

L'infini mathématique "in prospettiva" et les espaces des possibles¹

Giuseppe Longo

CNRS, CREA, École Polytechnique, et CIRPHLES, ENS, Paris

<http://www.di.ens.fr/users/longo>

Une brève introduction à l'infini

Il n'y a pas d'espace dans la géométrie grecque. En traçant des lignes, par la règle et le compas disons-nous aujourd'hui, on mesure, on construit des *figures*, sans un "contenant infini" qui serait "derrière" elles. Des symétries - des rotations et des translations - produisent la preuve, au fini. Et l'infini potentiel (*apeiron*, sans limite, sans bornes) est construit par des extensions, des itérations : on étend *sans limite finie* le segment en un droite (le deuxième axiome), *eis apeiron*. Si l'on se donne une collection de nombres premiers, on peut construire un nouveau nombre qui est plus grand que tout élément de cette collection (le théorème d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers). Une extension et une itération sans fin du fini, du geste qui trace la droite à la construction des nombres entiers. Le temps est infini dans ce sens, jamais présent dans sa totalité dans notre pensée. L'infini n'est pas ce au-delà duquel il n'y a rien, dit Aristote dans *La Physique*, mais ce au-delà duquel il y a toujours quelque chose. Il est un devenir.

Paolo Zellini² nous explique que la distinction aristotélicienne entre cet infini mathématique à construire pas à pas et l'infini qui est "déjà" là, en acte, qui englobe tout, sera reprise dans le débat métaphysique au cours du Moyen Age. Dieu est un infini qui enveloppe tout, inclus tout, au-delà duquel rien n'est donné. Mais ce concept d'infini actuel n'est pas simple. Il est compris par la négation par les aristotéliciens, comme chez Aristote ; et Dieu ne peut pas avoir un attribut négatif. Saint Thomas toutefois forcera les esprits en excluant l'existence d'un tel infini en acte, *sauf* comme attribut de Dieu et lui seul. Et ce concept d'infini actuel se renforce, se précise *positivement* dans les esprits. Au point que l'évêque de Paris, Etienne Templier, décréta en 1277 l'infini actuel comme étant un attribut positif de Dieu et de sa création. Dieu, quand Il veut, installe l'infini actuel aussi dans le monde, par exemple en attribuant la Grâce Pleine et Infinie même à une femme, finie, Marie - le bûcher était prêt pour ceux qui n'étaient pas d'accord. Cette "posture axiomatique" ferme contribua certainement à stabiliser le concept d'infini.

Zellini souligne fort justement l'importance de ce débat pour la naissance d'une cosmologie de l'infini qui va trouver sa plénitude, mystique d'abord, puis scientifique, dans l'Univers infini et « gli infiniti mondi » de Nicolas de Cues (1401 - 1464) et Giordano Bruno (1548 - 1600).

L'infini dans le tableau³

Le concept d'infini actuel se précise donc dans un débat métaphysique, qui cerne l'infini en une seule "chose", qui force la pensée à le concevoir dans sa totalité. Comment va-t-il passer aux mathématiques, qui en feront un objet rigoureux du discours, voire une composante de la preuve ?

Le passage se fait par l'invention de la perspective (la « prospettiva ») dans la peinture italienne de la Renaissance⁴.

¹ In *Le formalisme en action : aspects mathématiques et philosophiques*, J. Benoist, T. Paul (eds), Hermann, 2012.

² P. Zellini, *A brief history of infinity*. New York: Penguin, 2005 (en italien : Adelphi, Roma, 1980).

³ Cette section est largement l'œuvre de ma fille Sara Longo, que je remercie pour tout ce que j'ai appris d'elle au sujet ainsi pour son apport dans cet article. Je renvoie à sa Thèse de Doctorat en Histoire de l'art ("Voir et savoirs dans la théorie de l'art de Daniel Arasse", en cours) et à ses travaux, dont en particulier "L'annonciation en Italie. Enjeux méthodologiques et historiographiques, autour du colloque florentin de 1986", "La perspective de l'Annonciation", présentation d'une étude de Daniel Arasse" et "L'intervalle sacré", projet pour *Studiolo*, revue de l'Académie de France à Rome (à paraître), pour une réflexion beaucoup plus pointue sur ces thèmes :

<http://hicsa.univ-paris1.fr/page.php?r=23&id=216&lang=fr>

⁴ En Italie, le débat fut aigu à l'époque sur le nom à attribuer à cette nouvelle technique : « prospettiva », un "voir à travers", qui passera aux autres langues, ou, de façon plus pertinente, le choix d'un point de vue, une

Le problème de la représentation des lieux où répartir les figures de la narration est au centre des attentions des peintres depuis la fin du XIII^e siècle. Les “boîtes” giottesques (ces maisons des poupées, sans un mur, ouvertes vers le spectateur) sont des lieux qui ont pour finalité de contenir l'*historia* et d'en rendre compréhensible l'enseignement théologique. Mais il n'y a pas chez Giotto une organisation globale de l'espace, pas de ligne ni point projectif, proposant une perspective. Des gestes humains, de la douleur construisent/forcent l'espace tri-dimensionnel : la lourdeur du corps en vert au centre en bas, les mouvements des bras, le désespoir des anges ... (Deposizione, Cappella degli Scrovegni, Padova, 1303 – 1306):



La perspective géométrique expérimentée par Filippo Brunelleschi en 1417 et définie en 1435 par Leon Battista Alberti est le fait d'une construction où l'homme est à l'origine de toute mesure et où l'infini, point de convergence des lignes orthogonales à la base du tableau, est contenu, enfermé dans le cadre de la représentation (voir Alberti, *De pictura*, I, 19). Depuis les années quatre-vingt et en réaction à l'article inaugural d'Erwin Panofsky (*La perspective comme forme symbolique*, 1925), des historiens de l'art, comme Hubert Damisch, Louis Marin à l'École des Hautes Études en Sciences sociales, ont mis en évidence l'importance de la révolution picturale que constitue l'invention de la *costruzione legittima*.

Si Erwin Panofsky avait noté que l'*Annonciation* d'Ambrogio Lorenzetti (ci-dessous) est la première construction géométrique où les fuyantes convergent, non pas vers un seul point, mais vers un seul axe vertical (la colonne qui sépare Gabriel et Marie), Daniel Arasse ira plus loin pour étendre cette intuition à l'essor tout à fait particulier de constructions géométriques complexes dans les scènes de l'Annonce à Marie. Son argumentation est tout à fait pertinente pour notre propos : l'affinité particulière qui a existé, au XVe siècle, entre Annonciation et perspective, est due au fait que dans l'histoire chrétienne le moment où l'infini vient dans le fini et bien celui de la venue miraculeuse du fils de Dieu dans la chair humaine, par la rencontre entre Dieu et la Madone, pleine de Grâce. Pour appuyer son propos l'auteur se base, en particulier, sur un sermon de Saint Bernardin de Sienne, prononcé sur le campo de Sienne en 1427 : l'Annonciation est le moment où « l'immensité vient dans la mesure ... , l'infigurable dans la figure, l'incirconscriptible dans le lieu, l'invisible dans la vision ... , la longueur dans la brièveté, la largeur dans l'étroitesse, la hauteur

« prospettiva », comme l'on verra.

dans la bassesse »⁵ ... autant de paradoxes conceptuels qui sont à l'origine de paradoxes spatiaux de la part des peintres. Daniel Arasse met aussi en évidence comment les plus savants perspectivistes se plaisent à se jouer des règles de la perspective géométrique pour montrer la venue paradoxale de l'infini dans le fini.



Dans cette Annonciation, une colonne, souvent un symbole du Christ, bien concrète au sol, s'atténue vers le haut où elle se superpose et cache l'axe de fuite, disions-nous, à l'infini, une référence explicite à Dieu. Voilà une extraordinaire nouveauté, en 1344 : un espace projectif dessiné avec rigueur. Et, du coup, par l'effet de la géométrie de ce plancher qui va de l'homme à Dieu, un nouveau lieu se déploie : Dieu y a sa place, caché, lointain à l'infini, mais présent dans l'histoire racontée. Et la Madone aussi a une nouvelle épaisseur humaine : son corps solide, tridimensionnel, accompagne l'expression d'un humanisme qui se dessine. La perspective introduit Dieu comme limite actuelle, à l'infini, donc comme la limite d'un espace que tout englobe, y compris les espaces humains qui se renouvellent. Et tous les premiers tableaux avec la « prospettiva » seront des annonces, ce lieu unique de la rencontre infini/fini. Ensuite, avec Piero della Francesca, cet exposé en peinture d'une métaphysique, deviendra aussi une technique, sans nécessairement perdre son âme religieuse. Le livre de Piero, *De prospectiva pingendi*, est un vrai traité de géométrie projective "pratique", le plus important texte de mathématiques de son époque, écrira Vasari.

Or, la « prospettiva » permet au peintre d'organiser l'espace des hommes et des choses ainsi que de choisir un point de vue. Le choix de l'emplacement du point de fuite fixe le *point de vue* du spectateur, il propose/impose un regard, comme celui qui voit, humblement d'en bas, le saint Sébastien martyr d'Antonello da Messina (1476) :

⁵ Saint Bernardin de Sienne, *De triplici Christi nativitate*, dans *Opera omnia*, Venise, 1745, IV, p. 3, cité dans *San Bernardino de Siena, Pagine scelte*, Milan, 1950, p. 54.



Et voilà que cette métaphysique et cosmologie religieuse devient une géométrie de l'espace : Dieu, les astres et les hommes y trouveront un nouvel emplacement, organisé par un point de vue unifiant, et *modifiable*. On est bien loin des absolus hors de l'espace et du monde des mosaïques byzantines, que l'on se souvienne de Ravenne.

Cette (ré-)organisation de l'espace, ce talent nouveau à choisir une « *prospettiva* », une technique bientôt répandue en Europe, aidera Copernic, Kepler et Galilée, à « voir » le système solaire du « point de vue du Soleil », la nouvelle « *prospettiva* » de la science moderne⁶.

Intermezzo : la limite du temps et l'algèbre

Le temps, depuis Aristote, est considéré comme un infini potentiel paradigmatique, car jamais présent dans sa totalité dans notre pensée. En fait, quel sens « temporel » aurait sa limite projective⁷ ? Par contre, il est intéressant de voir cette arrivée, au sein des mathématiques, du concept d'infini actuel, constitué dans un débat religieux, qui se fait en passant par la peinture. Une peinture explicitement mathématisée, en particulier par un très grand peintre et géomètre, Piero della Francesca. Cela peut se comprendre en observant que la construction conceptuelle et géométrique d'un espace infini ne s'appuie pas nécessairement sur un infini actuel : l'espace de Descartes peut très bien être conçu comme un infini potentiel, une extension sans fin à partir de son origine. L'infini actuel, par contre, est inhérent à la construction projective, en particulier quand elle est utilisée pour la représentation bidimensionnelle d'un espace tridimensionnel. Et le point de fuite *objective* l'infini actuel ; il *le montre*, là bas, au fond du tableau. Bref, à la renaissance, on a pensé

⁶ Il s'agit d'une remarque dans B. C. van Fraassen, *An introduction to the Philosophy of Space and Time*, Random House, New York, 1970.

⁷ Dans la tentative de rendre compatible la Relativité avec la théorie du Big-bang, certains physiciens pensent à l'origine du temps comme limite inverse asymptotique, à l'inverse de l'ordre temporel donné par l'expansion de l'Univers, bien évidemment. En fait, les théorèmes de Noether en particulier (la conservation d'énergie comme invariant des équations du mouvement par translations temporelles) sont au cœur du tournant relativiste et incompatibles avec une origine du temps, voir F. Bailly, G. Longo, *Mathematics and Natural Sciences : the Physical Singularity of Life*, Imperial College Press, London, 2011 (Traduction et révision du livre pour Hermann, Paris, 2006).

l'espace mathématiquement, en le dessinant d'abord ; en le rendant donc intelligible (visible) sur un plan, par l'infini actuel.

Deux siècles plus tard, Desargues rendra pleinement mathématique cette synthèse projective entre infini et géométrie. En Analyse, Newton et Leibniz proposeront les notions de dérivé et intégrale comme opérations à limite infinie.

Cantor, au 19^{ème} siècle, objectivera ultérieurement, par une syntaxe, l'infini actuel, en lui donnant un nom, en lui associant un symbole. En le maniant algébriquement, il en engendrera une infinité, jusqu'à inventer une arithmétique des infinis, des ordinaux et des cardinaux transfinitis. Rien ne stabilise un concept mieux qu'une praxis mathématique, qu'un usage technique d'un signe pour le concept, dont le sens s'enrichira par ce même usage. Le débat sur l'infini de Dieu concernera aussi Cantor, un homme profondément religieux : Dieu sera (à) la limite de toutes les limites, au-delà de ses transfinitis.

Il faut observer que, dans tous ces cas, l'infini mathématique est un outil pour l'intelligibilité du monde. Dans la peinture de la Renaissance, la géométrie projective, cette décision mystique, organise l'espace des hommes, pour une humanité plus pleine. De Descartes à l'infini actuel de Newton et Leibniz, la physique-mathématique rendra intelligible le mouvement au fini, autour de nous, par des infinis. En logique, à partir de Gentzen (1935), l'analyse ordinaire de la preuve se basera sur l'arithmétique des infinis de Cantor⁸. Du reste, déjà Galilée expliquait à Simplicius, dans l'analyse d'une sphère mathématique s'appuyant sur un plan, que les mathématiques sont une science à la limite infinie⁹. Le fini fétichise l'itération et il en reste prisonnier¹⁰. Le formaliste finitiste qui rejette l'infini en le déclarant hors du monde et du physique, ne comprend pas le *sens humain*, pour nos dess(e)ins et pour nos praxis d'intelligence, de ce geste qui pose l'infini dans le monde, en organisant ce même monde par le langage, la géométrie et l'écriture.

Une épistémologie de ce concept organisateur ne peut être que historique : une histoire des idées et des praxis constitutives, une histoire dynamique, toujours à repenser.

Les espaces rationnels des commerces et de la physique¹¹

La naissance de la science moderne se fait donc par la construction d'un espace infini *des possibles*, un espace et un temps de tout phénomène et de toute dynamique physique possible. Le choix de l'origine des coordonnées cartésiennes propose le système de référence dans lequel on construira la physique après Galilée. En fait, l'approche analytique de Descartes pose l'origine et la mesure de l'espace, elle lui donne une "prospettiva", à partir de laquelle on pourra encadrer et comprendre le monde.

Dans ce contexte, l'innovante et riche relation galiléenne entre expérience et théorie, la théorisation physique elle-même, a pour objet de rendre intelligibles et prévisibles les phénomènes : on observe d'abord, on prend des mesures et, par la suite, la théorie devrait engendrer une prédiction permettant de la vérifier. L'anticipation scientifique, en fait mathématique, du futur est alors placée au centre de l'intelligibilité du monde proposée par la science moderne. Et cette prédiction s'effectue dans l'espace et le temps des événements physiques, décrits mathématiquement par la représentation analytique cartésienne, enrichie par la relativité de Galilée : l'espace-temps moderne des phénomènes est né d'une analyse du passage d'un système de référence (cartésien), un point de vue, à un autre, tout en préservant les lois de la physique, à partir du mouvement inertiel. Plus précisément, dans l'espace-temps *infini* des trajectoires possibles donné *a priori*, les invariants sont décrits en termes de symétries - le groupe des transformations de Galilée.

⁸ L'infini entre dans la preuve, en fait, comme infini entre algèbre et géométrie, celui du "bon ordre" des entiers, G. Longo "Reflections on Concrete Incompleteness", *Philosophia Mathematica* 19(3): 255-280, 2011.

⁹ Une histoire qui est un point de départ d'un grand/petit livre, A. Gargani, *Il sapere senza fondamenti*, Einaudi, 1975.

¹⁰ G. Châtelet, *Les enjeux du mobile*, Seuil, Paris, 1993.

¹¹ Une version préliminaire, en anglais, de cette partie est parue comme interview-blog dans *National Public Radios* (NPR, USA), <http://www.npr.org/blogs/13.7/2011/06/13/137154418/are-financial-and-scientific-views-of-the-world-similar#more>

Il faudrait toutefois situer le basculement vers le mythe de la prédiction rationnelle d'un avenir scientifiquement prévisible dans *les espaces des possibles*, comme s'étant, lui aussi, opéré au début de la Renaissance italienne. L'audace de se doter d'un aperçu de l'avenir par des moyens *rationnels* et à l'intérieur d'un espace de possibilités donné, remonte à l'appréciation du progrès et à la capacité d'en faire des estimés quantitatives, en Italie aux XIVe et XVe siècles. C'est alors que les technologies des artisans, voire des grandes structures productives (le « arsenal de Venise », dont parlera Galilée) commencèrent à changer le rapport à la Nature elle-même. Et c'est alors que l'on inventa le *crédit bancaire*, à l'époque du tableau de Lorenzetti, dans cette même Toscane. Les mathématiques interviendront ensuite massivement dans ce progrès : Luca Pacioli (1445 – 1517), en particulier, avec la *Summa de Arithmetica, Geometria* et autres écrits, a considérablement développé l'arithmétique de Fibonacci de Pisa (1170 - 1250) et a inventé la « *partita doppia* », un outil fondamental pour la finance et le commerce.

Bref, vers la moitié du XIVe siècle, en Italie, le prêt monétaire était désormais permis, en particulier sous la forme de « lettres de crédit » ou de monnaie-papier. Puisqu'il ne s'agissait plus d'un péché, il était alors possible de *miser sur les progrès futurs*, d'obtenir de l'argent d'une banque, puis d'investir et d'*anticiper* le retour de l'argent investi avec intérêts et, donc, d'en faire un gain personnel, ce qui était révolutionnaire sur les plans économique et conceptuel. Il n'y avait plus aucune nécessité de magie, ni de divination dans l'anticipation du progrès et dans la capacité de prédiction de l'avenir ; il s'agit plutôt de connaissance rationnelle, voire mathématique. Bien sûr, les aléas étaient possibles, mais à l'intérieur d'un *espace de possibilités complètement prédéfini* : comme lorsque l'on lance un dé, on prend un risque, mais parmi les six résultats possibles, ni plus ni moins – et les symétries du dé nous donnent les probabilités. Les *attentes et les paris sont rationnels* : on peut calculer les probabilités et évaluer le risque, dans un espace pré-donné.

Et ainsi naît la société du progrès futur anticipé parmi une *liste prédéterminée* de mondes possibles. La société dans laquelle l'on peut oser emprunter et prêter de l'argent ainsi que construire la connaissance scientifique à l'intérieur d'un espace-temps mathématiquement prédéfini, quoique infini ; une science où il est possible de prédire, grâce à une théorie scientifique, le résultat d'une expérience, voire d'une activité économique ou commerciale.

Plus tard, Newton et Laplace nous donneront les mathématiques des « systèmes à états déterminés » modernes (State Determined Systems). En effet, en résolvant des équations de Newton dans les espaces de Descartes et Galilée, « on doit pouvoir prédire tous les faits de la mécanique » (de la mécanique céleste, disait Laplace mais il visait en fait à l'ensemble des faits de la physique). L'analyse mathématique des probabilités de Pascal et de Laplace traite également l'*imprévisibilité* comme aléatoire, mais un aléatoire qui est *n'a rien à voir avec la détermination*, à analyser de façon statistique. Dans tous les cas, pour eux, les événements imprévisibles ont lieu à l'intérieur de l'espace infini mais prédéterminé, cartésien, de toutes les trajectoires et de tous les faits possibles. Cet espace des observables qui sera successivement généralisé à l'*espace des phases* (c'est à dire, des observables et paramètres pertinents).

Dans ces espaces, Poincaré intégrera l'imprévisible à la détermination, en nous montrant l'imprédictibilité de dynamiques parfaitement déterministes. Bien différemment, la mécanique quantique introduira l'aléatoire dans la théorie, sous la forme d'indéterminisme intrinsèque. Toutefois, les espaces des "trajectoires" et des événements possibles, des phases, demeureront toujours mathématiquement prédéfinissable, qu'ils soient infinis, de Descartes à Poincaré, ou qu'il s'agisse même d'espaces de *dimension* infinie – les espaces de Hilbert ou de Fock de la mécanique quantique. Dans ces espaces, la trajectoire d'une loi de probabilité, déterminé par l'équation de Schrödinger, hors de l'espace-temps ordinaire, déterminera les dynamiques quantiques ; la mesure, en projetant sur un nombre réel cette dynamique d'une densité de probabilité, rendra le caractère indéterministe de la mécanique quantique. Par conséquent, cette théorie aussi donne *a priori* les espaces des évolutions possibles, qui peuvent accommoder l'événement quantique le plus imprévisible, dont la création/annihilation d'un quanton.

Notons, et c'est important, que la *description finie* de ces espaces infinis, des espaces cartésiens aux espaces quantiques aux dimensions infinies, est rendue possible par leurs régularités : elles sont

données en termes de symétries mathématiques, c'est-à-dire en tant qu'ensembles d'invariants et de transformations préservant ces invariants. Les symétries permettent la synthèse finie, voire formelle et axiomatique.

Quels espaces des possibles pour l'évolution du vivant ?

C'est là où nous avons aujourd'hui un problème : dans l'analyse des phénomènes du vivant, comme phénomènes biologiques mais aussi sociétaux, il n'y a aucune manière de prédéterminer (mathématiquement) l'espace même des évolutions possibles, des "phases" du vivant. Essayons de préciser davantage cette idée. L'aléatoire du lancer d'un dé ou d'une pièce de monnaie, ou encore, d'un événement quantique, opère, comme l'on disait plus haut, dans un espace *prédéfini* des dynamiques possibles. Nous savons nous donner des infinis mathématiques, depuis Lorenzetti et Piero della Francesca, depuis Descartes, Desargues, Newton et Hilbert. Leurs symétries (les invariants mathématiques) permettent de définir géométriquement et formellement ces espaces (des phases, des possibles).

En revanche, il n'y a aucune façon de prédéterminer l'espace des phénotypes (formes biologiques) futurs possibles au cours de l'évolution – et les phénotypes, voire les organismes, sont les observables biologiquement pertinents. D'aucune façon n'y avait-il un signe du nez des mammifères dans les "formes", ni dans l'ADN bactériens d'il y a 600 millions d'années. Ni pouvait-on mettre dans une liste de possible les os internes de leur oreille, comme dérivé de la double mâchoire de quelques vertébrés d'il y a 200 millions d'années (un exemple de "exaptation" à la Gould) : tout phénotype est le résultat d'une vaste réseau génétique et d'interactions épigénétiques évolutives, changeants.

Mais même la liste des événements biologiques possibles durant le prochain siècle, par exemple les formes des eucaryotes, ne se trouve pas dans des espaces mathématiquement prédéfinissables : au cours de l'évolution, les phénotypes et les écosystèmes se *co-constituent* et *produisent conjointement* l'espace des possibilités. Et des moindres fluctuations dans ces interactions, à l'intérieur, voire entre les différents niveaux d'organisation, ne changent pas seulement des "trajectoires" dans des espaces de phases, comme dans les dynamiques physiques, mais ces mêmes espaces. Les symétries qui régissaient magnifiquement la physique se trouvent continuellement modifiées, car la biologie est

l'itération jamais identique d'un processus morphogénétique,

qui simultanément co-détermine la structure de l'environnement. La stabilité structurelle préserve certaines symétries globales (p. ex. les plans d'organisation de base ou bauplan), mais chaque mitose constitue un changement de symétrie : les deux nouvelles cellules ne sont jamais identiques, pas même à la cellule mère. Ce "jamais identique", une diversité du protéome, de l'ADN, des membranes, de la chromatine ..., la reconstitution de la matrice d'un tissu, après une mitose dans un multicellulaire, est un changement de symétries.

Et cela est fondamental pour qu'il y ait la variabilité et la diversité qui permettent l'évolution et l'ontogénèse. Car ces changements permanents (de symétries), en particulier au niveau des *observables pertinents*, les phénotypes, sont au coeur de la variabilité, donc de la diversité et de la possibilité même de l'étant vivant de la matière. Ils permettent la sélection parmi les nouveautés ainsi que l'adaptabilité et contribuent aux modifications de l'écosystème même.

Bref, pour nous

la trajectoire phylogénétique et ontogénétique d'un organisme est une cascade de changements de symétries.

Bien évidemment, les analyses exclusivement moléculaires, dont les observables sont bien prédéfinissables, sont intrinsèquement *incomplètes*, quoique très utiles : elles n'arrivent même pas à décrire la transmission héréditaire des certaines déformations acquises de la membrane des ciliés, ni les dynamiques du protéome lors des modifications induites et héritées de l'operon lactose – au niveau donc, dans ce cas, purement moléculaire.

Les mathématiques constituent une science des invariants et des transformations préservant les invariants, et donc une science des symétries. Serons-nous en mesure d'inventer de nouvelles mathématiques pour traiter les changements continus des symétries ? Pourquoi pas ? Les pères fondateurs ont bien inventé leurs outils, les mathématiques de l'invariance, d'Euclide à Newton et Riemann et Grothendieck (un topos, en tant que notion catégorique, est le maximum actuel d'une philosophie des mathématiques en tant que science des invariants et des transformations qui les préservent). Dans tous les cas, nous devons oser l'invention nouvelle, afin d'aborder le vivant ainsi que l'économie, bien à l'écart des absurdes théories de l'équilibre : il n'existe pas d'écosystème ni de système économique à l'état d'équilibre, ni tendant vers l'équilibre, à moins que tous soient morts. Le vivant n'est pas seulement une dynamique, un processus, bien loin de l'équilibre, il est toujours en "transitions", sur un seuil critique : du point de vue mathématique, il est (dans) une "transition critique étendue" (voir Bailly, Longo, cité). Et l'économie est toujours "en crise".

Intermezzo : les possibles de la finance.

Le besoin d'enrichissement de nos cadres conceptuels et mathématiques vient également de la crise du système de prêt bancaire qui, il y a six siècles, contribua si grandement à déclencher cette histoire : la notion de progrès, la prévision rationnelle et puis scientifique, les mathématiques qui en suivirent. Le crédit bancaire et ces paris audacieux et jadis fructueux, misant sur un avenir prévisible décrit à l'aide d'une liste maîtrisée de possibilités, sont maintenant devenues en très grande partie le pur transfert de richesse vers les plus riches, totalement déconnecté de la valeur-travail. Les mathématiques de la finance en fournissent les outils, sans plus de corrélation avec aucune sorte de productivité industrielle, voire sociale. Leur objectif n'est pas la prédiction, mais *l'invention des possibles*, c'est-à-dire de construire des nouvelles possibilités pour ces investissements/paris – des produits dérivés. Leur but est de *façonner* les marchés imprévisibles, par la prévision qui s'impose, s'auto-réalise, ainsi que de distribuer le risque de façon maximale sur la surface de la Terre, de manière à ce que ... les ouvriers chinois achètent les dettes engendrées par les risques créés et pris par la finance américaine.

Les mathématiciens de la finance ont joué un rôle majeur dans ce processus. Les « instruments financiers dérivés » ont été inventés comme "dérivés" dans le sens mathématique (premier, second ordre ...) : ils expriment des tendances. Ils ont par la suite été combinés en créant de nouvelles « surfaces de corrélations », qui comparent et relient les taux. Ces derniers sont aussi des évaluations des tendances d'un prix, d'un bien, d'un ... produit dérivé. Et les prédictions qui leur sont associées ont façonné les marchés : ces surfaces d'analyse du coup *déterminent* les taux à venir, car ces derniers sont des attentes. Notez qu'en analysant mathématiquement les planètes, en principe, nous ne changeons pas leurs trajectoires. En physique quantique, l'instrument de mesure sert effectivement d'interface avec le "réel" et crée un nouvel objet. Mais ceci est une "constitution d'objectivité physique", toujours identique, en principe – les expériences peuvent être itérées. Sur les marchés financiers, les mathématiques prédictives créent les valeurs en proposant des prédictions : les prix boursiers dépendent de la prédiction, qui est un résultat mathématique, puisqu'ils n'ont plus aucune corrélation à quelque valeur "intrinsèque" que ce soit (la valeur-travail, disons-nous – la valeur d'une marchandise comme somme de tout le travail censé la produire).

Pour nous résumer, en absence d'un espace des phases pré-donné, et donc des évolutions économiques possibles pré-définissable, les mathématiques de la finance ont pu jouer le jeu d'inventer sans limites et en dehors de toute signification et valeur partagée, des observables possibles et de les mélanger de façon toujours nouvelle et créative (par la titrisation par exemple – le mélange et emboîtement sans fin des titres entre eux).

Comme mathématicien, je me sens profondément offensé de cet emploi immoral de notre belle science, achetée avec de l'argent pour organiser le vol, le transfert de richesse vers le 1% des plus riches du monde (dans les années Bush, 80% de la croissance du PIB a été transféré vers le 1% des américains les plus riches – un performance politico-mathématique extraordinaire). Nous devrions

réagir sur le plan éthique et sur le plan scientifique – les mathématiques se sont historiquement façonnées dans leurs activités. Et nous ne réagissons pas.

Retour aux sciences.

Mises à part donc les arnaques financières mathématiquement organisées, riches en symétries auto-prédicatives, pour l'évolution biologique nous devons faire face à un défi majeur : l'émergence de nouveaux "espaces de phases" ou, plus précisément, de nouveaux observables, qui pourraient exiger leur propre dimension mathématique. Pour en donner un exemple très simple, les rythmes biologiques (la respiration, les battements de cœur ... inventés par les animaux et très différents des horloges et des rythmes physiques) sont mieux compris en les inscrivant dans une deuxième dimension temporelle, en proposant donc un nouvel observable. Le temps du vivant devient alors bidimensionnel. Peut-être pourrions-nous tout encoder en une dimension : encodage, encodage... et perte de sens comme avec toutes les réductions, lorsqu'elles fonctionnent.

Dans un livre et dans plusieurs articles téléchargeables, avec Francis Bailly et Maël Montévil (voir <http://www.di.ens.fr/users/longo/>), nous avons esquissé de nouvelles structures conceptuelles visant à mieux comprendre la singularité physique de l'état vivant de la matière : le changement de perspective sur les symétries est au cœur de notre proposition scientifique. La pensée d'un espace des possibles pré-donné, où, depuis Lorenzetti, on arrive même à inscrire Dieu, ne suffit plus. La prévisibilité, même celle de l'espace des possibilités, n'est plus au centre de la construction de la connaissance. Cette construction vise la compréhension de la contingence historique du vivant (et, éventuellement, de la société – mais nous ne poussons pas si loin nos analyses). Cela ne doit pas entraver la conscience du rôle de notre action dans un monde foncièrement imprévisible, sans espace qui le sous-tende, dans lequel nous jugeons pour le mieux, en rendant explicite la perspective (et les valeurs) guidant nos actions.

Bref, le défi théorique est ainsi d'inventer les outils visant à comprendre mais non pas nécessairement à prédire, disait déjà René Thom. La théorie de l'évolution de Darwin ne prédit absolument rien, mais elle nous fournit un extraordinaire cadre de connaissance. Les estimés qualitatifs portant sur les effets d'une activité peuvent nous permettre d'agir dans le monde si ces estimés sont fondés sur des critères de robustesse de développement tels que la *diversité* (croissante) et la capacité *d'adaptation*. Ces mots, dans un contexte social, signifient justice (qui seule rend une société "robuste", grâce aussi à la diversité) et démocratie (adaptation par changement).

La science est une de nos formes actives d'être au monde, entre connaissance et praxis. Nous construisons la connaissance aussi pour agir dans ce monde et nous avons effectivement besoin de prévisibilité, mais il est possible que celle-ci soit provisoire et qualitative, que l'on soit obligé de sortir du mythe de ces possibles pré-donnés aussi beau et tranquillisant que les espaces de Piero.

La seule assurance alors que nous pourrions avoir à savoir si une action fonctionne pour le mieux (ou selon les attentes) réside dans une prise de position éthique : être critique à l'égard des principes mêmes de la connaissance que l'on emploie, en science ; toujours maximiser la démocratie et la justice, à la fois localement et, autant que possible, en perspective, dans des sociétés qui sachent changer de cap par le contrôle démocratique.

Le transfert des outils mathématiques

La puissance et l'élégance de ces cadres d'intelligibilité du monde, les espaces infinis pré-donnés, des espaces projectifs de la peinture aux plus complexes des espaces de phases de la physico-mathématique, ainsi que leurs symétries, ne sont pas adaptés aux dynamiques phylogénétiques et ontogénétiques. Il faut donc prendre du recul avant de transférer les mathématiques de la physique à la biologie (et aux sciences humaines) et de se questionner sur les outils : on a l'impression que trop de collègues aiment mieux leurs équations et leurs outils techniques que les phénomènes biologiques (et sociétaux) qu'ils prétendent étudier. Cela n'était pas l'attitude des penseurs révolutionnaires qui ont fait la science, en inventant leurs propres mathématiques.

Dans ce manque radical de prévisibilité rationnelle, si une action visant la justice a un effet contraire (cela peut arriver), la démocratie, disions-nous, est là pour assurer les ajustements, pour imposer une correction ; elle est adaptative. Mais cela exige une pensée critique, qui doit être au coeur de la science et constituer son lien à la philosophie. C'est pour cela qu'un des projets du néo-libéralisme est d'anéantir ou diluer la seconde et de subordonner la première au "marché de la connaissance". Le savoir dans ce marché ne doit surtout pas être critique, mais subordonné à des attentes et des évaluations exclusivement en termes d'applications possibles : « il n'y a plus de différence, aujourd'hui, entre théories et applications », nous dit-on – dans le but de casser toute théorie, surtout si critique et originale, en dehors donc de toute application envisageable. Un savoir qui serait à évaluer comme les agences évaluent les marchés : en conformité aux théories dominantes – et en science, par les indices bibliométriques.

Pour nous résumer et conclure, l'évolution biologique et humaine produit clairement plusieurs effets non linéaires, auxquels nombreux mathématiciens fort justement travaillent (certains même, mais ils sont rares, en les considérant loin de l'équilibre, dissipatifs, voire en transitions critiques). Mais il y a bien plus que cela, puisque l'évolution crée des nouveaux observables, en particulier par des changements permanents de symétries, en fait des espaces des phases. Pourtant, même en comprenant moindrement l'évolution et l'histoire, qui est une extension de l'évolution par le langage et par son écriture (inattendue chez les premiers tétrapodes), nous pouvons espérer mieux agir, si on le fait de façon critique et adaptative. Qui plus est, les mathématiques et la pensée ne sont pas "déjà là", avant notre action dans le monde ; elles sont plutôt des co-constitués de nos activités changeantes dans ce même monde.