'un segment initial fini, quoique pas nécessairement calculable□ le segment qui précède un élément du sous-ensemble non-vide en question). Cette ligne est dans les espaces mentaux humains de la construction conceptuelle, co-constitués par les expériences actives et communes du langage et de la reconstruction de l'espace et du temps phénoménaux. Elle est objective et efficace, comme toutes les mathématiques, à cause de son parcours constitutif qui l'enracine dans le rapport entre nous et le monde. L'efficacité des mathématiques est dans leur riche mélange de calculs formels et naturalité signifiante.

### I.7 Fermetures à l'horizon et itérations

Mais qu'est-ce que ce fini, si important pour les formalismes et les machines, car il défini le calculable, le décidable ? En fait, on n'arrive pas à le définir formellement. Autre conséquence époustouflante de l'incomplétude□il n'y a pas de prédicat formel qui "détermine" le fini, sans que l'on ait aussi à déterminer l'infini. Bref, on ne peut pas isoler la collection des entiers standard, sans un axiome ou prédicat de l'infini ; ou, l'arithmétique formelle ne peut pas parler du fini - standard - et pour le faire il faut passer à une théorie des ensembles avec un axiome de l'infini. (La situation est analogue en théorie des catégories – dans les Topos avec "natural number object", plus précisément.)

Voilà une autre façon de comprendre pourquoi on ne peut pas se passer de la "ligne numérique" (ou d'un axiome de l'infini) : le concept de nombre entier est extrêmement complexe, pour le saisir il faut l'immerger dans une structure plus riche, l'espace bien ordonné de la suite des nombres ou les ensembles infinis, au choix. La différence toutefois est nette : la théorie des ensembles est ontologique ou formelle, contrairement à notre approche. Dans le

---

l'élémentaire doit être absolument simple et ne permettre aucune "boucle complexifiante" (autoréférence). Or, l'imprédicativité est omniprésente dans le théorème de Kruskal-Friedman, KF (voir [Harrington et al., 1985], en particulier les articles de Smorinsky). Il en est de même pour la "normalisation" en théorie formelle, mais imprédicative, de types (le système F [Girard et al., 1990], qui a eu un rôle très important en informatique !). En fait, sa preuve par induction formelle demanderait un ordinal transfini au-delà du concevable (mais les analystes des ordinaux, pourvu de ne pas utiliser le jugement géométrique du bon ordre, seraient prêts à tout ; d'autres, les prédicativistes, préfèrent balancer par la fenêtre le système lui-même : cet ordinal monstrueux confirmerait qu'il n'est pas "fondé"). Une autre analyse formelle de la normalisation, intéressante pour la preuve assistée par ordinateur, utilise plutôt l'arithmétique du IIIe ordre ; mais ... la cohérence de cette dernière, par quelle théorie est-elle assurée ? Par l'arithmétique du IVe ordre et ainsi de suite (de même, si l'on choisi un cadre formel ensembliste). Bref, la preuve "classique" de KF mentionnée ci-dessus, utilise, dans un passage déductif crucial, le jugement géométrique du bon ordre, par rapport à un sous-ensemble supposé non-vide et hautement non-calculable ( $\square^1_1$ , en termes techniques). La preuve formelle de normalisation, ainsi que sa preuve "signifiante", utilise, de facto, le même jugement, comme seule garantie de cohérence, voire de sens, en dehors de toute récession à l'infini (voir [Longo, 2002] pour une analyse rapprochée de la prouvabilité de ces deux grands résultats de la logique contemporaine).

[9] On peut caractériser les systèmes formels hilbertiens, dans un sens très large, comme ces systèmes déductifs dans lesquels la notion de preuve est décidable, dans le sens des machines de Turing.

premier cas, celui de l'ontologie ensembliste, l'objectivité et la certitude sont garanties par le bon Dieu (ce qui, pour certains, est sûrement très solide), dans le deuxième cas, elles dépendent de la cohérence formelle de la théorie. Or, la seule méthode, pour démontrer formellement la cohérence, est une preuve dans le cadre d'une théorie formelle des ensembles avec un axiome de l'infini pour un (nombre cardinal) infini plus grand ... et le jeu de la cohérence formelle continue ainsi "in perpetuum", aussi détaché du monde que l'ontologie platonicienne. Au contraire, le jugement géométrique du bon ordre, est ancré sur un vécu phénoménal qui démarre en déhors des mathématiques et de la théorie des nombres en particulier : leurs fondements, alors, sont donnés par l'origine cognitive de ce jugement, par son histoire phylogénétique, encrée sur la pluralité de nos formes d'accès au monde, à l'espace et au temps, dans l'intersubjectivité et le langage. Il s'ajoute aux preuves formelles de cohérence, qui sont parfois très informatives, comme les théorèmes de normalisation (voir [Girard et al., 1990], [Longo, 2002]), et permet d'arrêter la régression fondationnelle à l'infini.

A l'intérieur des mathématiques, donc, on ne peut pas se passer de l'infini, sous une forme ou une autre, même pour parler du fini. Avec une terminologie de la physique, on pourrait dire que le fini et l'infini sont formellement intriqués ("entangled"). Mais l'infini actuel est un "horizon" : on le comprend bien comme limite de la ligne numérique, comme point de fuite de la géométrie projective ou des tableaux de Piero della Francesca, un de ses inventeurs. Gilles Châtelet le dit très bien : « Avec l'horizon, l'infini trouve enfin un lieu d'accouplement avec le fini » [Châtelet, 1993 ; p. 87] ... « Une itération privée d'horizon doit renoncer à tirer parti de l'enveloppement des choses » [Châtelet, 1993 ; p. 89] ... « Toute timidité à décider de l'horizon fait basculer l'infini dans un indéfini ... Il faut donc, pour refuser toute concession à l'indéfini et s'approprier un infini géométrique, décider l'horizon ... » [Châtelet, 1993 ; p. 90-91]. Ce qu'a fait Piero dans ses peintures, ce que font les mathématiciens tous les jours, au moins depuis Newton et Cantor.

Au contraire, la machine, elle, itère, car « la finitude fétiche l'itération » [Châtelet, 1993 ; p.88]. Une opération par nanoseconde, sans lassitude, sans ennui. La différence est là : nous, les hommes (et les animaux), on s'ennuie. Après quelques itérations, on en a assez et on arrête ou on dit : "très bien, j'ai compris" et l'on regarde l'horizon. Voilà le vrai "test de Turing" (voir [Longo, 2002/2] pour des arguments différents, mais l'ennui serait à ajouter pour mieux tester la différence homme-machine).

Parfois, pour revenir au fini, on renvoie à la Physique Quantique ; mais cette fois le biais philosophique mène à une incompréhension technique. Au bout du compte, on nous dit, il y a bien le h de Planck, mesure ultime de la finitude. Avec cet h, on peut décomposer le monde en petites boîtes bien finies, de côté "longueur de Planck" .... Or, ce n'est absolument pas cette image du monde que nous renvoie la Physique Quantique. Elle nous propose tout d'abord un champ continu, une variété dont un fibré orthogonal a la dimension d'une action (énergie x temps) : sur cette fibre, h constitue une mesure minimale. Bien évidemment, on peut calculer, une fois fixée l'énergie, une fréquence maximale, donc un temps et une distance minimale. Mais les "petits cubes" qui en résulteraient n'ont rien à voir avec les certitudes que cherchent les finitistes : ces cubes ne sont pas séparables (par des prédicats), ils ne sont pas locaux, ils sont corrélés les uns aux autres, d'un but à l'autre de l'univers ... on en parlera dans la deuxième partie de cet article (voir aussi [Bitbol, 2000], pour une critique de l'argument de la boîte finie, simple et élémentaire, dernière plage de la cognition computationnelle finitiste).

Comme d'habitude, et contrairement à l'hypothèse centrale des logicistes et, surtout, des formalistes, la complexité du monde démarre par les "petites boîtes" : les éléments constitutifs de la phénoménalité physique sont le point de départ de la complexité naturelle. On y revient : seulement nos artefacts ont des composantes élémentaires qui sont simples. C'est là le plus grand des défis de la connaissance : la compréhension des intrications et des cordes de la Physique Quantique, de la cellule et du neurone de la Biologie, des prépositions élémentaires des langues naturelles dans leur énorme complexité et polysémie. Les axiomatiques et les grammaires élémentaires et simples des systèmes formels sont bien utiles pour faire des machines, mais elles disent très peu, ou sont démontrablement incomplètes, face au monde. Les mathématiques ont su le démontrer, en nous obligeant à regarder l'horizon pour comprendre tout près de chez nous, le fini, les nombres entiers.

### I.8 L'intuition

Dans ce texte, il n'a jamais été question d'intuition, sauf dans une référence à Cavaillès, qui en parle explicitement. Ce mot est trop riche d'histoire pour être traité aisément. Trop souvent balayé sous le tapis, il est fini dans les trous noirs de l'explication. On lui a, fort justement, opposé la rigueur, jusqu'au "rigor mortis" des systèmes formels. Les maintes erreurs dans les preuves, en particulier au XIXe siècle, justifiaient cette démarche (voir les erreurs de Cauchy, même de Poincaré dans sa première version du Théorème des trois corps ... ; d'autres "regardaient" les fonctions continues et disaient qu'elles étaient toutes différentiables, de droite ou de gauche – Poinsot). Mais surtout le délire des géométries non-euclidiennes avait cassé l'intuition géométrique "a priori", fondement ultime des espaces euclidiens et absolus de Newton, dans leurs coordonnées cartésiennes.

Or, l'analyse fondationnelle des mathématiques que nous développons n'implique pas l'acceptation de "n'importe quel regard intuitif". Au contraire, la sélection doit être rigoureuse et la justification doit proposer une analyse constitutive d'une structure ou d'un concept. En fait, l'intuition elle-même est le résultat d'un processus qui précède et suit la construction conceptuelle ; l'intuition est dynamique, elle est riche d'histoire. Après Cantor, par exemple, le mathématicien n'a plus la même intuition du continu phénoménal qu'auparavant : il en a été marqué, il a même des difficultés à le "voir autrement".

Le dialogue avec les sciences du vivant et de la cognition permet du reste de sortir de l'introspection, autrefois le seul outil d'analyse. Comme toute approche scientifique, notre analyse raconte une histoire constitutive possible, à confirmer, à réfuter ou à revoir : tout savoir, toute science, doit être fort, motivé, méthodique ; toutefois, il reste aussi incertain que toute entreprise humaine. Les sciences de la cognition analysent et, par cela même, mettent en question les outils mêmes de la pensée : elles doivent donc proposer une démarche scientifique qui soit le contraire de la recherche de certitudes dans les lois absolues, donc a-scientifiques, du logicisme.

Les deux exemples proposés ici peuvent être paradigmatiques, grâce aussi à leurs importantes différences. La réflexion faite plus haut, concernant le jugement géométrique du bon ordre (la ligne numérique discrète), se base sur un siècle de travail au sujet de l'induction arithmétique ainsi que sur les analyses cognitives citées ([Dehaene, 1997], [Butterworth, 1999] ; la "mathematical cognition", centrée sur les déficits et les performances numériques est désormais une discipline et une revue). L'incomplétude essentielle de l'induction formelle renvoie donc à l'énorme solidité mathématique d'une praxis commune, conquise, qui entre dans la preuve. Comme l'on disait, cette praxis fait démontrablement partie de la preuve : quand on "force" l'induction sur les ordinaux ou les ordres (des variables), chaque fois un ordinal ou un ordre différent doit être utilisé, dont la justification est douteuse pour tout formaliste. De même, leurs formalisation en théorie des ensembles mène à l'emboîtement infini d'univers absolus dont on parlait. En revanche, la régression conceptuelle infinie s'arrête à notre jugement géométrique du bon ordre : si on veut savoir de quoi on parle en théorie des nombres, en saisir le sens, il n'y a pas, pour le moment d'autres choix possible. Et cela correspond au sentiment de tout mathématicien et s'exprime, normalement, par une attitude platonicienne : remplaçons alors les ontologies préexistantes, les concepts sans concepteurs, par une analyse de la construction humaine de connaissance.

Poincaré et Brouwer ont sans doute ouvert le chemin, mais les développements techniques ont suivi seulement les idées du deuxième. Toutefois, ces développements ont subit, d'un côté, une perte de sens totale, dûe à la formalisation de la logique intuitionniste par Heyting et ses successeurs (voir [Troelstra, 1973]), de l'autre, l'impasse philosophique du "solipsisme" et de la "languageless mathematics" brouwerien (voir [van Dalen, 1991]) : ces idées sont le contraire de l'analyse constitutive proposée ici, qui fait référence d'une façon essentielle à la stabilisation des concepts dans le langage par la communauté communicante des hommes. Bref, après un siècle de réflexions sur le sujet, l'expérience mathématique et les analyses cognitives suggèrent comment revenir sur une pratique de la preuve inductive et en faire un fondement cognitivement justifié de la déduction. Dans ce cas, l'intuition dont on parle est à la fin d'un processus qui inclus aussi la pratique de la preuve ; bref, elle suit la construction de la ligne numérique discrète et permet (et justifie) le jugement géométrique.

L'autre exemple présenté plus haut, la mémoire d'une trajectoire continue (§.I.4), reprend des idées esquissées dans [Longo, 1997 et 1999]) et dérive de remarques récentes en sciences de la cognition (la neurophysiologie des saccades oculaires et de la poursuite dans [Berthoz, 1997]). Toutefois, il ne propose pas un fondement de la preuve. Il s'agit d'une référence au sens qui précède et justifie la construction conceptuelle, à partir de son origine préconceptuelle. Nos mathématiques sont arrivées à proposer la ligne continue, en commençant par le regard parménidéen d'Euclide sur le continu phénoménal jusqu'à la construction rigoureuse de Cantor et Dedekind, puisque "derrière" nous avions l'expérience de la trajectoire déjà abstraite : dans ce cas, l'intuition précède la structure mathématique et, ensuite, elle en est enrichie et précisée. Un mathématicien comprend et communique à l'élève l'appréciation du continu, par le geste, car, derrière le geste, les deux partagent cet acte d'expérience ancien ; par des gestes et des mots, l'enseignant peut (et doit) introduire à « ... tout ce parler *dans les mains* ... réservé aux initiés », dont parle Châtelet. La *re*-construction conceptuelle rigoureuse est nécessaire, bien évidemment : celle de Cantor et Dedekind est un exemple possible, parmi d'autres (voir les travaux de Veronese vers la fin du XIXe siècle ou [Bell, 1998] pour des approches différentes, dont une très récente), mais l'enseignement doit aussi faire vivre à l'élève l'expérience de l'intuition, de se “voir” qui est au cœur de toute pratique scientifique.

Dans cet exemple, l'intuition originaire n'est peut-être pas essentielle à la preuve, mais elle l'est à la compréhension et à la communication et, surtout, à la conjecture et à l'invention de structures nouvelles. Car, voilà l'autre grave manque du logicisme et du formalisme, qui sont entièrement centrés sur la déduction : l'analyse des fondements des mathématiques n'est pas seulement un problème de théorie de la preuve, mais il faut aussi analyser la constitution des concepts et des structures. La théorie (formelle) des ensembles nous a habitué à un univers newtonien absolu, où tout est déjà dit : il suffit de le faire sortir des axiomes. Au contraire, les mathématiques sont un univers en expansion, avec des nouvelles catégories d'objets et de transformations qui s'ajoutent sans cesse. Des foncteurs d'interprétation relative reconstruisent une unité dynamique ou des corrélations entre concepts et structures nouvelles et anciennes.

Les deux exemples étudiés peuvent paraître modestes. Il est toutefois possible qu'ils puissent jouer un rôle paradigmatique : le concept de nombre et son ordre ainsi que le continu d'une ligne sans épaisseur, unidimensionelle, sont deux piliers de la construction mathématique (la compréhension, voire même la construction, chez Euclide, du point sans dimensions en dérive, en tant qu’intersection de deux lignes unidimensionnelles – une remarque de Wittgenstein). Il faut en analyser d'autres, bien évidemment : la piste est peut-être la bonne, mais la richesse et la nature ouverte des mathématiques demande des analyses d'une richesse comparable[10].

Et nous avons besoin de ce genre d'investigation aussi pour l'analyse de la preuve, car aucune preuve importante est sans l'invention d'un nouveau concept, d'une nouvelle structure – invention qui est, d'autre part, ce qui compte vraiment en mathématiques. L'incomplétude de la théorie formelle des ensembles, à laquelle échappent des énoncés aussi important que l'hypothèse du continu, outre celle de l'arithmétique, démontre que, parfois, même la reconstruction formelle a posteriori est impossible. Mais il faut bâtir un regard scientifique sur l'intuition aussi pour réfléchir à l'enseignement des mathématiques : ces mathématiques trop souvent enseignées comme "application de la règle (formelle)", punition de tout élève, ont probablement contribué à la baisse actuelle des vocations. Il faut urgemment revenir au sens, à la construction motivée, pour retrouver et communiquer le plaisir du geste mathématicien.

### I.9 Les gestes du corps et le "cogito"

Le geste complexe (parfois non-élémentaire) qu'évoque Gilles Châtelet nous aide à comprendre les enjeux. Toutefois, il faut "naturaliser" ce geste bien plus de ce que Châtelet ne l'ait fait. Car la limite de sa pensé est dans le refus d'un vécu animal qui précède notre expérience intellectuelle, dans le manque d'appréciation de ce cerveau biologique qui intègre notre corps. C'est ce corps qui permet le geste, entre les hommes, dans l'histoire, bien évidemment, mais aussi par sa posture animale. Et il faut justement saisir le sens de l'homme dans sa naturalité, dont l'absence est l'erreur la plus grave de ce grand et riche tournant de notre philosophie qui a commencé par le "cogito" cartésien. Un tournant qui nous a coupé de notre vécu animal dans l'espace et qui nous a mené tout droit aux mythes de la machine ou des ontologies hors du monde, une fois que l'on a cru pouvoir détacher la pensée de l'animal pensant. Ah ... si la philosophie moderne avait plutôt démarré par un *"je me gratte les fesses et la tête et je pense, donc je suis",* on aurait bien mieux avancé. Mais ce n'est pas le "grattage" qui compte et, hors provocation, il faut surtout saisir le rôle de la préhension et des khinéstèses ([Petit, 2003]) dans la constitution de notre humanité cogitante, en commençant par la conscience du corps propre et, puis, du soi et de celui-ci par rapport aux autres, jusqu'à la réflexion explicite, dans le langage. Il y aurait eu dans une devise ainsi élargie au toucher, à la préhension et aux khinéstèses, la référence à un vaste geste, qui, d'emblée, nous rend conscients du corps, de fond en comble, et situe ce même corps dans l'espace, par l'action. La réflexivité/circularité de la pensée abstraite et symbolique du soi y trouverait son explicitation élémentaire, mais très complexe, dans la pensée d'une déduction qui contient comme conséquence la pensée elle-même, la pensée du soi, ainsi que la conscience d'être au monde. Husserl décrit un geste très fort, un autre acte originaire de conscience, celui de l'homme qui "tâte d'une main son autre main" ([Petit, 2003], [Berthoz, Petit, 2003]). Cette main

---

[10] La reconstruction des contours, qui souvent n'existent pas, comme dans certaines expériences de la Gestalt, est une autre pratique préconsciente d'une forme préliminaire d'abstraction (on est au niveau, très bas, du cortex visuel primaire !). Des "triangles de Kanitza" et à bien d'autres analyses (voir [Rosenthal V., Visetti Y.-M., 1999]) jusqu'aux travaux en neurogéométrie (voir [Petitot, Tondut, 1999]) on est en train de comprendre la richesse de l'activité de (re-)construction visuelle. La vision est loin d'être une perception passive, elle est plutôt une "palpation par le regard" (Merleau-Ponty). Encore plus : elle participe d'une structuration et une organisation permanente du monde. On extrait, on impose, on projette ... des formes, sorte d'activité pré-mathématique, que l'on partage au moins avec tous les animaux avec une fovéa et un cortex visuel (presque) aussi complexe que le nôtre. La friction entre nous et le monde produit les mathématiques, à partir de ces activités élémentaires (mais souvent complexes) jusqu'au langage et aux concepts, dès que cette "friction" implique la communauté communicante.

biologique, bien matérielle, lieu premier du geste, car il n'y aurait pas d'humanité, de cerveau humain en fait, sans la main. Il ne s'agit pas de métaphores, mais de la référence concrète à ce que nous enseigne l'évolution des espèces : au cours de l'évolution, la main humaine a précédé le cerveau et en a stimulé le développement ([Gould, 1977]). En fait, le système nerveux est le résultat de la complexification de l'arc réflexe, voire de la boucle sensori-motrice ([Prochiantz, 1997]). Et le cerveau humain est ce qu'il est, car cette boucle a trouvé dans notre main, libre et extraordinaire, le plus riche des outils, la plus riche des interactions animales au monde. Ensuite, la socialité et le langage, grâce à leur complexité et expressivité ajoutées, ainsi que l'histoire, ont fait le reste, jusqu'aux mathématiques.

Ce qui manque donc aux mécanismes formels, leur démontrable incomplétude, même en arithmétique, est une conséquence de ce geste de la main qui structure l'espace et scande le temps par le bon ordre. Un geste qui enracine, pour l'autre homme qui écoute, la construction langagière des mathématiques, voire la déduction, dans l'action et en complète la signification.

## Partie II. Incomplétude, incertitude et infini : différences et similitudes entre physique et mathématiques (par F. Bailly).

### II.1.1. Incomplétude en physique quantique et incomplétude logique.

Dans le débat sur la complétude de la physique quantique, Einstein, Podolski et Rosen (EPR) mettaient en avant trois caractéristiques de l'objet physique qu'ils jugeaient fondamentales pour pouvoir parler d'une théorie *complète* [Einstein *et al.* 1935] [Bohm 1951] : la référence à ce qu'ils appelaient des éléments de *réalité* (en tant que "quelque chose en dehors de nous"), la capacité de dégager un principe de *causalité* (y compris au sens relativiste), enfin la propriété de *localité* (ou de *séparabilité*) des objets physiques. On sait que les inégalités de Bell (années 60) [Bell 1964] puis leurs vérifications expérimentales, notamment par Aspect et son équipe (années 80) [Aspect *et al.*1982], ont montré que le troisième postulat EPR (celui de séparabilité) n'était pas corroboré.

Ainsi présentée l'éventuelle ***incomplétude*** (ou au contraire ***complétude***) de la physique quantique semble n'avoir absolument aucun rapport avec ce que l'on entend par complétude ou incomplétude en logique[11] et théorie des modèles (Löwenheim, Skolem, Gödel, Cohen, ...) [Largeault 1972],[Cohen 1966]. Toutefois, à un examen plus approfondi il se révèle que ce qui apparaît d'abord comme un simple télescopage lexical n'est peut-être pas complètement fortuit.

A chacune des caractéristiques "exigées" en physique par EPR on peut en effet, sans trop distordre les significations, associer des caractéristiques "exigées" par les mathématiques : aux éléments de réalité on ferait ainsi correspondre des preuves constructives d'existence, c'est à dire, l'effectivité des constructions mathématiques (qui, axiomatiquement ou non, font venir à l'existence les structures mathématiques), au principe de causalité on ferait correspondre l'effectivité de l'administration de la preuve (qui présente et travaille les enchaînements rationnels des démonstrations, qu'elles ressortissent ou non au formalisme proprement dit) et à la propriété de localité (ou de séparabilité) on ferait volontiers correspondre l'autonomie des théories et structures mathématiques en ce qu'elles seraient "localement" décidables (ou que, à l'intérieur d'une théorie formelle, tout énoncé ou sa négation serait démontrable). Or c'est précisément cette autonomie locale des théories, cette "localité" en matière de décidabilité, qui se trouve contredite par les théorèmes d'incomplétude en mathématiques. Ces derniers renvoient en effet à une sorte de globalité des théories mathématiques en ce que, par exemple, l'adjonction d'axiomes à une théorie peut la rendre sinon "décidable", au moins "plus expressive" (ou capable de décider des énoncés auparavant indécidables), mais au prix d'engendrer une nouvelle théorie qui, elle-même, exige le même traitement.

Mais l'on peut sans doute pousser l'analyse plus loin que ne le suggèrent ces analogies conceptuelles. En effet, si l'on retient l'interprétation de l'incomplétude gödelienne en termes de décalage entre principes de construction (structurels) et principes de preuve (formels) - voir partie I -, c'est-à-dire de non complet recouvrement entre ***sémantique*** et ***syntaxe*** (toutes les propositions réalisables ne sont pas formellement dérivables, ou encore, plus traditionnellement : la sémantique excède la syntaxe), alors un rapport plus étroit peut être établi. Ce rapport joue, entre autres, sur l'introduction et la plurivocité du terme ***interprétation***, selon que l'on en fait usage en théorie des modèles ou dans l'usage courant de la physique. En théorie des modèles, l'excès de la sémantique sur la syntaxe au premier ordre, se manifeste tout d'abord par des interprétations distinctes (existence de modèles non

[11] En acceptant, pour cette discussion, de nous situer dans le cadre de la théorie des ensembles (type ZFC) et de la théorie des modèles, cadre dans lequel se sont posés initialement les questions relatives à la complétude logique.

isomorphes, c'est-à-dire non-catégoricité) d'une même syntaxe (exemple, le modèle non-standard de l'arithmétique de Peano [cf. Barreau *et al.* 1989]) ; l'incomplétude gödelienne démontre en outre que certains de ces modèles réalisent des propriétés différentes (non-équivalence élémentaire). En physique, si l'on accepte de voir dans la structure mathématique de la mécanique quantique l'équivalent d'une syntaxe et dans les interprétations conceptualo-théoriques qui en sont proposées (théories à variables cachées, par exemple) l'équivalent d'une sémantique, alors on se trouve bien dans une situation où cette "sémantique" excède aussi la "syntaxe" et, par conséquent, où une certaine forme d'incomplétude (en ce sens) se manifeste[12]. Mais plus profondément, sans doute, dans le cas de la physique quantique c'est l'excès du "possible" sur l'"actuel" (ce qui se trouve en jeu dans le rapport entre caractérisation de l'état quantique et l'opération de mesure) qui illustre le mieux ce genre de parallélisme et de comparaison en ce qu'au résultat d'une mesure correspond en fait une pluralité d'états potentiels qui y conduisent, chacun avec sa probabilité bien définie. Une espèce de non catégoricité des états (non isomorphes, même s'ils appartiennent au même système) relativement au résultat bien défini de la mesure, qui opère là comme une sorte de contrainte "axiomatique" en ce qu'elle relève, avons nous vu, de l'univers des principes de preuve physique.

Ainsi, selon la signification que l'on confère en physique au concept d'incomplétude (acception restrictive au sein d'une théorie donnée, type EPR, ou acception plus générale et plus large en terme de rapport entre formalisation mathématique et interprétation physique) on trouvera ou non un rapport avec le concept d'incomplétude en logique et théorie des modèles.

### II.1.2. Complétude/incomplétude et théories physiques.

D'autre part, dans un registre un peu différent et pour reprendre une comparaison conceptuelle [Longo 2002/2] entre les positions de Laplace et Hilbert d'un côté (l'un et l'autre se référant à une sorte de complétude stricte des théories, physiques dans un cas, mathématiques de l'autre) et Poincaré et Gödel de l'autre (introduisant tous deux l'incomplétude, le premier avec les systèmes dynamiques sensibles aux conditions initiales - problème des trois corps - et en cela devenant "imprédictibles", le second avec ses théorèmes sur la cohérence et la décidabilité de l'arithmétique), il peut être intéressant d'essayer de caractériser les grands types de théories physiques[13] eux-mêmes sous ce rapport de la complétude.

En effet, si les théories de type relativiste peuvent revendiquer une complétude théorique[14] au sens défini plus haut, il semble bien que les théories de type critique d'une part, de type quantique, d'autre part, puissent présenter deux façons distinctes de manifester une incomplétude.

---

[12] Si l'on veut poursuivre l'analogie et le parallèle avec la logique classique, on remarquera aussi que cette recherche de variables cachées - qui se révèlent non locales, cependant - évoque d'une certaine manière la méthode du *forcing* qui a permis à Cohen (années 60) de démontrer l'indépendance dans ZFC de l'hypothèse du continu (en construisant un modèle qui ne la satisfaisait pas, alors que Gödel avait construit un modèle qui la satisfaisait). En effet, les variables cachées en question sont "forçantes" pour le modèle physique qu'elles continuent néanmoins à respecter, d'une façon un peu analogue - conceptuellement parlant - à celle où des propositions forçantes sont intégrées de façon compatible avec le modèle axiomatique de départ.

[13] Il s'agit de la distinction entre théories de types relativiste, critique et quantique, que nous avons introduite dans un autre texte [Bailly, Longo, 2004].

[14] On pourrait remarquer, en effet, si Einstein, par exemple, n'est plus newtonien, en revanche il demeure laplacien dans sa vision du monde physique, tandis que Poincaré, pour sa part, ne l'est déjà plus.

Dans le cas des systèmes dynamiques chaotiques, par exemple, l'incomplétude est associée à la sensibilité aux conditions initiales. On remarquera toutefois qu'une précision infinie sur les données initiales est censée engendrer une évolution parfaitement définie (aspect déterministe du système), ou encore qu'une réinitialisation du système dynamique avec des valeurs rigoureusement *identiques* conduit à des résultats reproductibles (ceci en principe et du point de vue mathématique, bien entendu, car physiquement parlant on se situe toujours dans le cadre d'une approximation et le résultat d'une mesure est toujours, en fait, un intervalle et non un point unique). On peut donc remarquer qu'une *discontinuité conceptuelle* essentielle apparaît entre ce qui relève d'un niveau fini d'approximation et ce qui constitue une singularité, à la limite infinie "actuelle" de la précision (ou encore, pourrait-on dire, entre l'imprédictible et le reproductible).

Par contraste, dans les théories de type quantique, qu'il s'agisse de relations d'indétermination (que nous évoquerons plus bas) ou de non séparabilité, l'incomplétude est intrinsèque au système, elle lui est inhérente. Dans ce cas peu importe le degré d'approximation : il y a une sorte de *continuité* conceptuelle entre fini et infini, les comportements observés et mesurés ne présentant pas de transition particulière. Une autre façon de le constater consiste à remarquer que cette fois, quelle que soit la rigueur d'une réinitialisation du système, les résultats de la *mesure* ne seront pas nécessairement individuellement reproductibles (caractère probabiliste de la mesure quantique), même si la loi de probabilité de ces résultats peut être parfaitement connue.

### II.1.3. Incomplétude *vs* indétermination en physique quantique.

Parfois, une confusion s'établit entre le concept d'incomplétude (tels qu'il a été soulevé par EPR) et celui d'indétermination (tel qu'il a été mis en évidence par Heisenberg). Tentons donc d'expliciter encore ce qu'il en est des rapports entre incomplétude et indétermination, qui ne recouvrent pas les mêmes constructions conceptuelles.

La question de l'incomplétude telle qu'elle fut soulevée par EPR conduit, avons nous vu, à la recherche de "variables cachées" qui "expliqueraient" le comportement contre intuitif des phénomènes quantiques. Il est, en effet, possible d'élaborer des théories à variables cachées, mais ces variables sont elle-mêmes non locales, ce qui ne fait que reporter les difficultés intuitives. A ce compte, autant s'en tenir à la version canonique de la physique quantique, aux inégalités de Bell et aux expériences d'Aspect qui mettent en évidence la propriété de *non séparabilité* quantique. En soulignant le fait qu'une des origines de cette situation tient au caractère *complexe* (vecteurs d'états ou fonctions d'onde) des quantités additives (principe de superposition), alors que ce qui se mesure est *réel* et renvoie aux carrés des modules de ces quantités. Nous y reviendrons dans un instant.

**L'indétermination quantique** ("le principe d'incertitude") mobilise pour sa part des concepts un peu différents : il s'agit du traitement de variables explicites (non cachées), telles les positions et les moments, dont les opérateurs associés présentent un caractère de *non commutativité* (propriété fondamentale qui conduira d'ailleurs au développement de la géométrie non commutative). Il s'agit en fait des contraintes que fait peser sur la mesure physique la constante de Planck (petite mais non nulle), qui interdit la mesure simultanée avec une précision "infinie" de deux grandeurs conjuguées comme les positions et les moments correspondants, que nous venons d'évoquer.

Si l'on voulait grossièrement distinguer les deux types d'ambiguïté conceptuelle qu'introduisent, par rapport aux intuitions usuelles, ces propriétés quantiques, on dirait que l'incomplétude renvoie plutôt à une ambiguïté objectale (l'objet est-il local ou global ? Comment se fait-il que suivant la nature de l'expérience il semble se manifester comme particule ou comme onde[15] ? ), tandis que l'indétermination conduit à une ambiguïté sur ce que l'on entend par "état" du système (un objet quantique dont on connaîtrait précisément la position serait affecté d'une vitesse imprécise ; à l'inverse la connaissance précise d'une vitesse engendrerait un "flou" sur la position occupée – à la limite, un objet quantique qu'on parviendrait à "arrêter" occuperait tout l'espace).

En fait les deux versions de ces spécificités quantiques renvoient toutes deux à une difficulté de description "classique" des phénomènes quantiques dans l'espace et le temps tels que nous en avons l'expérience habituelle, alors même que leur description dans leurs espaces propres (espace de Hilbert, par exemple) est parfaitement claire.

Quant à l'espace, précisément, on notera plusieurs traits qui font de notre intuition usuelle de l'espace (et même des variétés riemanniennes de la relativité générale) un instrument inadapté pour représenter aisément la phénoménalité quantique[16] :

i) D'abord, comme nous l'avons indiqué plus haut, les quantités quantiques sont définies au départ sur le corps des complexes **C**, contrairement aux quantités classiques et relativistes qui sont définies au départ sur le corps des réels **R**. Il en résulte, rappelons-le, qu'en physique quantique, ce qui s'ajoute (principe de superposition) n'est pas ce qui se mesure (les amplitudes complexes s'ajoutent, leur normes carrées se mesurent). En même temps et pour la même raison, les objets quantiques ainsi définis (fonction d'onde ou vecteur d'état, par exemple) ne sont plus munis de la structure d'ordre "naturelle" associée aux réels.

ii) Ensuite, nous l'avons vu, la définition des observables font que certaines d'entre elles (correspondant aux grandeurs conjuguées) ne commutent pas, contrairement au cas classique, ce qui, dans le cadre de la géométrisation de cette physique, nécessite l'introduction d'une géométrie elle-même non commutative, rompant ainsi avec toute la tradition antérieure [Connes 1990].

iii) Enfin, l'interrogation peut porter plus loin encore, quant aux rapports entre la phénoménalité quantique et la nature de notre espace géométrique usuel : ce dernier, qu'il soit newtonien ou riemannien, admet une représentation comme ensemble de points et son continu est justiciable d'une divisibilité indéfinie, or, tant l'existence d'une échelle de longueur (peut-être minimale, cf. [Nottale 1999]), telle la longueur de Planck, que les récentes théories de cordes conduisent à se demander si en fait cet espace n'échapperait pas à une description en termes d'élémentarité ponctuelle (au profit, éventuellement, d'une autre, en termes d'élémentarité d'intervalle[17]).

## II.2. Fini/infini en mathématiques et en physique.

**II.2.1.** Un second thème essentiel se dégage de la première partie de ce texte : celui du rôle fondamental, tant pour la constitution des objets mathématiques que pour la preuve, de l'infini mathématique. Ce que bien souvent on oppose, pour les distinguer de ces idéalités, à une finitude constitutive des objets naturels. Il est, en effet, habituel d'entendre dire que l'infini n'a pas sa place dans les sciences de la nature, la physique en particulier : tous les objets - voire

[15] Situations à propos desquelles Bohr a été amené à introduire très tôt le concept de *complémentarité* qui fit d'ailleurs l'objet de bien des controverses.

[16] Par exemple, avec l'inséparabilité, tout semble se passer comme si un événement localement bien défini dans un espace d'état, celui de la définition des grandeurs quantiques, se projetait *potentiellement* sur deux points distincts de notre espace usuel des états.

[17] On passerait peut-être, alors, d'une représentation cantorienne du continu à une représentation du type proposé par Veronese (emboîtements d'intervalles) ; sur ce point voir aussi [Bell 1995].

l'univers lui-même - qu'étudie la physique ne sont-ils pas finis ? Et si grand soit-il, le nombre d'atomes de l'univers n'est-il pas susceptible d'être fini ?

Peut-être, au niveau des phénomènes en est-il vraiment ainsi, mais nous voudrions argumenter que dans des cas tout à fait essentiels pour la ***théorie*** et ***la modélisation mathématique*** de ces phénomènes (c'est-à-dire aussi pour la *construction de leur objectivité*, leur explication, voire leur compréhension) il en va tout autrement : l'infini actuel y est présent et même nécessaire, en même temps d'ailleurs que le continu.

Bien sûr, déjà au niveau des équations différentielles, si présentes dans les théories physiques, l'utilisation du concept de dérivée ou d'élément différentiel mobilise déjà implicitement une représentation de la limite "actualisée" ou de l'infiniment petit. Et l'on sait qu'il existe des cas où la discrétisation manque la spécificité du phénomène. Mais ce n'est pas sur ce plan que nous souhaitons appuyer notre argumentation, car néanmoins, dans la plupart des cas, la discrétisation et l'utilisation de nombres grands mais fini, constituent une approximation suffisante pour rendre compte complètement des manifestations phénoménales au degré d'approximation de leur mesure.

Mais il est aussi nombre de cas physiques où l'infini actuel joue un rôle constitutif essentiel dans la théorisation des phénomènes. Nous en choisirons deux qui nous paraissent très illustratifs et qui offrent de surcroît de concerner la modélisation de phénomènes susceptibles d'une expérience immédiate, à portée de la main en quelque sorte : la théorie des phénomènes critiques (transitions de phase) et la théorie statistique de l'irréversibilité.

Le premier cas est bien entendu celui des phénomènes critiques tel qu'il est traité par la physique statistique. Lors d'un changement de phase, en effet, (au point critique) apparaissent des comportements non analytiques des grandeurs thermodynamiques (exposants critiques). D'un point de vue théorique fondamental, dans le cadre de la mécanique statistique, on ne peut en rendre compte qu'en effectuant le passage à la limite infinie actuelle des grandeurs extensives du système (N, nombre des constituants du système, V volume du système), la grandeur intensive correspondante (la densité d = N/V) restant constante (ce en quoi on peut trouver un premier exemple physique de cette corrélation fini/infini évoquée dans la première partie de ce texte). En effet, la fonction de partition Z du système est généralement une fonction analytique pour tout système fini dans son volume et le nombre de ses constituants et ce n'est qu'au passage infini actuel de cette taille du système que cette fonction devient non analytique et fait ainsi apparaître les comportements critiques (divergence des longueurs de corrélation ou des susceptibilités, apparition d'exposants critiques). Ces traits se trouvent encore accentués dans la mise en œuvre de la procédure de renormalisation qui "décrit" en quelque sorte cette transition notamment en introduisant une équation récursive associée à l'existence d'un point fixe des transformations d'échelle.

Le deuxième cas présente des traits similaires, y compris pour la corrélation physique fini/infini : on sait que les équations du mouvement de particules interagissant suivant un potentiel (comme dans un gaz, par exemple) sont toutes réversibles dans le temps. Comment donc apparaît l'irréversibilité des propriétés thermodynamiques ? Par delà l'approche statistique, l'approche dynamique (dynamique des corrélations) fait apparaître des quantités qui, si elles restent finies, maintiennent la réversibilité de principe mais qui, au passage de l'infini actuel transforme de petits dénominateurs en distributions et fait apparaître une irréversibilité des phénomènes.

Notons que ces situations physiques, où le passage actuel à l'infini semble nécessaire, présentent des traits conceptuels communs avec certaines situations purement mathématiques. Ainsi, pour tout n fini, si grand que ce soit, la somme de la série de terme général 1/n! appartient au corps **Q** des rationnels. Ce n'est que pour la valeur n = , "actualisée", que cette somme "sort" strictement de ce corps pour fournir le nombre transcendant *e* qui appartient au corps **R** des réels sans appartenir à **Q**.

De même, les distributions (telle la "fonction" $\delta$ de Dirac) sont considérées comme "sortant" du domaine des fonctions par le passage à l'infini actuel de suites de fonctions (comme la gaussienne ou la lorentzienne, dans ce cas précis).

Ces situations (et bien d'autres) nous paraissent au fond très parentes, conceptuellement parlant, de celles que nous avons décrites dans les cas physiques précédents. Il s'agit toujours, grâce au passage actuel à l'infini, de constituer des "objets" nouveaux (ou une phénoménalité nouvelle) qui autrement seraient théoriquement inaccessibles. Il s'agit en quelque sorte de franchir un niveau objectif et conceptuel.

A ces exemples, nous pourrions d'ailleurs ajouter ceux associés à des dynamiques chaotiques qui font apparaître des attracteurs fractals (attracteur de Lorenz, par exemple, à partir des équations de Navier-Stokes), ce qui entraîne, avec l'apparition d'exposants de Lyapounov positifs, la propriété d'imprédictibilité asymptotique.

Il est également intéressant de noter, d'un point de vue plus spectaculaire encore, que dans le cas de la dynamique logistique discrète, sur le segment (dynamique gouvernée par l'équation déterministe à un seul paramètre : $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$, avec $2 \leq a \leq 4$), le passage par l'attracteur étrange (de dimension fractale) pour une valeur précise de a, correspond précisément au passage entre attracteurs discrets comportant une infinité dénombrable de points du segment support, à des attracteurs de topologie continue par morceaux, et comportant une cardinalité du continu de points sur ce segment. La singularité que constitue la fractalité de l'ensemble attracteur constitue en quelque sorte la marque, pour un seul et même modèle, de cette transition du dénombrable au continu ; un peu comme ce qui se passe pour un ensemble de Cantor, dont la mesure est nulle sur le segment mais présente néanmoins la cardinalité du continu.

Dans un ordre d'idée similaire (bien que la phénoménalité objective soit évidemment très différente), on sait que dans la théorie quantique de l'atome d'hydrogène, les états énergétiques de l'électron présente deux types de spectre : un spectre discret dénombrable lorsque l'électron reste lié au proton, un spectre continu après la libération de cet électron. Là encore, le seuil entre les caractéristiques discrètes et continues est associé à un changement radical de l'état électronique et à une sortie du domaine de caractérisation initial : l'électron *de l'atome d'hydrogène*, sortant de son domaine de définition, devient un électron *libre*.

### II.2.2 Constitutions d'objectivité. Comparaisons conceptuelles entre mathématiques et physique.

Tout le monde s'accorde pour admettre qu'il existe, chez les humains, comme une intuition première du continu topologique, associée notamment aux expériences tactiles (cf. J-T. Desanti par exemple) ou motrices (cf. R. Thom ou A. Berthoz). De même, "l'infini en acte", une fois qu'il a été conceptuellement construit par l'intersubjectivité constituante, semble désormais relever, également, d'une expérience du sujet : cette expérience ne le conduit pas seulement à imaginer l'idée de dieu (et la théologie), ou, comme Giordano Bruno, l'infinité des mondes ; elle se trouve, bien plus effectivement encore, mise en oeuvre dans le processus de constitution des objets mathématiques (finitaires comme infinitaires) en ce que l'on peut considérer que les objets mathématiques sont "substantiellement" (si l'on peut dire !) un concentré d'infinitaire en acte mis en oeuvre par les humains. Expliquons-nous et argumentons.

La constitution transcendantale des objectivités mathématiques (ne seraient-ce que ces objets complètement finitaires que sont le triangle ou le cercle) engage en fait un *changement de niveau* tout à fait fondamental : le processus d'abstraction des actes d'expérience et des gestes qui leur sont associés (voir la partie I) conduit en effet à cette *transition* qui constitue les formes ainsi produites en structures abstraites, en objets eidétiques. Cette transition (qui conduit aussi des formes à leurs conditions de possibilité) présente tous les caractères de criticité que l'on peut actuellement envisager et notamment ce passage du *local* (telle ou telle forme empirique) au *global* (la structure que l'on définit abstraitement et qui se retrouve dans toute manifestation particulière), de même que le passage d'une certaine hétéronomie ("subjectivisante") à une autonomie (objectivité) et d'une certaine instabilité (circonstancielle) à une stabilité (a-événementielle)[18].

Les images que l'on peut prendre pour essayer de rendre compte de cette transition qui conduit vraiment à la constitution de ces objectivités nouvelles sont variées. En mathématiques nous avons utilisé plus haut l'image de la somme des rationnels ($1/n!$ par exemple) qui débouche dans certains cas, à la limite infinie en acte, sur un transcendant (e, en l'occurrence), véritable transition critique qui conduit de la sortie d'un corps (**Q**) pour entrer dans un autre qui l'englobe (**R**). En physique on trouve en quelque sorte l'équivalent dans le changement de phase, associé à la divergence d'une grandeur intensive du système (une susceptibilité par exemple) et au passage du local au global (divergence de la longueur de corrélation des interactions). En biologie il s'agirait du changement de niveau d'intégration et de régulation fonctionnelles (l'organisme par rapport à ses constituants, par exemple).

Si les structures mathématiques sont les résultats de la recherche des invariants les plus stables, comme on les caractérise conceptuellement dans la première partie, c'est donc sans doute à ce processus de constitution qui mobilise une forme d'infini en acte débouchant sur une sorte d'autonomie stable qu'elles le doivent, au moins en partie.

Poursuivons la métaphore physique du changement de phase. Une transition de phase se manifeste notamment par une brisure de symétrie du système et un changement concomitant (soudain ou plus progressif) d'un paramètre d'ordre (le moment magnétique total pour une transition para-/ ferromagnétique, la densité pour une transition liquide solide). De fait, la transition de phase est, d'une façon ou d'une autre, une transition entre désordre (relatif) et ordre (relatif, lui aussi). Si nous retenons ces caractéristiques et que nous en fassions un trait conceptuel commun à la constitution transcendantale des objectivités mathématiques, nous reconnaîtrions volontiers la situation désordonnée dans la collection souvent in-coordonnée des êtres mathématiques "empiriques", et la situation ordonnée dans les objets et structures mathématiques proprement dits tels qu'ils résultent du processus d'abstraction et de constitution. On conçoit bien alors pourquoi l'axiomatisation, voire la logicisation, des énoncés caractérisant ces structures mathématiques sont génétiquement et, certains égards, conceptuellement *secondes* par rapport à l'activité mathématique et au processus de constitution lui-même, comme on le souligne dans la première partie de ce texte. En effet, ces énoncés décrivent en fait l'*ordre* consécutif au "changement de phase" que nous venons d'invoquer. Ils représentent l'expression de cet ordre, une fois la transition achevée. Mais la pensée mathématique concerne tout autant le processus de transition que la mise en forme et la description de son résultat. Et pour aller plus loin, on pourrait presque dire que l'évacuation du "désordre" qui accompagne la transition-constitution correspond à l'évacuation des "significations" associées aux structures au cours de leur élaboration et de "l'engagement infinitaire" qu'elle présuppose : c'est vraisemblablement ce qui permet aux "structuralistes" (au sens de [Patras 2001]) de soutenir que le retour aux fondements, tel qu'il est conçu dans la pensée logico-formelle, conduit à de pures syntaxes dépourvues de sens.

C'est sans doute aussi une des raisons qui permettent de comprendre pourquoi le formalisme "marche" lorsqu'il s'agit de décrire l'ordre résultant de la transition en question (les structures mathématiques constituées), mais qu'il faillit dès lors qu'il se donne pour programme de

---

[18] Ce sont notamment ces traits, résultats d'une sorte de passage à la limite infinie effective comme processus de constitution, qui correspondent sans doute à la pensée du platonisme mathématique, qui oublie toutefois le parcours constitutif lui-même.

décrire *aussi* la transition elle-même, c'est-à-dire le processus de constitution comme tel, à partir et dans les termes de son résultat. En fait, on peut considérer que le formalisme manque à capturer "l'infinitaire actuel" qui a permis le passage et qui est devenu une caractéristique majeure des objectivités ainsi construites[19] et l'on peut se demander s'il n'est pas naturel d'interpréter les résultats d'incomplétude comme une réelle démonstration de cette carence.

Là, de fait, s'arrête à notre avis l'analogie conceptuelle proposée avec la transition de phase en physique, car on sait qu'en physique, comme nous l'avons rappelé plus haut, la théorie de la renormalisation se révèle en quelque sorte capable de traiter la transition critique elle-même. Cette différence de comportement relativement au processus mis en jeu est sans doute à reconduire à la différence des objets considérés eux-mêmes, tels qu'ils sont élaborés en physique et en mathématiques : si les principes de construction sont similaires, avons nous vu, en revanche les principes de preuve diffèrent complètement, et c'est bien sur la question du statut de la preuve que se manifeste ici la différence.

C'est sans doute ce qui transparaît dans cette dichotomie introduite dans la première partie relativement à l'élémentarité, en opposant élémentarité simple (liée aux processus artificiels du calcul algorithmique, concaténation de portes logiques simples) et élémentarité complexe (liée aux processus naturels) tels les cordes en physique quantique ou les cellules en biologie. En effet, dans la mesure où la physique (et la biologie) traitent des phénomènes naturels, ils ne sont susceptibles de se confronter qu'à des élémentarités fort complexes, et en cela vraisemblablement irréductibles à des élémentarités simples au sens de la computation artificielle. C'est peut-être aussi ce qui interdit de pouvoir réduire le jugement scientifique à un calcul (en ce sens), sans pour autant nier l'intérêt de l'éclairage complémentaire qu'apporte conceptuellement la tentative computationnelle.

## En guise de conclusion

Que l'action – le geste – précède toute compréhension et même s'en présente comme condition de possibilité, c'est ce qu'avant même les études sur la cognition nous apprend la biologie, en particulier la biologie de l'évolution, puisqu'il semble bien que neurones, systèmes nerveux, structures cérébrales ne puissent se différencier et se développer que chez des organismes doués d'autonomie motrice. Il n'est donc pas étonnant que les concepts les plus généraux et les plus abstraits, en mathématiques et en physique, s'enracinent "en première instance" dans l'expérience motrice et que ce soit "le geste" qui en permette le développement en même temps qu'il permet, si abstrait soit-il lui-même devenu, l'élaboration de nouveaux concepts. C'est ce qu'a su admirablement montrer et penser Gilles Châtelet, tant du point de vue historique que cognitif proprement dit. Trois gestes semblent ainsi avoir présidé à la naissance des concepts les plus fondamentaux des mathématiques et de la physique voir aussi [Salanskis 1991] : celui des déplacements pour l'*espace* (et le *temps*), celui de la caresse pour le *continu*, celui de l'itération illimitée pour l'*infini* (et le *nombre*). Le passage à la limite de ces notions d'abord tributaires de leur saisie intuitive corrélative de l'action, leur confère ensuite leur autonomie de concepts rigoureux et définis : l'espace et le temps ne se réduisent plus à des réceptacles pour nos mouvements, le continu ne donne plus matière à paradoxes insurmontables (les éléates, les infinitésimaux), le nombre ne désigne plus seulement des

---

[19] En ce sens, notamment, qu'il est vraisemblable que la composante dite "sémantique" – généralement attachée aux significations – qui se trouve la plus profondément engagée dans la mise en œuvre de ce passage effectif à la limite infinie, alors que l'aspect syntaxique, est beaucoup plus relatif à la description rigoureuse des résultats de ce passage ; c'est bien la non coïncidence de ces deux dimensions qui est à l'origine des propriétés d'incomplétude ou de non-catégoricité, voire du décalage entre principes de preuve (formels) et principes de construction (conceptuels), dont on parle dans la partie I.

entiers ou des rationnels et l'infini lui-même est apprivoisé et devient actuel. Et, comme par un juste retour des choses, ce que le mouvement d'abstraction constitue à partir de ce que le geste autorise vient, avec la physique mathématique, rendre possible et féconder une théorie de la nature physique.

**Remerciements.** Susanna Marietti nous a aidé à clarifier certains points importants.
**Un ricordo** (Giuseppe Longo) Vorrei qui ricordare Enzo Monferini, straordinario professore di filosofia, al liceo Tasso, a Roma, negli anni '60. Egli seppe formare moltissimi giovani al pensiero ed alla passione filosofici, visti anche come componenti essenziali della costruzione di quadri concettuali per la scienza. In questo modo e grazie all'attenzione portata alla filosofia della conoscenza e della scienza, sottrasse tanti di noi alla coda dell'idealismo che ha cosi' duramente colpito la filosofia italiana, nonche' alla reazione ad esso, troppo spesso basata su di un positivismo piattamente riduzionista. La sua visione mi appare oggi prossima a quelle di Banfi e Preti, oltre che accompagnata da grandi senso dell'ironia ed attenzione all'umanita' degli interlocutori.

Giovanissimo insegnante, aveva gia' contribuito a far vivere la speranza nella vita e nella ragione nel piccolo liceo del ghetto di Roma, cui fu costretto con gli studenti e gli insegnanti ebrei espulsi dalle scuole dello stato fascista, nel 1938. Sin da allora, egli proponeva un'alternativa laica, con la sua filosofia profondamente atea, alla reazione mistico-religiosa di fronte alla drammaticità della storia.

**Références**

*(Des versions préliminaires ou revues des articles de Longo sont "downloadable" de* *http://www.di.ens.fr/users/longo* ou Google: search : Giuseppe Longo).

Aspect A., Grangier P. and Roger G., "Experimental Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment* : A New Violation of Bell's Inequalities"**,** Phys. Rev. Let. **49**, p.91, 1982.

Asperti A., Longo G. **Categories, Types and Structures**, M.I.T. Press, 1991.

Bailly F., Longo G. "Objective and Epistemic Complexity in Biology" Invited lecture, **International Conference on Theoretical Neurobiology,** *New Delhi***,** February 2003 (to appear).

Bailly F., Longo G., "Espace, temps et cognition. A partir des mathématiques et des sciences de la nature", Numéro spécial de la **Revue de Synthèse** (Longo ed.), Paris, n. 1, 2004 (english version: **Causality and Mind**, Peruzzi ed., Kluwer, to appear).

Barreau H., Harthong J. (Eds.), **La mathématique non standard,** Ed. CNRS 1989.

Bell J. **A Primer in Infinitesimal Analysis**, Cambridge U.P., 1998.

Bell J.S., "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox"**,** Physics **1**, p.195, 1964.

Berthoz A. **Le sens du mouvement**, Odile Jacob, Paris, 1997.

Berthoz A., Petit J.-L□"Repenser le corps, l'action et la cognition à la lumière des neurosciences", à paraître dans **Intellectica**, 2003.

Bitbol M., **Physique et philosophie de l'esprit**, Flammarion, 2000.

Bohm D., “The Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky”, Quantum Th. p.611, 1951.

Brouwer L. "Consciousness, Philosophy and Mathematics", 1948, *in* **Collected Works** vol.□ (Heyting ed.), North Holland, 1975.

Butterworth B. **The mathematical brain**, MacMillan, 1999.

Cadiot P., Visetti Y.-M., **Pour une théorie des formes sémantiques – Motifs, profils, thèmes,** PUF, Paris, 2001.

Canguilhem G. **La connaissance de la vie**, Broché, Paris, éd. rev. 2000.

Cavaillès J. **Méthode axiomatique et formalisme,** Hermann, Paris, réed. 1981.

Châtelet G. **Les enjeux du mobile**, Seuil, Paris, 1993.

Church A. "A set of partulates for the Foundation of Logic" **Annals of Math.** XXXIII (348-349) and XXXIV (839-864), 1932-3.

Church A. "A formalisation of the simple theory of types" **Journal of Symbolic Logic** 5, pp. 56-58, 1940.

Cohen P.J., **Set Theory and the Continuum Hypothesis,** W. A. Benjamin, 1966.

Connes A., **Géométrie non commutative,** InterEditions,1990.

Curry H. B., Feys E. *et* Curry H. B., Hindley J. R., Seldin J. **Combinatory Logic vol. I** *et* **vol. II**, North-Holland, 1968 *et* 1972.

van Dalen D. "Brouwer's dogma of languageless mathematics and its role in his writings" **Significs, Mathematics and Semiotics** (Heijerman ed.), Amsterdam, 1991.

Dehaene S., **La bosse des Maths,** Odile Jacob, Paris, 1997.

Edelman G., Tononi G. **A Universe of Consciousness. How Matter Becomes Immagination**, Basic Books, 2000.

Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete ? " Phys. Rev. **41**, P.777, 1935.

Frege G. **The Foundations of Arithmetic**, 1884 (english transl. Evanston, 1980).

Fuchs C., Victorri B. **La Polysémie, construction dynamique du sens**, Hermès, Paris, 1996.

Girard J.-Y. **Locus Solum,** *Special issue,* **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge U.P., vol.11, n.3, 2001.

Girard J.Y., Lafont Y., Taylor P. **Proofs and Types**, Cambridge U. Press, 1990.

Gould J.S. **Ever since Darwin**, Norton, N.Y., 1977

Harrington L. et al. (eds) **H. Friedman's Research on the Foundations of Mathematics**, North-Holland, 1985.

Hilbert D. **Les fondements de la géométrie**, 1899 (trad. fran., Dunod, 1971).

Husserl E. **Sull'origine della geometria**, 1933 (pubblicato come "Appendice III" in ***La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale*,** Il Saggiatore, Milano, 1997).

Largeault J., **Logique mathématique. Textes,** Armand Colin, Collection U, 1972.

Longo, G. "Set-Theoretical Models of Lambda-calculus: Theories, Expansions, Isomorphisms," **Annals Pure Applied Logic** vol. 24, (153-188), 1983.

Longo G. "Géométrie, Mouvement, Espace: Cognition et Mathématiques. À partir du livre "Le sens du mouvement"", par A. Berthoz, Odile-Jacob, 1997. **Intellectica**, n.25, 1997.

Longo G. "Mémoire et Objectvité en Mathématiques", *en* **Le Réel en Mathématique**, colloque de Cérisy, 1999 (à paraître).

Longo G. "Mathematical Intelligence, Infinity and Machines: beyond the Gödelitis" **Journal of Consciousness Studies,** special issue on Cognition, vol. 6, 11-12, 1999a.

Longo G. "The mathematical continuum, from intuition to logic" in **Naturalizing Phenomenology: issues in comtemporary Phenomenology and Cognitive Sciences**, (J. Petitot et al., eds) Stanford U.P., 1999b.

Longo G. "On the proofs of some formally unprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory" Invited Lecture, **Types for Proofs and Programs**, Durham, (GB), Dec. 2000; **Lecture Notes in Computer Science**, vol 2277 (Callaghan et al. eds), pp. 160 - 180, Springer, 2002.

Longo G. "Laplace, Turing et la géométrie impossible du "jeu de l'imitation"□ aléas, déterminisme et programmes dans le test de Turing". Conférence invitée, Colloque **Cognition, meaning and complexity**, Univ. Roma II, June 2002; paru dans **Intellectica**, n. 35, 2002/2.

Longo G. "The reasonable effectiveness of Mathematics and its Cognitive roots", in **New Interactions of Mathematics with Natural Sciences** (L. Boi ed.), Springer, 2003.

Merleau-Ponty M. **Phénomenologie de la perception**, Paris, Gallimard, 1945.

Nottale L., **La relativité dans tous ses états,** Hachette 1999.

Patras F., **La pensée mathématique contemporaine,** PUF 2001.

Petit J.-L. "La spatialité originaire du corps propre□ phénoménologie et neurosciences"

Numéro spécial de **Revue de Synthèse** (Longo ed.), Paris, 2003.

Petitot J., Tondut M. "Vers une Neuro-géométrie. Fibrations corticales, structures de contact et contours subjectifs modaux", Numéro spécial de **Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines,** 145, 5-101, EHESS, Paris, 1999.

Petitot J., "Préface" à Preti G. **Ecrits philosophiques**. Textes choisis et présentés par L.M. Scarantino, Paris, Cerf, 2002.

Poincaré H. **La Science et l'Hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902.

Preti G. **Saggi filosofici**, vol. I, Firenze, La Nuova Italia, 1976.

Prochiantz A. **Les anatomies de la pensee**, Odile Jacob, Paris, 1997.

Rosenthal V., Visetti Y.-M., "Sens et temps de la Gestalt", preprint, LTM-ENS, Paris, 1999.

Salanskis J-M., **L'herméneutique formelle. L'infini, le continu, l'espace,** Ed.CNRS 1991.

Seldin J.P. "Curry's program" *in* **To H.B. Curry: Essays in Combinatory Logic, Lambda-calculus and Formalism**, (Seldin, Hindley eds.) Academic Press, London, 1980.

Tappenden J. "Geometry and generality in Frege's philosophy of Arithmetic" **Synthese**, n. 3, vol. 102, March 1995.

Troelstra A.S. **Metamathematical investigation of Intuistionistic Logic and Mathematics**, **LNM 344**, Springer-Verlag, 1973.

Turing A. “Computing Machines and Intelligence”, **Mind**, LIX, 1950.

Victorri B. “Espace sémantiques et représentation du sens”, **Textualités et nouvelles technologies**, éc/artS, 3, 2002.