

# Le equazioni della natura

Nadia Pisanti e Giuseppe Longo

*Uno sguardo sulla fisica del vivente radicalmente nuovo, capace di cogliere le dinamiche del continuo. È l'ultimo, coraggioso contributo di Turing alla scienza moderna*

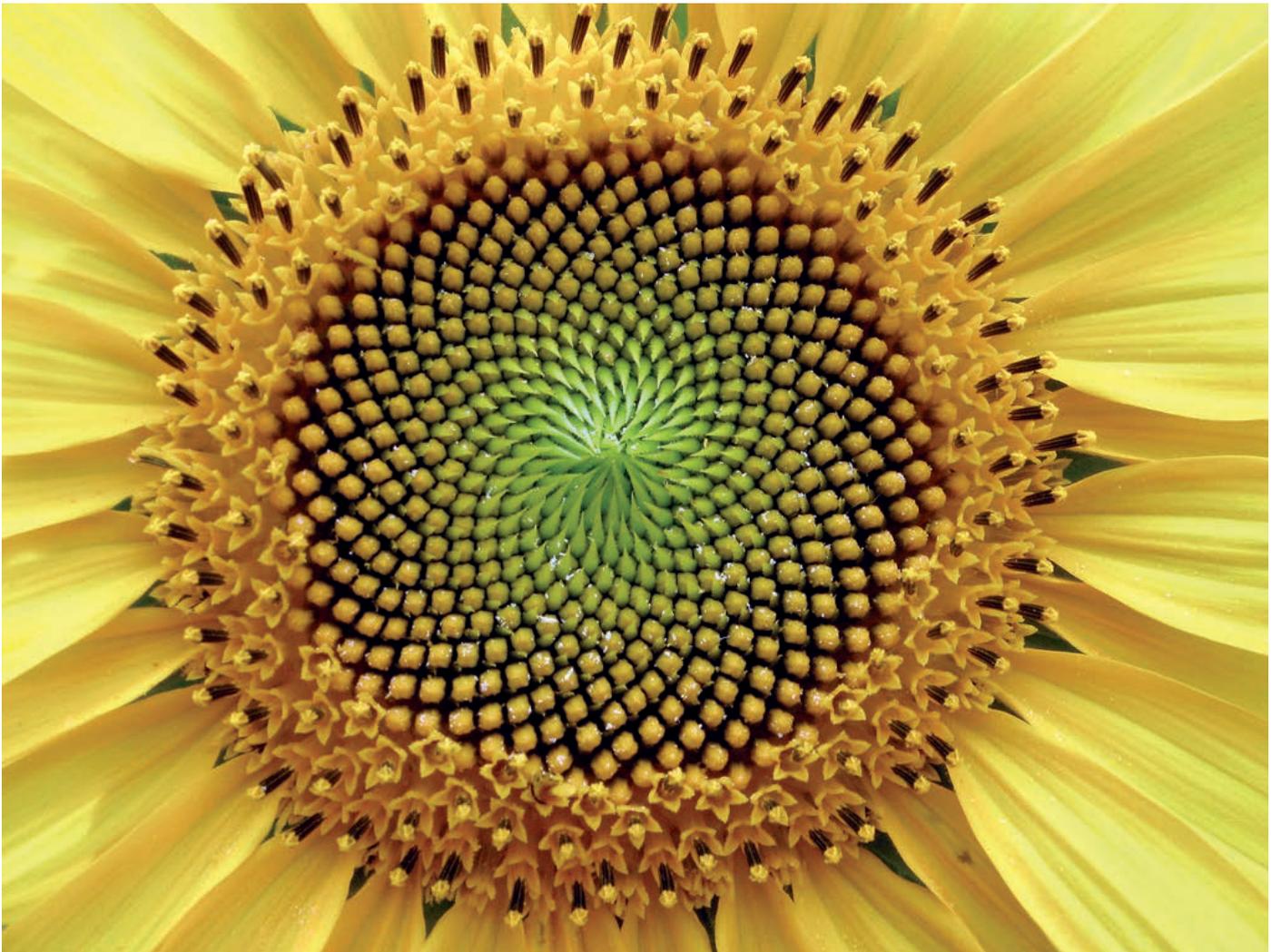
Che cosa hanno in comune il manto di un leopardo, il cavolo romanesco, e la corolla di un fiore? Ben poco, se non presentassero tutti pattern la cui formazione è frutto dell'interazione di componenti, i *morfogeni*, secondo leggi matematiche descritte sessanta anni fa da Alan Turing.

I pattern in natura sono osservati da sempre, e non è stato certo Turing il primo a riconoscere modelli matematici e schemi geometrici, per esempio, nella fillotassi delle piante. Era già passato mezzo millennio dagli studi di geometria di Leonardo da Vinci sulle piante [1], e sembrava che D'Arcy Thompson Wentworth avesse quasi esaurito, con il suo libro *On growth and form* [2] (in italiano *Su crescita e forma*) del 1917, quanto di matematico si potesse osservare sulla *morfogenesi*, che è il processo biologico della creazione delle forme negli organismi viventi. Il termine morfogenesi deriva infatti dalle parole greche *morphe* (che significa *forma*) e *genesis* (termine che ha lo stesso significato che in italiano), e indica il procedimento durante il quale un organismo sviluppa la sua conformazione. Nella biologia dello sviluppo, la morfogenesi è uno dei tre aspetti fondamentali, assieme alla crescita delle cellule e alla loro differenziazione, ed è quello che controlla la disposizione delle cellule nello spazio durante lo sviluppo dell'organismo.

Quando nel 1952 Alan Turing scrisse *The Chemical Basis of Morphogenesis* [3], la morfogenesi era appunto quella di D'Arcy Thompson Wentworth, il cui contributo fu quello di sottolineare l'importanza di meccanismi e leggi fisiche nella determinazione di certe forme degli essere viventi. Nel suo libro, D'Arcy Thompson elenca una grande quantità di correlazioni tra forme osservate negli esseri viventi, fenomeni meccanici e relativi modelli matematici. Egli mostra addirittura (e questa è forse tutto sommato l'osservazione scientificamente più originale del suo contributo) come forme differenti ma correlate osservabili in distinti esseri viventi possano essere viste come

il frutto una dell'altra mediante semplici trasformazioni matematiche nel modello di riferimento.

Tra gli "oggetti matematici" che più ricorrono osservati in natura, e che più hanno suscitato interesse, c'è la serie di Fibonacci. Essa prende il nome dal matematico pisano Leonardo Fibonacci che la definì nel XIII secolo. Si tratta di una serie infinita di numeri  $Fib(0), Fib(1), \dots, Fib(n), \dots$  nella quale per ogni intero  $i \geq 0$ , il valore di  $Fib(i)$  indica l' $i$ -esimo elemento della sequenza, e ciascuno di questi numeri è la somma dei due precedenti. Essendo i primi due valori definiti come  $Fib(0)=0$  e  $Fib(1)=1$ , la serie di Fibonacci è dunque 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ... e cresce molto velocemente. Di essa sono note moltissime proprietà interessanti, ed è da secoli oggetto di studio dei matematici. Fibonacci la ricavò nel tentativo di definire la discendenza dei conigli in un modello teorico del loro (elevato) tasso di riproduzione. Neppure lo stesso Fibonacci poteva immaginare in quanti fenomeni naturali (peraltro ben più reali del suo buffo modello di riproduzione dei conigli) i suoi numeri sarebbero stati osservati, anche a distanza di centinaia di anni. Per esempio, il numero dei petali di un fiore è molto spesso un numero di Fibonacci, per quanto questo possa variare al variare delle dimensioni e del tipo di fiore. È storicamente noto che Alan Turing fosse particolarmente intrigato dall'osservazione (che non fu lui il primo a fare) della ricorrenza dei numeri di Fibonacci nella disposizione dei pistilli sulle corolle dei girasoli. Essi sono posti lungo due insiemi di spirali che si intrecciano: in uno, queste girano in senso orario, e nell'altro in senso antiorario. Nonostante un'apparente simmetria, il numero di spirali in ciascun insieme non è mai lo stesso, ma la cosa sorprendente è che comunque si tratta di numeri di Fibonacci! Più precisamente, e ancor più sorprendentemente, i due numeri corrispondenti alle quantità di spirali nei due insiemi sono due numeri di Fibonacci consecutivi! Tipicamente, per esempio, le spirali che si svilup-



*Alan Turing era particolarmente intrigato dall'osservazione della ricorrenza dei numeri di Fibonacci nella morfogenesi dei girasoli.*

pano in senso orario sono trentaquattro, mentre quelle in senso antiorario sono cinquantacinque. In un fiore di girasole più grande se ne possono osservare, rispettivamente, ottantanove e cinquantacinque, che sono ancora una volta due numeri di Fibonacci consecutivi... Strutture a spirali intrecciate simili, con ancora i numeri di Fibonacci come protagonisti, si possono notare nel cavolo romanesco, nelle scaglie della buccia dell'ananas, in quelle delle pigne, e in generale in svariati organismi vegetali e animali (tra questi ultimi, ad esempio, le conchiglie di alcuni molluschi). La curiosità di Alan Turing per i pattern osservabili in natura non si limitava comunque alle spirali, bensì si estendeva alle strisce, ai pattern esagonali (molto frequenti in natura animale), ai cerchi concentrici, al manto di animali pezzati, nonché a molte altre forme meno apparentemente regolari.

Alan Turing aveva una sua possibile spiegazione sul perché i girasoli presentassero questa proprietà, e fra le tante celebrazioni di quest'anno per il centenario della sua nascita (Turing è nato nel 1912), ce n'è una che mira a fare un esperimento su larga scala per verificarla. Questo esperimento si chiama *Turing's sunflower* (in italiano *Il girasole di Turing*), ed è stato lanciato dal museo della scienza e dell'industria di Manchester (la città dove Turing visse gli ultimi anni della sua vita). Consiste nell'invito a chiunque a coltivare un girasole e sottoporre

in un opportuno sito i dati sui numeri delle spirali osservate nel fiore adulto. I risultati verranno resi noti nel corso dell'edizione 2012 del Festival della Scienza di Manchester, che si terrà in autunno e che oltre a questa vedrà numerose altre iniziative legate alle celebrazioni di Alan Turing.

Gli studi di Turing sulla morfogenesi trovarono senza dubbio ispirazione e motivazione in queste osservazioni che lo avevano tanto affascinato. Il contributo dato da Turing alla morfogenesi è meno estensivo di quello di D'Arcy Thompson Wentworth, ma non per questo meno importante, e presenta numerosi spunti innovativi. Innanzitutto, come suggerisce il titolo del suo lavoro (tradotto in italiano, "le basi *chimiche* della morfogenesi"), sposta l'attenzione dalla meccanica e dai meccanismi della morfogenesi, alla *chimica* delle sue componenti. Queste, che egli chiama i *morfogeni*, sono gli agenti di un vero e proprio sistema nel quale essi co-operano per il meccanismo della morfogenesi. I morfogeni, appunto, sono molecole che diffondono, e dunque propagano, un segnale che controlla la differenziazione delle cellule con modalità che dipendono dalla concentrazione dei morfogeni stessi. Per la fluttuazione di queste quantità chimiche, Turing esibisce precisi modelli matematici e ne applica le relative leggi. E anche il modello matematico da lui proposto è di per sé una novità per la teoria

della morfogenesi: un sistema continuo di equazioni differenziali che rappresenta dinamiche non lineari. Con tale modello, Alan Turing riesce a catturare la sua geniale intuizione che i pattern osservabili in natura, con la loro simultanea ripetitività e variabilità, siano frutto di un'interazione di sostanze chimiche le cui concentrazioni hanno iterati effetti reciproci. Tali effetti sono, a ciascuna iterazione, simili qualitativamente e, al tempo stesso, leggermente diversi quantitativamente, dando conseguentemente luogo alla formazione dei pattern.

Turing descrive il suo sistema come un modello che opera tramite *azione, reazione, e diffusione*. L'intento è di modellare come la concentrazione di una o più sostanze distribuite nello spazio possa cambiare sotto l'influenza reciproca, oltre che delle rispettive reazioni interne. Tale sistema parte da una conformazione determinata dalle quantità delle componenti chimiche nello stato iniziale e poi evolve variando le quantità stesse secondo leggi matematiche. Nell'ambito di queste fluttuazioni si possono raggiungere vari tipi di equilibri stabili del sistema, dove la stabilità è frutto di una sostanziale simmetria; la rottura di questa simmetria è ciò che causa la transizione (continua, non discreta) da uno stato stabile all'altro. La varietà delle irregolarità che rompono la simmetria, osserva Turing, è enorme e di difficile investigazione; fortunatamente, invece, la varietà degli stati di equilibrio che possono essere raggiunti è limitata: sono solo sei, e Turing nel suo lavoro li analizza tutti, fornendo ipotesi sul tipo di morfogenesi cui ciascuno di essi può dare eventualmente luogo. In particolare, la non ovvia osservazione di Turing è che in un sistema a più componenti, la diffusione nello spazio di un morfogeno possa essere essa stessa causa della non stabilità del sistema globale, laddove senza di essa nel sistema locale di ciascuna singola componente vi sarebbe stata stabilità. Questo può risultare in qualche modo controintuitivo, dato che alla diffusione viene più facilmente attribuito un effetto stabilizzante. Quasi come volesse mettere le mani avanti su questa e altre novità che il suo modello introduceva nella biologia dell'epoca (dove egli era peraltro nuovo), nel sommario del suo *Le basi chimiche della morfogenesi* Turing introduce il suo modello come «matematicamente pratico, ma biologicamente inusuale». Infatti Turing, sempre nel sommario del suo lavoro sulla morfogenesi, dice anche molto onestamente e modestamente che dal punto di vista della matematica il suo lavoro non presenta alcuna originalità. Questo non è del tutto vero: ad esempio, tra i notevoli spunti di questo modello si trova anche la nozione pionieristica di *drift esponenziale*, qualcosa di molto simile a quella che, a seguito dei lavori di David Ruelle degli anni Settanta [4], verrà chiamata «sensibilità alle condizioni iniziali».

Il modello di Turing per la morfogenesi ha i limiti di tutti i modelli, e forse qualcuno in più a causa della complessità dello specifico fenomeno rispetto a quanto poco fosse (e ancora sia) noto dei fattori che lo influenzano. Ma di questo Alan Turing era cosciente: per sua stessa onesta ammissione «questo modello sarà una semplificazione e un'idealizzazione, e di conseguenza una falsificazione». Ma per quanto semplificato sia il modello, esso coglie aspetti fondamentali confermati nel corso di decenni e formalizza l'intuizione che la regolarità e la casualità dei pattern in natura siano frutto di interazioni modellabili con equazioni differenziali e non lineari.

Il contributo di Alan Turing alla scienza con *The Chemical Basis of Morphogenesis* è stato non meno geniale e rivoluzionario dei suoi più noti contributi scientifici alla teoria della calcolabilità e all'intelligenza artificiale. I motivi della minore notorietà di questo lavoro sono forse da cercare nella storia della scienza e della tecnologia del secolo scorso, durante il quale l'impatto dell'informatica sulla società è stato ben più tangibile di quello della morfogenesi. Inoltre, la morfogenesi dopo il 1952 si è trovata ad essere trascurata nell'ambito della biologia: nel 1953, l'anno successivo al lavoro di Turing, James Watson e Francis Crick svelarono la struttura del DNA. Da allora, in genetica è successo di tutto: si sono formulati e smentiti dogmi, e negli ultimi decenni il sequenziamento dei genomi è stato al centro della ricerca biologica. È sembrato che tutto si potesse spiegare e decifrare studiando i geni, ma per capire i meccanismi dello sviluppo i geni non bastano: ci vogliono proprio i morfogeni di Turing (che poco hanno a che vedere coi geni nonostante l'assonanza).

Il lavoro sulle basi chimiche della morfogenesi di Turing ha fornito agli studiosi di matematica un modello di cui studiare i comportamenti, e ai biologi uno schema in cui inserire parametri quali i morfogeni che entrano in gioco, e le loro quantità (iniziali), per modellare specifici fenomeni di morfogenesi osservati. Tutto questo si aggiunge, con novità radicali dal punto di vista del metodo, al contributo già rivoluzionario dato da Turing alla nascita dell'informatica. Inventando nel 1936 quella che lui denominò la *Logical Computing Machine* e che è oggi nota come la Macchina di Turing Universale, con le sue istruzioni e il software ben distinto dall'hardware, Turing ha posto le basi teoriche per la scienza informatica che sta cambiando il mondo. Tale invenzione era allora puramente logico-matematica e la macchina era completamente astratta: uno strumento virtuale per rappresentare le azioni di un uomo nell'atto minimale del calcolo (egli parla infatti di «human computer»). La natura fisica della macchina calcolatrice viene pensata da Turing solo nel dopoguerra. Allora, nel 1950, chiama la sua macchina *Discrete State Machine* (in italiano «Macchina a Stati Discreti») [5] ed osserva che questa, dal punto di vista fisico, è *laplaciana*, ovvero implementa una determinazione predicibile (del resto i programmi devono ben fare quello per cui sono stati scritti...). Turing capisce anche che la questione è dovuta all'esattezza della base di dati e alle elaborazioni discrete e che una imprevedibilità può essere solo pratica. Manca cioè, alla sua Macchina, l'inevitabile approssimazione della misura fisica (l'errore, dice Turing, è un «fatto di principio» in fisica classica). Dice, della sua macchina a stati discreti, che si tratta di una macchina che «si muove per salti improvvisi, o per click, da uno stato piuttosto definito ad un altro» [5]. E poi asserisce, anticipando le motivazioni del suo lavoro sulla morfogenesi, che «in senso stretto, queste macchine non esistono. Tutto nella realtà si muove in modo continuo». Questa osservazione di Turing, assieme a quella che una fluttuazione al di sotto del misurabile possa produrre «una valanga che causa la morte di uomo un anno dopo» o dinamiche imprevedibili nel cervello (ovvero, quello che lui chiama *drift esponenziale*) vanno ben oltre le semplici dinamiche lineari di D'Arcy Thompson Wentworth: Turing introduce idee sulla non linearità pro-

poste da Poincaré sessanta anni prima per la Meccanica Celeste e molto poco sviluppate da altri fino ad allora e tutto questo per analizzare dinamiche fisico-chimiche nel vivente!

Dal punto di vista matematico, lavora semplicemente sulla approssimazione lineare di tali dinamiche, ma le sue osservazioni informali sulle conseguenze della non-linearità, sul drift esponenziale, e su quella che egli chiama «instabilità catastrofica», nonché la sua analisi del sistema al momento del cosiddetto «avvio dell'instabilità», mettendo in evidenza ed enucleando le rotture di simmetria, rendono l'articolo del 1952 assolutamente rivoluzionario per l'epoca. Inoltre, è davvero ammirevole come l'inventore della macchina a stati discreti ne colga, oltre che le potenzialità, anche i limiti per la modellizzazione di processi fisici di azione, reazione, e diffusione. Il modello proposto nel lavoro sulle basi chimiche della morfogenesi va decisamente a colmare questa lacuna nel repertorio dei modelli proposti da questo scienziato. Si rivolge a dinamiche continue, come le definisce lui stesso, coglie l'interesse e la diversa espressività delle matematiche del continuo rispetto al discreto, e insegna a resistere alla tentazione di trasferire piattamente le tecniche dell'una sull'altra, mostrando piuttosto come esse possano essere reciprocamente arricchite. Questo straordinario scienziato, la cui poliedricità sembra confrontabile a quella di Leonardo, ha messo a disposizione della collettività contributi fondamentali in discipline molto distanti e fornendo contributi basati su filosofie opposte, quali sono il discreto e il continuo. Forse una delle chiavi della poliedricità di cui sopra sta proprio nella profondità delle osservazioni che possono emergere analizzando, coltivando e confrontando questi due concetti opposti. Leggendo Turing, difatti, si capisce come in matematica il discreto ed il continuo organizzino il mondo diversamente, che il discreto non è una approssimazione del continuo. Come in una immagine statica scomposta in pixel, appena appena un po' di interazioni dinamiche si descrivono meglio con la non-linearità: le traiettorie divergono rapidamente e non ovvi (e successivi) teoremi di *shadowing* danno deboli garanzie alla validità della simulazione numerica di processi continui (semmai, per ogni traiettoria nel discreto, ne esiste una continua che l'approssima, e non viceversa!). Turing propone cioè, molto coraggiosamente, uno sguardo sulla fisica del vivente di tipo radicalmente diverso da quello che inizia a dominare proprio in quegli anni: scarta di fatto l'approccio di Schroedinger del 1944 sulla codifica genetica delle dinamiche biologiche (dice che i geni, quelli dei cromosomi, hanno forse un "ruolo enzimatico"), coglie le sfumature e la ricchezza delle instabilità dinamiche rispetto alla sua prevedibile macchina a stati discreti laplaciana, che è per principio perfettamente stabile. Oggi si sa simulare in modo magistrale il continuo con il discreto, ma i limiti concettuali sono gli stessi che allora. E, soprattutto, le implicite filosofie della

natura sono ben diverse: Turing, con un hardware senza software che si evolve per deformazioni continue, apprezza le sfumature di dinamiche che sono, nello sguardo sulla natura, l'opposto di quello che ci propone il trasferimento piatto della sua macchina sul mondo.

Turing è sopravvissuto solo due anni a questo suo ennesimo contributo alla comunità scientifica ma, tra l'ambito matematico e quello della biologia dello sviluppo, sono moltissimi nella letteratura scientifica i lavori che hanno fatto seguito al suo del 1952. Soltanto per citarne uno [6] molto recente, alcuni studiosi inglesi, giapponesi, e svedesi, hanno pubblicato nel febbraio 2012, e dunque a sessanta anni di distanza da *Le basi chimiche della morfogenesi*, uno studio che mostra evidenza di un sistema di reazione e diffusione del tipo di quello suggerito da Turing, espresso da una coppia di morfogeni che questi studiosi hanno isolato e individuato, e che operano reciprocamente come attivatori e inibitori, dando luogo ad una reazione che produce pattern per le nervature del palato di topi che variano proprio secondo il modello di Turing. Chissà in quale altra disciplina Alan Turing, il matematico, avrebbe sfogato la sua curiosità e sbizzarrito il suo genio, dopo i suoi contributi nell'informatica alla teoria della calcolabilità, alla crittoanalisi e alla storia (con il suo determinante apporto durante la seconda guerra mondiale) all'intelligenza artificiale (e dunque un po' anche alla filosofia) e, infine, alla biologia con le sue idee sulla morfogenesi, se non fosse stato costretto al suicidio poco più che quarantenne.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Manoscritto di Leonardo da Vinci visibile on-line alla pagina <http://brunelleschi.imss.fi.it/genscheda.asp?appl=LIR&xsl=paginamanoscritto&chiave=101407>.
- [2] **THOMPSON D.W.**, *On growth and Form*, Cambridge University Press, 1917.
- [3] **TURING A.M.**, «The Chemical Basis of Morphogenesis», *Philosophical Transaction of the Royal Society of London* 237 (641), 37-72, agosto 1952.
- [4] **RUELLE D., TAKENS F.**, «On the nature of turbulence», *Communications in Mathematical Physics* 20 (3), 167-192, 1971.
- [5] **TURING A.M.**, «Computing Machinery and Intelligence», *Mind* 51, 433-460, 1950.
- [6] **ECONOMOU A.D., OHAZAMA A., PORNTAVEETUS T., SHARPE P.T., KONDO S., BASSON M.A., GRITLI-LINDE A., COBOURNE M.T., GREEN J.B.A.**, «Periodic stripe formation by a Turing mechanism operating at growth zones in the mammalian palate», *Nature Genetics* 44(3), 348-351, febbraio 2012.

Nadia Pisanti

è ricercatrice presso il Dipartimento di Informatica dell'Università di Pisa.

Giuseppe Longo

è Directeur de Recherche CNRS, Ecole Normale Supérieure, Parigi, Francia.