

L'infinito matematico “in prospettiva” e gli spazi dei possibili¹

Giuseppe Longo

<http://www.di.ens.fr/users/longo/> Centre Cavailles, République des Savoires,

CNRS, Collège de France et Ecole Normale Supérieure, Paris,

and Department of Integrative Physiology and Pathobiology,

Tufts University School of Medicine, Boston

Breve introduzione all'infinito

Non c'è spazio nella geometria greca. Più precisamente, non c'è una matematizzazione, né una concettualizzazione dello spazio, né del piano: li si usa, *in pratica*. In Euclide infatti, il piano è un apeiron, senza limiti, senza confini, luogo di una *pratica scientifica*: la costruzione geometrica. Si tracciano delle linee con la riga e il compasso, si costruiscono *figure* senza dare una descrizione a priori di un contenitore infinito “dietro” di loro. Simmetrie – rotazioni e traslazioni – sono gesti fondanti e costruttivi in Euclide, producono la prova, nel finito. E l'apeiron, infinito potenziale, spaziale e numerico, è costruito per estensioni, per iterazioni. Così, si estende senza limite finito il segmento in una retta (il secondo assioma), *eis apeiron*; da un insieme di numeri primi si ottiene un nuovo numero primo più grande di ogni elemento dell'insieme (teorema dell'infinità dei numeri primi). Un'estensione e un'iterazione senza fine del finito, del gesto che traccia la retta, della costruzione dei numeri interi e di quelli primi. In questo senso anche il tempo è infinito, mai presente al nostro pensiero nella sua totalità. L'infinito non è quell'aldilà oltre il quale non vi è nulla - afferma Aristotele nella *Fisica* - ma è quell'aldilà oltre il quale vi è sempre qualcosa. E' un divenire.

Paolo Zellini² spiega che la distinzione aristotelica tra questo infinito matematico, da costruire un passo dopo l'altro, *potenziale*, e l'infinito che è già, che è *in atto*, che è capace di inglobare tutto, sarà ripresa nel corso del dibattito teologico medievale. Dio è un infinito che avvolge tutto, include tutto, al di là del quale nulla è dato. Ma il concetto di infinito attuale non è semplice. Per gli Aristotelici, come per Aristotele, è concepito per negazione; e Dio non può avere un attributo negativo.

San Tommaso tuttavia sarà risoluto nell'escludere l'esistenza di un tale infinito in atto, se non come attributo di Dio e solo di Dio, cui tuttavia lo riconosce. Ed il concetto di infinito attuale si rafforza, dunque, si precisa positivamente nella filosofia del XIII secolo, nel dibattito sugli attributi di Dio. Al punto che il vescovo di Parigi, Etienne Tempier, nel 1277, stabilirà per decreto che l'infinito attuale è un attributo positivo di Dio e della sua creazione. Dio, se lo vuole, pone l'infinito in atto anche nel mondo degli uomini; ne è esempio l'attribuzione della

¹ In “*Dianoia. Rivista di Filosofia*”, (numero speciale, a cura di A. Angelini) n. 19 (2014); traduzione di A. Angelini e revisione dell'autore a partire dal testo pubblicato in *Le formalisme en action : aspects mathématiques et philosophiques*, J. Benoist, T. Paul (eds), Hermann, 2012 (in inglese in “**Visible**”, *Semiotics Journal*, n. 9, 2011).

² P. Zellini, *A brief history of infinity*. New York: Penguin, 2005 (in italiano: Adelphi, Roma, 1980).

Grazia Piena e Infinita anche a una donna, finita, Maria (il rogo era pronto per chi non fosse stato d'accordo). Questa "posizione assiomatica" forte contribuirà a consolidare il concetto di infinito, anche matematico, si spiegherà, e le sue distinzioni.

Opportunamente Zellini ha sottolineato l'importanza di questo dibattito nella nascita di una cosmologia dell'infinito che troverà la sua maturazione, anzitutto mistica, negli universi infiniti e negli "infiniti mondi" di Nicola Cusano (1401-1464) e di Giordano Bruno (1548-1600).

L'infinito nel quadro³

Il concetto di infinito attuale si definisce quindi entro una discussione metafisica, anzi teologica, che abbraccia l'infinito come un'unica "cosa" e costringe il pensiero a concepirlo nella sua totalità. Ma in che modo passa all'ambito della matematica divenendo oggetto rigoroso di un discorso razionale, se non una componente della prova? Il passaggio si compie attraverso l'invenzione della prospettiva nella pittura italiana.

A partire dalla fine del XIII secolo, il problema della rappresentazione dei luoghi nei quali distribuire le figure della narrazione è al centro dell'attenzione dei pittori. Le "scatole" giottesche ("case di bambole", dicono gli esperti, prive di muro, aperte verso lo spettatore) sono luoghi che hanno la finalità di contenere l'*historia* e di rendere comprensibile l'insegnamento teologico in esse contenuto. Ma in Giotto manca un'organizzazione globale dello spazio, né ci sono linee e punti proiettivi che propongano una prospettiva. Sono i gesti umani, il dolore, a costruire la profondità dello spazio nella deposizione di Padova: il peso dei corpi delle donne schiacciate dal lutto, quella in verde fra le altre; il movimento delle braccia dell'uomo al centro, la disperazione degli angeli La manifestazione corporea del dolore impone una spazialità nuova (Padova, Cappella degli Scrovegni, 1303-1306).

3 Questa sezione è dovuta all'insegnamento di mia figlia Sara Longo e si ispira ad una piccola parte del suo lavoro di Tesi di Dottorato in Storia dell'Arte "Voir et savoirs dans la théorie de l'art de Daniel Arasse", difesa il 5/7/2014, Paris I – Sorbonne ed ad alcuni suoi lavori, cui si rinvia. Fra questi, D. Arasse, **Il Soggetto Nel Quadro**, (a cura di S. Longo) Edizioni E T S, Pisa, 2009, e, soprattutto: "L'annonciation en Italie. Enjeux méthodologiques et historiographiques, autour du colloque florentin de 1986", "La perspective de l'Annonciation", présentation d'une étude de Daniel Arasse" et "L'intervalle sacré", *Studiolo X* (2010), revue de l'Académie de France à Rome; si veda: <http://hicsa.univ-paris1.fr/page.php?r=23&id=216&lang=fr>



Erwin Panofsky ha messo in evidenza come una pittura di poco posteriore, l'Annunciazione di Ambrogio Lorenzetti (fig. 2), sia la prima costruzione geometrica che esplicita una struttura globale dello spazio e lo rende "visibile". In essa, le linee di fuga, le linee del pavimento, convergono, non però verso un unico punto, ma verso un asse verticale ("dietro" la colonna che separa Gabriele da Maria). Daniel Arasse si è spinto oltre nell'estendere questa analisi allo sviluppo, del tutto particolare, di costruzioni geometriche complesse nelle scene dell'Annunciazione a Maria⁴. Lorenzetti, prete e teologo, *organizza* lo spazio, impone un'unità, una geometria, e lo fa mostrando una traccia di Dio, limite infinito di ogni cosa: la linea di convergenza di tutte le linee, un *asse di fuga*, non un punto. Una colonna, fra l'Angelo e la Madonna, spesso presente nelle Annunciazioni come simbolo del Cristo, colonna della Chiesa, è ben salda e concreta a terra, incarnata, mentre si assottiglia verso l'alto, diviene un'ombra, che si confonde all'asse di fuga, all'infinito: un esplicito riferimento a Dio, che è dietro il suo figliolo e, al limite, vi si identifica, identità una e trina.

⁴ D. Arasse, **Histoires de peintures**, Gallimard, 2004; D. Arasse **L'annonciation italienne**, Hazan, nouvelle édition, 2010.



Ecco dunque la straordinaria novità, nel 1344: uno spazio proiettivo disegnato con rigore. E di conseguenza, per effetto della geometria di questo pavimento che va dall'uomo a Dio, si dispiega un nuovo spazio: Dio vi ha il suo posto, nascosto, inaccessibile, lontano, al limite infinito, ombra dell'infinito pur presente nella storia narrata. Ma così, grazie a questa nuova forma simbolica del divino, la prospettiva, i personaggi, l'Angelo, la Madonna acquisiscono un nuovo spessore umano: il loro corpo solido, tridimensionale, accompagna l'espressione di un umanismo che viene delineandosi. La prospettiva introduce Dio come limite attuale, all'infinito, dietro quella colonna che si trasfigura nell'ombra, nella traccia dell'infinito, arrivando a confondersi con il limite di uno spazio che ingloba tutto, anche gli spazi umani che si rinnovano. I primi dipinti in «prospettiva» sono quasi esclusivamente Annunciazioni, luogo primario dell'incontro infinito/finito o solo nelle Annunciazioni e molto a lungo la prospettiva verrà rappresentata con il rigore massimo: il punto di convergenza all'infinito è mostrato con chiarezza, evidenza al finito dell'infinito in atto di Dio (si vedano ad esempio gli affreschi di Beato Angelico a San Marco: solo nelle due Annunciazioni il punto proiettivo, di convergenza delle strutture architettoniche, è chiaramente mostrato allo spettatore).

L'argomentazione che abbiamo ripreso, di Daniel Arasse, ha un'indiscutibile pertinenza per la nostra finalità: la particolare affinità che Arasse mette in evidenza, nel corso del XIV e XV secolo, tra Annunciazione e prospettiva, è dovuta al fatto che, nella storia cristiana, il momento in cui l'infinito entra nel finito è precisamente quello dell'avvento miracoloso del figlio di Dio nella carne umana, con l'incontro tra Dio e la Madonna piena di Grazia, infinito in atto si diceva. Per suffragare ulteriormente la sua tesi, l'autore fa riferimento a un sermone di san Bernardino da Siena, pronunciato sul Campo di Siena nel 1427: l'Annunciazione è il momento in cui "l'immensità viene nella misura... l'irraffigurabile nella figura... l'inindividuabile nel luogo, l'invisibile nella visione... la lunghezza nella brevità, la larghezza nell'angustia, l'altezza nella bassezza"⁵; paradossi concettuali, questi, che sono all'origine dei paradossi spaziali dei pittori. Daniel Arasse mette altresì in rilievo come i pittori della prospettiva più esperti si divertano a giocare con le regole della geometria delle tre

5 San Bernardino de Siena, *De triplici Christi nativitate*, dans *Opera omnia*, Venise, 1745, IV, p. 3, citato in *San Bernardino de Siena, Pagine scelte*, Milano, 1950, p. 54 .

dimensioni rappresentate in due per mostrare il paradossale avvento dell'infinito nel finito. Nella tesi di dottorato su Daniel Arasse, Sara Longo (vedi nota supra) ne ha ripreso le intuizioni, mostrando il fine intreccio fra teologia e geometria. Le traiettorie delle colombe, ad esempio, in alcune Annunciazioni, sono rette apparenti, curve per lo spettatore attento ed esterefatto (si osservi il raggio di luce, "intervallo sacro", percorso dello Spirito Santo, in questo dipinto di Crivelli: è una retta sul piano del quadro, ma curva improvvisamente a sinistra, nello spazio, per penetrare nella stanza della Madonna).



CRIVELLI Carlo, *Annonciation avec saint Emidius*,
1486, détrempe sur bois, 207 x 146,7 cm.
Londres, National Gallery.

Il gioco, geometricamente molto raffinato, consiste nel tracciare una retta sulla tela, che è proiezione di curva nello spazio, e mostrare così un miracolo possibile, all'epoca, solo a Dio: piegare una retta euclidea, curvare un raggio di luce

Come si diceva, lo spazio matematico così inventato, fornisce al pittore il luogo dove esprimere sia un discorso teologico sia la nuova umanità rinascimentale. La prospettiva sperimentata da Filippo Brunelleschi nel 1417 e definita nel 1435 da Leon Battista Alberti, è l'atto di una *costruzione* nella quale l'uomo è all'origine di ogni misura e l'infinito, punto di convergenza delle ortogonali alla base del quadro, è contenuto, racchiuso, entro il quadro della rappresentazione (si veda Alberti, *De pictura*, I, 19). A partire dagli anni Ottanta, per effetto dell'articolo d'avanguardia di Erwin Panofsky (*La prospettiva come forma simbolica*, 1925), storici dell'arte dell'École des Hautes Études en Sciences Sociales come Hubert Damisch o

Louis Marin hanno messo in evidenza l'importanza della rivoluzione pittorica costituita l'invenzione della *costruzione legittima*. Successivamente infatti, con Piero della Francesca, tale declinazione pittorica di una dimensione metafisica diventa anche una tecnica, senza per questo perdere la sua anima religiosa. Il libro di Piero, *De prospectiva pingendi*, costituisce un autentico trattato di geometria proiettiva "pratica", per pittori; il testo più importante di matematica della sua epoca, come scriverà Vasari. La matematizzazione rigorosa (Desargues) seguirà di circa due secoli.

Si noti che la "prospettiva" consente al pittore di organizzare lo spazio degli uomini e delle cose e di scegliere un punto di vista. La scelta della localizzazione del punto di fuga fissa la visione dello spettatore; propone/impone uno sguardo sull'evento. Si noti il punto di vista di chi - umilmente, dal basso - vede il *San Sebastiano* di Antonello da Messina (1476):



Ecco dunque che questa metafisica e cosmologia religiosa diventa geometria dello spazio: Dio, gli astri e gli uomini vi trovano una nuova ubicazione, organizzata da un punto di vista unificante e *modificabile*. Siamo ben lontani dagli assoluti fuori dallo spazio e dal mondo dei mosaici bizantini di Ravenna.

Questa (ri)organizzazione dello spazio, questo nuovo talento nella scelta di una "prospettiva" - tecnica che presto si diffonderà in Europa - aiuterà Copernico, Keplero e Galileo a "vedere" il sistema solare dal "punto di vista del Sole": è la nuova "prospettiva" della scienza moderna⁶. E soprattutto, aprirà la strada alla costruzione matematica dello spazio per la fisica, da Descartes e Desargues, fino a Newton.

⁶ E' una osservazione di B. C. van Frassen, **An introduction to the Philosophy of Space and Time**, Random House, New York, 1970.

Intermezzo: il limite del tempo e l'algebra

Sin da Aristotele il tempo è considerato un infinito potenziale paradigmatico in quanto non è mai presente al pensiero nella sua totalità. In effetti, quale senso "temporale" avrebbe il suo limite proiettivo?

E' invece interessante osservare l'introduzione, nell'ambito delle scienze matematiche, del concetto di infinito attuale cui si è fatto riferimento. Un concetto che è stato dunque concepito nel quadro di una riflessione religiosa e si è definito per il tramite della pittura. Una pittura, si diceva, che un grandissimo pittore e geometra più di ogni altro, Piero della Francesca, ha dato una prima matematizzazione. Lo si comprende osservando come la costruzione concettuale e geometrica di uno spazio infinito non poggia necessariamente su un infinito attuale: lo spazio di Cartesio può certamente essere concepito come un infinito in potenza, come un'estensione senza fine a partire dalla sua origine. L'infinito attuale, invece, attiene alla costruzione proiettiva, che Desargues matematizzerà compiutamente. Essa consente la rappresentazione bidimensionale di uno spazio tridimensionale. Il punto di fuga *oggettiva* l'infinito attuale; lo *mostra* lì, in fondo al dipinto, ne è la prima rappresentazione simbolica. In sostanza, nel Rinascimento, lo spazio matematico, tridimensionale, è pensato a partire dal modo in cui è disegnato: è stato reso intelligibile (visibile) sul piano grazie alla rappresentazione dell'infinito attuale, ombra, traccia di Dio nel quadro, la retta od il punto proiettivo.

Due secoli dopo Desargues, si diceva, rende pienamente matematica questa sintesi proiettiva tra infinito e geometria. Nel calcolo infinitesimale che inventeranno, Newton e Leibniz propongono le nozioni di derivata e di integrale quali operazioni di limite infinito, in spazi assoluti, pre-esistenti agli oggetti.

Cantor, nel XIX secolo, oggettiva ulteriormente l'infinito attuale attraverso una sintassi, associandogli un simbolo. Maneggiandolo algebricamente, fa somme e prodotti, ne costruisce così un'infinità fino a inventare un'aritmetica degli infiniti, degli ordinali e dei cardinali transfiniti, scrivendo limiti di limiti, ed operando su essi. Nulla può stabilizzare un concetto meglio dell'uso operativo rigoroso di un segno in luogo del concetto, il cui senso risulterà arricchito da questo stesso utilizzo. Anche Cantor, uomo profondamente religioso, prende parte al dibattito sull'infinito di Dio: Dio è (al) limite di tutti i limiti, è oltre i suoi transfiniti.

È bene osservare che in tutti questi casi l'infinito matematico è uno strumento per rendere intelligibile il mondo. Nella pittura rinascimentale la geometria proiettiva – scelta mistica – organizza lo spazio degli uomini per un'umanità più piena. Da Cartesio fino all'infinito attuale di Newton e Leibniz, è per mezzo di infiniti che la fisica-matematica rende il movimento intelligibile al finito dal quale siamo circondati. A partire da Gentzen (1935), in

7 Nel tentativo di rendere compatibile la Relatività con la teoria del Big-Bang, alcuni fisici pensano all'origine del tempo come limite asintotico inverso, all'inverso cioè della direzione del tempo imposta dall'espansione dell'Universo. Infatti, i teoremi di Noether (la conservazione dell'energia e della quantità di moto come simmetrie nell'equazioni del moto, ovvero traslazioni temporali e spaziali) sono al cuore della svolta relativistica e sono incompatibili con un'origine del tempo (e dello spazio), si veda F. Bailly, G. Longo, **Mathematics and Natural Sciences : the Physical Singularity of Life**, Imperial College Press, London, 2011 (Traduction et révision du livre pour Hermann, Paris, 2006).

logica, l'analisi ordinale della prova si basa sull'aritmetica degli infiniti di Cantor⁸. D'altronde, già Galileo spiegava a Simplicio, nell'analisi di una sfera matematica che poggia su un piano *su un solo punto*, che la matematica è una scienza al limite infinito⁹. Il finito fa dell'iterazione un feticcio e ne rimane prigioniero¹⁰. Il formalista finitista che respinge l'infinito dichiarandolo fuori dal mondo e fuori dall'ordine fisico non comprende il *senso umano*, per le nostre prassi di intelligenza del mondo, di quel gesto che pone l'infinito per organizzare il mondo, mediante il linguaggio, la geometria e la scrittura, la forma simbolica, a partire da quel segno, il punto proiettivo sulla superficie di un quadro, superficie che diventa così un nuovo spazio per la rappresentazione gli uomini.

Un'epistemologia di questo concetto organizzatore richiede una declinazione storica: una storia delle idee e delle prassi costitutive, una storia dinamica, sempre da rivedere, da aggiornare, come ogni epistemologia.

Gli spazi razionali delle attività commerciali e della fisica¹¹

La nascita della scienza moderna avviene dunque attraverso la costruzione di uno spazio infinito *dei possibili*, uno spazio e un tempo di tutti i fenomeni e di tutte le dinamiche possibili. La scelta dell'origine delle coordinate cartesiane propone il sistema di riferimento in cui verrà costruita la fisica dopo Galileo. Infatti, l'approccio analitico di Cartesio stabilisce l'origine e la misura dello spazio, conferisce una "prospettiva" a partire dalla quale potrà essere disciplinato e compreso il mondo.

In tale contesto, la relazione galileiana, ricca e innovativa, tra esperienza e teoria, assume come proprio scopo, il rendere intelligibili e prevedibili i fenomeni: prima si osserva, si misura e, successivamente, la teoria dovrebbe originare una predizione che permette di verificare la teoria stessa. L'anticipazione scientifica - di fatto matematica - del futuro si pone allora al centro dell'intelligibilità del mondo proposto dalla scienza moderna. E tale predizione si svolge nello spazio e nel tempo degli eventi fisici, matematicamente descritti dalla rappresentazione analitica cartesiana arricchita dalla relatività di Galileo: lo spazio-tempo moderno dei fenomeni è sorto da un'analisi del passaggio da un sistema di riferimento cartesiano - possiamo dire da, un punto di vista - a un altro, mantenendo invariate, in questo passaggio, le leggi della fisica a partire dal movimento inerziale. Più precisamente: nello

8 L'infinito è essenziale alla prova, sotto forma di "buon ordine", anche in *Artimetica*, v. G. Longo "Incompletezza" in **"La Matematica"**, vol. 4, pp. 219 - 262, Einaudi, 2010; G. Longo "Reflections on Concrete Incompleteness", **Philosophia Mathematica** 19(3): 255-280, 2011.

9 Questa riflessione di Galileo è ben ripresa un piccolo/grande libro: A. Gargani, **Il sapere senza fondamenti**, Einaudi, 1975.

10 G. Châtelet, **Les enjeux du mobile**, Seuil, Paris, 1993 (introdotto e tradotto in italiano, da A. Cavazzini, Mimesis, 2010).

11 Una versione preliminare, in inglese, di questa parte è apparsa come interview-blog in National Public Radios (NPR, USA), <http://www.npr.org/blogs/13.7/2011/06/13/137154418/are-financial-and-scientific-views-of-the-world-similar#more>

spazio-tempo *infinito* di tutte le traiettorie possibili, dato *a priori*, gli invarianti sono descritti in termini di simmetrie - il gruppo delle trasformazioni di Galileo, si dirà poi.

Tuttavia, è forse opportuno collocare anche il passaggio verso il mito della predizione razionale di un futuro scientificamente prevedibile, negli *spazi di tutti i possibili*, all'inizio del Rinascimento italiano. L'audacia di dotarsi di un'intuizione del futuro attraverso strumenti *razionali* ed all'interno di uno spazio di possibilità date, risale alla valutazione del progresso e alla capacità di ottenerne stime quantitative in Italia nel XIV e nel XV secolo. A quel tempo infatti le tecnologie degli artigiani, anzi delle grandi strutture produttive (l'"arsenale di Venezia" di cui parlerà Galileo) iniziano a modificare il rapporto con la Natura stessa. Non a caso, l'invenzione del *credito bancario* risale proprio all'epoca del dipinto di Lorenzetti (fig.2), nella stessa Toscana. Le scienze matematiche avranno in seguito un ruolo fondamentale in tale progresso: Luca Pacioli (1445 - 1517), in particolare, con la *Summa de Arithmetica*, la *Geometria* e altri scritti, ha notevolmente contribuito allo sviluppo dell'aritmetica di Fibonacci da Pisa (1170 - 1250), ma ha anche inventato la "partita doppia", strumento fondamentale per la finanza e il commercio.

In breve: verso la metà del XIV secolo in Italia, il prestito di danaro era lecito, in particolare sotto forma di "lettere di credito" o cartamoneta. Dal momento che non costituiva più peccato, era possibile *investire sui progressi futuri*, ottenere denaro da una banca, quindi investire e *anticipare* il recupero del denaro investito anche oltre gli interessi e, dunque, trarne un profitto; fatto, questo, rivoluzionario sia sul piano economico, sia su quello concettuale. Non erano più necessari né magia né divinazione per anticipare il progresso e predire il futuro; si trattava piuttosto di proporre una conoscenza razionale, o, meglio ancora, matematica. Le insidie potevano essere dietro l'angolo, ma comunque stavano all'interno di uno *spazio di possibilità interamente predefinito*: ci si assume un rischio, né più né meno di quanto non ne assuma chi lancia un dado attendendo uno dei sei risultati possibili: le simmetrie del dado ci danno le probabilità. *Aspettative e scommesse sono razionali*: è possibile calcolare le probabilità e valutare il rischio in uno spazio predefinito.

È così che nasce la società del progresso futuro anticipato in base ad una *lista predefinita* di mondi possibili. La società in cui possiamo osare, prendere o dare in prestito denaro, e costruire la conoscenza scientifica all'interno di uno spazio-tempo matematicamente predefinito, seppur infinito; una scienza che consente di predire, grazie a una teoria rigorosa, il risultato di un esperimento, o più ancora, di una attività economica o commerciale.

Più tardi, Newton, Lagrange e Laplace ci daranno la moderna matematica di "sistemi determinati dallo stato" (State Determined Systems). Infatti, nel risolvere le equazioni di Newton negli spazi di Cartesio e Galileo "bisogna poter predire tutti i fatti della meccanica" (della meccanica celeste, diceva Laplace, ma si riferiva in realtà all'insieme dei fatti fisici).

L'analisi matematica delle probabilità di Pascal e Laplace affronta anche l'imprevedibilità, l'aleatorio, ma tale aleatorio *non ha nulla a che vedere con la determinazione*: anzi vi è contrapposto, è analisi di natura statistica. In ogni caso, per loro, gli eventi imprevedibili avvengono all'interno dello spazio infinito ma predeterminato - cartesiano - di tutte le traiettorie e gli eventi possibili. Questo spazio verrà in seguito generalizzato nello

“spazio delle fasi”; spazi cioè dei parametri e degli osservabili pertinenti. Lo spazio di Piero, di Descartes e Newton ne è una componente essenziale: dà il parametro “posizione”, ad esempio, associato (coniugato) alla quantità di moto, osservabile fisico fondamentale (la sua invarianza è il principio di inerzia di Galileo). Si passa quindi dall'invenzione dello spazio, condizione a priori di ogni conoscenza fisico-matematica, ad una sua estensione con delle grandezze osservabili; questo permette di determinare completamente le dinamiche che interessano, rafforza e completa il suo ruolo di “a priori”.

Nello spazio delle fasi della meccanica (posizione e quantità di moto, appunto), Poincaré integrerà imprevedibilità e determinazione dimostrando l'imprevedibilità di dinamiche perfettamente deterministiche. Ben diversa la meccanica quantistica, che, pur nello stesso spazio, introdurrà l'aleatorio nella teoria sotto forma di indeterminismo intrinseco.

Tuttavia, gli spazi delle “traiettorie” e degli eventi possibili, delle fasi, rimarranno sempre matematicamente predefinitibili, siano essi infiniti, da Cartesio a Poincaré, ma anche quando si usano spazi di *dimensione* infinita (gli spazi di Hilbert o Fock della meccanica quantistica). In questi spazi la traiettoria di una legge di probabilità, descritta dall'equazione di Schrödinger, fuori dallo spazio-tempo convenzionale, determinerà le dinamiche quantistiche; la misura, proiettando su un numero reale la dinamica di una ampiezza o legge di probabilità, presenterà il carattere indeterministico della meccanica quantistica. Ne consegue che anche questa teoria, come tutte le teorie fisiche esistenti, impone una costruzione *a priori* gli spazi delle possibili evoluzioni, i quali possono ospitare l'evento classico o quantistico più imprevedibile, compresa la creazione/disintegrazione di un quantum.

Va sottolineato che la *descrizione finita* di questi spazi infiniti, dagli spazi cartesiani a quelli quantistici dalle dimensioni infinite, è resa possibile dalla loro regolarità: questa è data in termini di simmetrie matematiche, vale a dire in quanto insiemi d'invarianti e di trasformazioni intese preservare tali invarianti. Le simmetrie consentono la loro descrizione simbolica, finita, anzi, formale e assiomatica.

Quali spazi possibili per l'evoluzione del vivente?

Si pone per noi, oggi, un problema: nell'analisi dei fenomeni del vivente, quali sono i fenomeni biologici ma anche quelli sociali, non vi è alcun modo per predeterminare (matematicamente) lo spazio stesso delle possibili evoluzioni, delle “fasi” del vivente, la lista predata dei parametri ed osservabili pertinenti. Tentiamo di illustrare l'idea con maggior chiarezza. L'aleatorio del lancio del dado o di una moneta, o ancora quello di un evento quantistico, si compie, come affermato sopra, in uno spazio *predefinito* di dinamiche possibili. Dopo Lorenzetti e Piero della Francesca, dopo Cartesio, Desargues, Newton, Poincaré e Hilbert, siamo in grado di darci gli spazi matematici infiniti di tutti i possibili – c'è chi ha messo Dio, tanto per cominciare. Le loro simmetrie (gli invarianti matematici) consentono di definire geometricamente e formalmente questi spazi. Non si è fatto che estendere l'uso delle simmetrie, con grande potenza intellettuale, discesa in Terra di un dibattito teologico: dalle figure di Euclide a quelle degli spazi di Piero e Descartes, fino agli spazi di Hilbert della fisica matematica quantistica.

Non esiste invece alcun modo per determinare lo spazio dei fenotipi (forme biologiche) futuri possibili nel corso dell'evoluzione (e i fenotipi, anzi gli organismi, sono gli osservabili biologicamente pertinenti). Anche se fossero noti a Dio, noi non abbiamo le simmetrie per darli a priori. Non vi era modo di individuare una traccia del naso dei mammiferi nelle "forme" o nel DNA batterico di 900 milioni di anni fa. Né era possibile annoverare in una lista dei possibili gli ossicini del loro orecchio interno, che hanno origine nella doppia mascella di un vertebrato di 200 milioni di anni fa (un esempio di "exaptation" alla Gould, adattamento ex-post): ogni fenotipo è il risultato di una vasta rete genetica e di interazioni ecosistemiche ed epigenetiche evolutive, mutevoli, che, a loro volta, modificano l'ecosistema.

Neppure la lista degli eventi biologici possibili nel secolo a venire - le forme eucariote ad esempio - non si colloca in spazi matematicamente predefinibili: durante l'evoluzione, fenotipi ed ecosistemi si *co-costituiscono e producono congiuntamente* lo spazio delle possibilità. In queste interazioni le minime fluttuazioni, all'interno e tra i vari livelli di organizzazione, non solo cambiano "traiettorie" negli spazi delle fasi, come è nel caso delle dinamiche fisiche, ma cambiano gli spazi stessi. Le simmetrie che disciplinano perfettamente la fisica sono continuamente modificate, giacché le dinamiche biologiche sono

l'iterazione mai identica di un processo morfogenetico,

che simultaneamente co-determina la struttura dell'ambiente. La stabilità strutturale preserva alcune simmetrie globali (ad esempio i piani organizzativi di base o *bauplan* - ma molti evoluzionisti negano anche questo); tuttavia, ogni riproduzione cellulare costituisce un cambiamento di simmetria: le due nuove cellule non sono mai identiche, e non sono identiche nemmeno alla cellula madre. Questo "mai identiche" (una diversità del proteoma, del DNA, delle membrane, della cromatina..., la ricostruzione della matrice di un tessuto dopo una mitosi in un multicellulare) è un cambiamento di simmetrie.

Ciò è essenziale in vista della variabilità e della diversità che consentono l'evoluzione e l'ontogenesi. Giacché questi cambiamenti permanenti (di simmetrie), specialmente a livello degli *osservabili pertinenti* - i fenotipi - sono il cuore della variabilità, quindi della diversità e della possibilità stessa della materia vivente. Permettono tanto la selezione tra le novità, quanto l'adattabilità, e contribuiscono alle modificazioni dell'ecosistema stesso.

In sintesi: per noi, *la traiettoria filogenetica ed ontogenetica di un organismo è una cascata di cambiamenti di simmetrie*¹².

Le analisi squisitamente molecolari, i cui osservabili sono in effetti predefinibili, sono intrinsecamente *incomplete*, sebbene molto utili: non riescono neppure a descrivere la trasmissione ereditaria di alcune deformazioni acquisite della membrana dei ciliati, né le dinamiche del proteoma durante le mutazioni indotte ed ereditate dell'operone lattosio (dunque, in questo caso, a livello puramente molecolare). Nessuna cascata molecolare di rilievo è causalmente indipendente dal contesto.

12 Longo G., Montévil M., *Perspectives on Organisms: Biological Time, Symmetries and Singularities*, Springer, Berlin, 2014.

La matematica rappresenta una scienza degli invarianti e delle trasformazioni atte a preservare gli invarianti, quindi una scienza delle simmetrie. Saremo in grado di inventare nuove scienze matematiche per affrontare i cambiamenti continui delle simmetrie? Perché no? I padri fondatori hanno pure inventato i loro strumenti, la matematica dell'invarianza, da Euclide a Newton, a Riemann, a Grothendieck (un topos, in quanto nozione in Teoria delle Categorie, è il massimo di una filosofia della matematica che la veda come scienza degli invarianti e delle trasformazioni che le preservano).

In ogni modo, dobbiamo tentare nuove invenzioni, se vogliamo affrontare tanto l'ambito del vivente quanto quello dell'economia, ben distanti, l'uno e l'altro, da assurde teorie dell'equilibrio: non vi sono ecosistemi né sistemi economici in equilibrio o tendenti a raggiungere lo stato di equilibrio, a meno che non siano morti. Il vivente non è solo una dinamica, un processo, ben distante dall'equilibrio; è sempre in "transizione", a un punto critico. Dal punto di vista matematico, è (in) una "transizione critica estesa" (vedi i libri con Bailly e Montévil). E anche l'economia è sempre "in crisi".

Intermezzo: i possibili della finanza

La necessità di arricchire le nostre strutture concettuali e matematiche deriva anche dalla crisi del sistema del prestito bancario che, secoli or sono, ebbe un ruolo determinante nel dare avvio a questa storia: il concetto di progresso, la previsione razionale e poi scientifica, le scienze matematiche che ne conseguirono. Il credito bancario e le sue audaci scommesse, un tempo proficue giacché investivano su un futuro prevedibile, descritto grazie a una lista controllata di possibilità, nell'ambito del ciclo merce-moneta-merce, sono ora, in grande prevalenza, un semplice trasferimento di ricchezza verso i più ricchi, totalmente irrelato al valore-lavoro (il valore di una merce quale somma di tutto il lavoro servito a produrla) e persino al ciclo merce-moneta-merce. La matematica finanziaria offre gli strumenti di questo trasferimento, senza più alcun rapporto con la produttività industriale, o meno ancora, sociale. Il suo obiettivo non è la predizione ma *l'invenzione dei possibili*, vale a dire la costruzione di nuove possibilità per questi investimenti-scommesse (fra cui i prodotti derivati). Il suo scopo è quello di plasmare i mercati imprevedibili mediante la previsione che si impone, che si auto-realizza, e distribuire quanto più possibile il rischio sulla faccia della terra facendo sì che ... gli operai cinesi paghino i debiti prodotti dai rischi creati e presi dalla finanza americana, acquistando titoli, in particolare, del debito.

I matematici finanziari hanno avuto un ruolo decisivo in questo processo. Gli "strumenti finanziari derivati" sono stati inventati come "derivate" in senso matematico (di primo, di secondo ordine ...): essi esprimono tendenze. Sono stati successivamente combinati tra loro così da creare nuove "superfici di correlazione" volte a confrontare e collegare i tassi. Anche questi ultimi sono le valutazioni delle tendenze di un prezzo, di un bene, di un ... derivato. Le predizioni a essi associate hanno *plasmato* i mercati; ne consegue che queste superfici d'analisi *determinino* i tassi futuri in quanto esiti attesi. C'è da dire che con analisi matematica dei sistemi planetari, generalmente, non modifichiamo le traiettorie dei pianeti. In fisica quantistica lo strumento di misura funge effettivamente da interfaccia con il "reale" e crea un nuovo oggetto. Si tratta di una "costituzione di oggettività fisica" in linea di massima

sempre identica (le esperienze possono reiterarsi). Sui mercati finanziari, invece, la matematica predittiva *crea* valori proponendo predizioni: la quotazione in borsa delle azioni dipende dalla predizione, e cioè da un risultato matematico, che si autorealizza e questo senza più alcuna correlazione con un qualsivoglia valore economico “reale” (il valore-lavoro ad esempio, dicevamo prima con un riferimento classico).

Riassumendo: in mancanza di uno spazio predefinito della fasi (e, quindi, di evoluzioni economiche possibili predefinibili), la matematica finanziaria ha potuto inventare liberamente - senza porsi limiti e al di fuori di ogni significato e valore condiviso - osservabili possibili e combinarli in modo sempre nuovo e creativo (con la cartolarizzazione, ad esempio, la combinazione e l'incastro all'infinito dei titoli tra loro).

Come matematico, mi sento profondamente offeso da un uso così immorale della nostra bella scienza, comprata col denaro per organizzare il furto, il trasferimento della ricchezza verso l'1% dei più ricchi del mondo (negli anni del governo Bush, l'80% della crescita del PIL è stata trasferita verso l'1% degli americani più ricchi: una straordinaria prestazione politico-matematica). Noi dovremmo reagire sul piano etico e sul piano scientifico - le scienze matematiche si sono storicamente plasmate nelle loro attività. E invece non diciamo nulla.

Ritorno alle scienze

Lasciando da parte le truffe finanziarie matematicamente organizzate, ricche di simmetrie auto-predittive, nell'ambito dell'evoluzione biologica dobbiamo affrontare una sfida rilevante: l'emergere di nuovi “spazi delle fasi” o, più precisamente, di nuovi osservabili che possono pretendere una loro dimensione di rappresentazione matematica. I ritmi biologici, ad esempio (respirazione, battiti del cuore ... propri agli animali e molto diversi dagli orologi e dai ritmi fisici che sono delle frequenze¹³) si offrono a una comprensione più chiara se inseriti in una seconda dimensione temporale, proponendo cioè un nuovo osservabile. Il tempo del vivente diventa allora bidimensionale. Forse potremmo codificare il tutto in una dimensione: codifica, codifica ... e perdita di senso come con tutte le riduzioni, allorquando funzionano.

In due libri e diversi articoli on-line con Francis Bailly e Maël Montévil (vedi <http://www.di.ens.fr/users/longo/>) abbiamo abbozzato nuove strutture concettuali volte a comprendere meglio la singolarità fisica della materia vivente: il cambiamento di prospettiva sulle simmetrie è al centro della nostra proposta scientifica. Il pensiero di uno spazio dei possibili predefinito, quello che, fin da Lorenzetti, ha autorizzato a includere al proprio interno persino Dio, un'ombra, una traccia di Dio, non basta più. La prevedibilità, anche quella dello spazio delle possibilità, non è più il nocciolo della costruzione della conoscenza. Questa costruzione riguarda piuttosto la comprensione della contingenza storica del vivente (ed eventualmente della società, ma non spingiamo oltre le nostre analisi). Ciò non deve frenare la coscienza del ruolo della nostra azione in un mondo fondamentalmente imprevedibile, senza spazi che ne pre-costituiscano la base, nel quale giudicare ed agire al meglio rendendo esplicite le prospettive (e i valori) che guidano le nostre azioni. L'aleatorio, in biologia, ma anche in scienze dell'uomo, si sposta dall'interno degli spazi pre-dati della fisica, alla

13 V. Longo, Montévil, 2014 citato.

determinazione dello spazio stesso dei possibili. Cio' non impedisce la conoscenza né l'azione, si tratta di inventarne gli strumenti, forse anche matematici, almeno in biologia.

Insomma, la sfida storica consiste nell'inventare strumenti tesi a capire, ma non necessariamente a predire, per dirla con René Thom. La teoria evoluzionistica di Darwin non predice assolutamente niente, ma ci offre un quadro di conoscenze straordinario. Le stime qualitative riguardanti gli effetti di un'attività possono permetterci di agire nel mondo, se tali stime sono basate su criteri di robustezza di sviluppo quali la *diversità* (crescente) e la capacità *d'adattamento*. Inserite in un contesto sociale, queste parole significano giustizia (l'unica che rende una società "robusta" grazie anche alla diversità) e democrazia (adattamento mediante cambiamento).

La scienza è una delle nostre forme attive dell'essere al mondo, tra conoscenza e prassi. Costruiamo la conoscenza anche per agire in questo mondo e abbiamo effettivamente bisogno di prevedibilità; ma è possibile che questa sia provvisoria e qualitativa e ci costringa a uscire dal mito dei possibili predefiniti, bello e tranquillizzante tanto quanto gli spazi di Piero della Francesca. Allora, l'unica sicurezza che potremmo avere per sapere se un'azione funziona al meglio o conformemente alle aspettative, sta in una presa di posizione etica: l'atteggiamento critico rispetto ai principi stessi di conoscenza utilizzati in scienza; il massimo grado di democrazia e giustizia da perseguire sia a livello locale, sia, per quanto possibile, in prospettiva, nelle società che sanno cambiare rotta attraverso il controllo democratico.

Il trasferimento degli strumenti matematici

In questo testo si è cercato di riflettere sul ruolo dello spazio nella costruzione di diverse forme di conoscenza. L'invenzione dello spazio pittorico, grazie ad un dibattito teologico, ne è stato uno dei motori. Da allora ed a tutt'oggi, la proposta di uno "spazio delle fasi adeguato" è al cuore dell'analisi fisico-matematica, con risvolti e problemi diversi in altre aree, dalla finanza alla biologia.

La potenza e l'eleganza di schemi a priori d'intelligibilità del mondo, condizioni di possibilità per la scienza, quali sono gli spazi infiniti predefiniti, dagli spazi proiettivi della pittura fino ai più complessi spazi di fasi della fisica matematica e le loro simmetrie, non si adattano alle dinamiche filogenetiche ed ontogenetiche. Bisogna quindi saper discutere dei principi costitutivi di tali costruzioni, prima di trasferire la matematica dalla fisica alla biologia (e alle scienze umane) e interrogarsi sui loro strumenti. Si ha l'impressione che troppi matematici preferiscano le equazioni e i loro strumenti tecnici ai fenomeni biologici (e sociali) che intendono di studiare. Non era questo l'atteggiamento di quei pensatori rivoluzionari che hanno fatto la scienza moderna inventando una matematica appropriata e nuova.

Nei casi di una radicale assenza di prevedibilità razionale, se un'azione compiuta in vista di un obiettivo ha un effetto contrario (e può succedere), il dibattito critico – come abbiamo detto – è lì per garantire correttivi, per imporre aggiustamenti: la democrazia, in particolare, è adattativa. Ma ciò richiede un pensiero critico che deve essere al centro della scienza e costituire il suo nesso con la filosofia. Proprio per questa ragione uno dei progetti del neoliberalismo è quello di annientare o diluire la filosofia e subordinare la scienza al "mercato

della conoscenza". In questo mercato, il sapere non ha da essere critico, ma deve sottostare ad aspettative e valutazioni intese esclusivamente in termini di applicazioni possibili; nel tentativo di fare a pezzi ogni teoria, soprattutto se critica e originale e per questo avulsa da qualunque applicazione possibile, ci viene detto che "non vi è più differenza, oggi, tra teorie ed applicazioni". Un sapere da valutare come le agenzie valutano i mercati: in conformità alle teorie dominanti ed alla produttività delle applicazioni attese o già scontate (e, per la scienza, mediante gli indici bibliometrici¹⁴).

Per riassumere il punto di vista espresso sui rapporti fra analisi del vivente e matematica, l'evoluzione biologica e umana produce chiaramente diversi effetti non lineari ai quali numerosi matematici molto giustamente lavorano (alcuni persino, ma sono rari, considerandoli lontani dall'equilibrio, talora in transizioni critiche). Ma vi è molto di più di questo, giacché l'evoluzione, dicevamo, genera nuovi osservabili. E li genera in particolare mediante cambiamenti di simmetrie, negli spazi stessi di fasi (si veda il libro di Longo, Montévil). Eppure, anche con una minima comprensione dell'evoluzione e della storia umana - che è un'estensione dell'evoluzione tramite il linguaggio e la sua scrittura (inaspettata nei primi tetrapodi) - possiamo progettare l'azione, a condizione che il progetto e l'agire siano adattativi, ovvero soggetti a critica. Per di più, la matematica ed il pensiero non sono "già presenti" prima del nostro agire nel mondo; sono piuttosto, e per fortuna, dei co-costituiti delle nostre attività cangianti e sempre più ricche in questo stesso mondo. Sempre più ricche se non viene impedito il pensiero critico e, con esso, la costruzione di nuovi quadri di conoscenza, grazie in particolare alle correlazioni della scienza con la filosofia.

14 G. Longo "Science, Problem Solving and Bibliometrics" *Invited Lecture*, Academia Europaea Conference on "Use and Abuse of Bibliometrics", Stockholm, May 2013. Proceedings, Wim Blockmans et al. (eds), Portland Press, 2014 (vedi <http://www.di.ens.fr/users/longo/>)