INTERFACES DE L'INCOMPLÉTUDE

GIUSEPPE LONGO
CNRS, DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE, ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET CREA, POLYTECHNIQUE, HTTP://WWW.DI.ENS.FR/USERS/LONGO/

Table des matières

Introduction

Le théorème d'incomplétude de Gödel de 1931 n'est pas seulement un grand résultat de la Logique Mathématique, mais il peut aussi devenir le point de départ d'une réflexion qui dépasse les Mathématiques et la question de leurs fondements pour les relier à des problèmes et des méthodes d'autres disciplines. C'est à la lumière de celui-ci que nous nous livrerons à une « histoire critique des idées », c'est-à-dire une relecture explicitement *a posteriori* de certains moments de la pensée scientifique moderne ; ces moments où l'audace des propositions de connaissance se sont heurtées à des problèmes qu'on démontre insolubles et à des résultats négatifs ou limitatifs. Ces derniers ont cependant ouvert à leur tour de nouveaux horizons au savoir. Nous réfléchirons donc à certains grands paradigmes pour leur

Original en italien dans "La Matematica" vol. 4, pp. 219 - 262, Einaudi, 2010 (traduction en français pour un volume en préparation).

trouver un aspect commun dans leurs domaines respectifs — l'incomplétude en l'occurrence, dans ses différents sens. Nous verrons comment on l'a démontrée et, parfois, dépassée. L'analyse détaillée, bien qu'informelle, du théorème de Gödel et d'une réflexion de Turing ne constituera donc qu'un élément de ce texte. On élargira notre grille de lecture — en évitant, espérons-le, des abus et des contaminations impropres — aux analyses scientifiques et épistémologiques de Laplace et à la limite que leur pose le grand « théorème négatif » de Poincaré, comme il l'appelait lui-même. Nous continuerons avec les thèses d'Einstein sur la « non complétude » de la Mécanique Quantique, selon le terme employé dans le très célèbre article qui analyse cette notion, écrit en collaboration avec Podolski et Rosen. Nous parlerons enfin de la complétude supposée des descriptions moléculaires en Biologie, c'est-à-dire de l'ADN vu comme lieu de l'information héréditaire et comme programme complet de l'ontogénèse.

1. De Laplace à Poincaré

Pour Laplace (1749-1827), il faut chercher l'unité de la méthode (et de l'Univers) donc l'identité entre les lois physiques à l'échelle de notre perception et les lois qui régissent les particules microscopiques. Tous les phénomènes observables sont réductibles à l'ontologie élémentaire et sous-jacente de la matière, du mouvement et de la force. Et à ce niveau-là, toute analyse doit se baser sur la possibilité d'isoler, mathématiquement, une seule particule élémentaire et d'en décrire le mouvement. Elle doit ensuite reconstruire, grâce à des opérations d'intégration mathématique, l'expression de la loi d'interaction à distance dans les systèmes de particules. L'analyse des systèmes planétaires doit aussi avancer par composition progressive des mouvements individuels pour arriver à la compréhension du « système » comme somme des comportements individuels et de leurs interactions, deux à deux, trois à trois . . . .

Cette réduction mécaniste est intimement liée, pour Laplace, à la structure de la détermination de tous les événements physiques. Pour les grands noms de la Physique entre XVIII$^{\text{e}}$ et XIX$^{\text{e}}$ siècle, les systèmes d'équations différentielles doivent pouvoir décrire tous les phénomènes physiques importants, en partant de la description et l'intégration des mouvements individuels. En particulier, les lois physiques sous la forme d'abord des équations de Lagrange, puis de Hamilton, doivent pouvoir exprimer la détermination de tout mouvement, toute trajectoire, donc tout événement physique, de la même manière que les lois de Newton-Laplace déterminent l'évolution des corps célestes dans le champ gravitationnel. Et c'est cette détermination équationelles qui permet les *prévisions*, qui mesurent la validité des propositions théoriques, au cœur des rapports entre expérience et théorie : on observe, on théorise (par exemple, on écrit les équations qui lient les actions et les forces observées), on prévoit l'évolution du système grâce à ces équations et enfin on confronte ces prévisions aux nouvelles observations. L'efficacité de prévision est le but même de la formalisation mathématique.

La créativité mathématique des nouveaux formalismes du XVIII^{e} et XIX^{e} siècle permet petit à petit de comprendre l'Univers entier en faisant croître le savoir d'une manière sûre et progressive. L'ambition des équations est de recouvrir complètement le monde, à le rendre compréhensible et prévisible.

Bien sûr, Laplace est aussi un grand du calcul des probabilités et ce n'est pas un hasard. Il sait que de nombreuses évolutions sont aléatoires, comme le lancer des dés, soumis à des forces et des frottements trop nombreux pour tous les connaître. On doit alors analyser ces systèmes d'une manière probabiliste entièrement différente des méthodes propres aux déterminations équationnelles du mouvement. Laplace sait aussi qu'une trajectoire déterministe peut dépendre de « nuances presque insensibles », comme une bille au sommet d'une montagne (un maximum du potentiel) qui, soumise à des perturbations inobservables (« insensibles »), peut prendre une direction ou bien une fort différente, imprévisibles. Il considère pourtant que de telles situations, de tels points initiaux “critiques” sont isolés, des événements rares pour la mesure de l'espace. Et que, pour sûr, on doit pouvoir les traîter par des mathématiques adéquates dans le système qui est un paradigme de stabilité et de certitude quant à sa prévisibilité : le système solaire. « On doit pouvoir déduire tous les faits astronomiques », selon Laplace. Du reste Alexis Clairaux avait calculé jusqu'au temps de retour de la comète de Halley, succès extraordinaire pour les mathématiques de la seconde moitié du XVIII^{e} siècle. Détermination et prévisibilité régissent l'Univers, des particules aux astres, avec d'inévitables fragments d'aléatoire — nous ne sommes pas omniscients — à analyser en termes probabilistes, bien distincts de ceux des systèmes de la description équationnelle. Quand on la connait, cette dernière doit toujours fournir, grâce à des calculs appropriés, l'instrument premier de la prévision scientifique et de la connaissance positive.

Et bien non. Poincaré (1854-1912) démontrera qu'il suffit de considérer trois corps célestes en interaction gravitationnelle pour que le système d'équation qui en décrit le mouvement ne devienne, *il le prouve*, incapable de prévoir l'évolution (nous dirons que le système d'équation est « incomplet » par rapport à la connaissance du processus physique). Quel est le problème ? Newton s'en était déjà rendu compte : sa loi de la gravitation est « universelle », c'est-à-dire qu'elle s'applique à l'interaction de deux astres ou corps quelconques, même celle de planètes entre elles. Ainsi, si on peut déduire de ses équations l'orbite keplerienne d'une planète autour du Soleil, deux planètes en orbite s'attirent aussi l'une l'autre et perturbent réciproquement leurs mouvements. Avec le temps, ces petites perturbations peuvent donner lieu à des changements importants, « séculaires » dira Laplace, lui aussi conscient du problème. Et Newton avait proposé la seule solution susceptible de garantir la stabilité du système « *in saecula saeculorum* » : de temps en temps, de savantes retouches du Bon Dieu rétablissent l'ordre. Laplace en revanche veut éviter toute hypothèse métaphysique ; il pense qu'une analyse mathématique fine devrait démontrer la stabilité du système et sa complète prévisibilité. C'est ainsi qu'astronomes et mathématiciens s'appliquent pendant des dizaines d'années à résoudre les équations des mouvements planétaires ; mais à partir de trois corps ils rencontrent des difficultés insurmontables. En 1890, Poincaré remarque une erreur dans sa démonstration de la convergence de la série de Linsted. Cette série aurait dû fournir une solution analytique au système d'équations gravitationnelles pour trois corps (le « Problème des Trois Corps »). Et, avec tout son génie, il déduit de sa propre erreur l'impossibilité intrinsèque à résoudre le système. C'est-à-dire qu'il démontre que presque partout on obtient des diviseurs de plus en plus petits dans les coefficients de la série, ce qui en empêche la convergence.

De manière encore plus audacieuse et certainement novatrice, il donne un *sens physique* à cette difficulté mathématique, à son « résultat négatif », comme il l'appelle : des changements radicaux pour l'évolution des trois corps peuvent dépendre de variations très petites (non mesurables) des conditions initiales — on parlera ensuite de « sensibilité aux conditions initiales ». Poincaré arrive à ce sens physique par la géométrie : il prouve que dans « l'espace des phases » (dont les points ne sont pas seulement donnés par la position mais aussi par la quantité de mouvement des corps) les trajectoires périodiques stables et instables s'intersectent d'une manière extrêmement complexe (en des points qu'il appelle « homoclines »). Elle se coupent en effet l'une l'autre infiniment souvent, en mailles « infiniment serrées » et se replient de plus sur elles-mêmes « sans jamais se recouper » [1]. Poincaré présente pour la première fois dans cette analyse le chaos déterministe et il présentera par ailleurs la notion de *bifurcation.* Il en déduit, en 1892 déjà, puis plus tard de manière plus développée, que : « Une cause très petite qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est du au hasard » [Poincaré, 1908].

Pour conclure, la détermination équationnelle, ici toute simple — seulement trois corps —, n'implique pas la prévisibilité du système. Plus précisément, la géométrie de ses évolutions *permet de démontrer* cette imprévisibilité comme conséquence de sa complexité. Les points homoclines, les bifurcations . . . produisent la sensibilité aux conditions initiales du système : des fluctuations/perturbations minimes peuvent faire prendre au système des trajectoires très différentes au cours du temps. Ce travail de Poincaré, qui le pousse à invalider un programme de connaissance, marque le début de la « géométrie des systèmes dynamiques » et de l'analyse qualitative des systèmes déterministes imprévisibles. Il s'agit d'une analyse en grande partie topologique des flux globaux, des évolutions et des limites, y compris quantitatives, de la prévisibilité v. [Charpentier et al., 2006]. On arrivera ensuite, nous

1. « Que l'on cherche à représenter la figure formée par ces deux courbes [les « trajectoires »périodiques stables et instables] et leurs intersections [points homoclines] en nombre infini..., ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé par la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme » [Poincaré, 1892]. Poincaré « voit » la géométrie du chaos, sans même le dessiner.

y reviendrons, à calculer le temps nécessaire pour qu'un système, et le système solaire en particulier, ne devienne imprévisible.

D'un point de vue épistémologique, la nouveauté de l'approche de Poincaré est de comprendre que les évolutions aléatoires peuvent se trouver même dans des systèmes dont la détermination est relativement simple et que tout l'aléatoire classique peut se comprendre comme une détermination imprévisible. Un dé, un pendule double et jusqu'au système planétaire..., ce sont là des systèmes déterministes mais chaotiques comme on le dira plus tard (voir [Ruelle et al., 1971] et [Laskar, 1989, Laskar, 1994] pour le système solaire). Pour décrire le lancer du premier, il faudrait de nombreuses équations et cela ne vaut même pas la peine de tenter de les écrire : sa très grande sensibilité aux conditions initiales et à l'environnement rend le mouvement imprévisible. Mais cela n'enlève rien au fait qu'un dé lancé suit une trajectoire parfaitement déterminée par le principe de moindre action, une géodésique physique (une trajectoire qui minimise la variation d'énergie au cours du temps), quoiqu'imprévisible. Seulement deux équations déterminent le mouvement du pendule double, mais son évolution est rapidement chaotique et donc, elle aussi, imprévisible [2].

Quant au système solaire, on en a calculé récemment les temps d'imprévisibilité [Laskar, 1989, Laskar, 1994]. Pour cela, on observe que les barycentres des planètes ne peuvent être mesurés qu'approximativement, ne serait-ce qu'à cause de l'élasticité de la matière. Et si on associe à une analyse fine des équations du mouvement une borne inférieure à la meilleure des mesures possibles, on obtient une borne supérieure à la prévisibilité. Cette borne est relativement modeste en termes astronomiques (quelques dizaines de millions d'années selon les planètes). Pour la dynamique moderne, à partir de Poincaré, le système solaire est donc chaotique. Observons cependant que certains l'ont compris un peu tard et se sont même sentis obligés de s'en excuser officiellement au nom d'une communauté scientifique entière. Ce fut fait d'une façon toute british dans un article célèbre et mathématiquement intéressant, mais sans renvoyer à l'illustre mathématicien français du siècle précédent sinon comme à l'auteur... d'une erreur [Lighthill, 1986] [3].

2. Un pendule peut aussi être vu comme une barre accrochée à un pivot. Si on accroche en bas de cette barre une autre barre, également libre de tourner, on obtient un pendule double. Un théorème récent et amusant [Beguin, 2006] démontre la chose suivante : si on fixe une suite quelconque d'entier a_1, a_2, a_3, …, on peut mettre le pendule double dans une position initiale telle que la seconde barre effectue au moins a_1 tours dans le sens horaire, puis change de sens de rotation pour faire au moins a_2 tours dans le sens anti-horaire, puis à nouveau au moins a_3 tours dans le sens horaire... Si on choisit une suite a_1, a_2, a_3, … aléatoire (v. plus loin la section 5), ce résultat purement mathématique rend sensible (mais ne démontre pas) le chaos et l'imprévisibilité dans un des systèmes déterministes les plus simples possibles. On peut aussi le voir en regardant un bon pendule double physique ou un simulation informatique (qu'on trouvera sur le web, nous y reviendrons).

3. Il est intéressant de comparer la théorisation explicite et l'analyse géométrique de l'imprévisibilité d'un système newtonien dans [Poincaré, 1892] et les références (ainsi que le titre !) dans [Lighthill, 1986]. En effet, deux écoles s'illustrent particulièrement dans la théorie des systèmes dynamiques du XX^{e} siècle : la française (Hadamard, Leray, Lévy, Ruelle, Yoccoz...) et la russe

De manière générale, l'aléatoire classique, vu comme imprévisibilité d'un processus physique, est un cas particulier de détermination : celle qui régit un système déterministe chaotique. On pourrait parier sur les chances que la Terre soit encore dans 100 millions d'années en orbite autour du soleil : il est démontré que c'est à peu près aussi imprévisible que le lancer de dé à son échelle de temps. On notera que le « caractère chaotique » est une propriété *mathématique* précise, définie en général par trois propriétés bien formalisées, qu'on a su préciser avec rigueur et pleine généralité après 1970 (sensibilité aux conditions initiales, existence d'orbites denses, densité des points périodiques) [4].

Dans la plupart des cas, d'un point de vue mathématique, le chaos apparait quand les équations ou la fonction d'évolution du système sont non-linéaires. C'est la manière mathématique typique d'exprimer des interactions et des effets d'attirance/répulsion ou de résonances (techniquement, deux planètes entrent en « résonance gravitationnelle » quand elles sont alignées avec le soleil ; c'est un moment de grandes perturbations réciproques). L'imprévisibilité est, quant à elle, un problème à l'interface entre le système mathématique et le processus physique : si la description mathématique d'un processus physique (les équations ou bien une fonction qui en décrit l'évolution) vérifie les conditions formelles du chaos, c'est le *processus physique* qui devient imprévisible par ce système mathématique. En effet une mesure, en Physique classique (et bien sûr relativiste), est toujours un intervalle, c'est-à-dire que c'est toujours une approximation. Si bien que des fluctuations (internes) ou perturbations (externes) *non observables* (dans l'intervalle d'approximation de la mesure) peuvent engendrer avec le temps des changements bien observables, eux, mais complètement imprévisibles. Autrement dit, pour prévoir ou démontrer qu'on ne peut pas prévoir, il faut essayer de *voir* mathématiquement un *processus physique*. Si cela, c'est-à-dire la détermination donnée par la vision mathématique,

---

(Lyapounov, Pontryaguin, Landau, Kolmogorov, Arnold...). Il faut leur ajouter, entre autres, les américains Birkhoff et Lorentz. Mais les travaux sur ce point de Hadamard, Lyapounov et Birkhoff sont restés longtemps isolés et peu cités. Jusqu'aux résultats de Kolmogorov et Lorentz des années 1950 et 1960, et bien au-delà, la mécanique rationnelle classique — dont Lighthill préside l'association internationale en 1986 — a dominé l'analyse mathématique des dynamiques physiques (ainsi que l'enseignement de la matière subi par l'auteur du présent article, avant les excuses de Lighthill, hélas).

4. Un article fondateur de la notion moderne de chaos dans les systèmes à très peu de degrés de liberté [Ruelle et al., 1971] eut de grandes difficultés à être puiblié. Comme on a dit et comme on le redira, la mentalité laplacienne (mais Laplace, il y a deux siècles, était un grand mathématicien) est encore aujourd'hui présente dans les esprits, bien que désormais ce soit en dehors de la physique mathématique. On peut observer qu'en général, les « résultats négatifs » sont les plus difficiles à digérer. Et ils sont aujourd'hui les plus difficiles à faire financer, même s'ils ouvrent le plus souvent de nouveaux horizons. Et voilà exactement ce que les gestionnaires institutionnels d'une recherche entièrement orientée vers des *projets positifs* et vers des brevets réussiront à empêcher, forts de leurs indices bibliométriques : le rôle d'esprit critique et l'innovation intrinsèquement « anti-orthodoxe » propres à la recherche scientifique, voir [Editors, 2009].

est « sensible aux conditions de l'environnement » (propriété mathématique cruciale des systèmes chaotiques) et si la mesure est approximative, comme toujours en Physique, voilà qu'apparaît l'imprévisibilité.

On indiquera plus loin comment on peut relier, autant d'un point de vue épistémologique que technique, l'imprévisibilité des systèmes déterministes à l'indécidabilité gödelienne des systèmes logico-formels. Du point de vue historique on voit facilement une première analogie (nous en verrons d'autres). La nouvelle conception de la « détermination » physico-mathématique qui découle du résultat négatif de Poincaré, cette limite posée à la connaissance équationnelle, ainsi que de son analyse géométrico-qualitative ont ouvert la voie à la géométrie des systèmes dynamique moderne. De manière analogue, le théorème de Gödel, cette limite posée à la connaissance formelle, marque la naissance de la logique mathématique contemporaine (Théories de la Calculabilité, des Modèles et de la Démonstration). La *fracture épistémologique* — dirons-nous avec Bachelard —, d'une grande importance et très surprenante à l'époque (et souvent aujourd'hui encore), produite par ces grands résultats négatifs, a été extraordinairement féconde en science [5].

2. De la géométrie à la logique

Le programme d'occupation progressive et complète du réel au moyen des équations trouve un parallèle épistémologique dans la vision du « créationnisme » formaliste et en Berkeley un illustre prédécesseur. L'évêque anglais fut particulièrement impressionné par l'invention des nombres complexes, et par ce « i » imaginaire. Cette audacieuse proposition linguistico-symbolique, qui permet de résoudre une équation sans solutions « réelles », lui fit concevoir le mathématicien comme un créateur d'instruments formels de compréhension qui construisent progressivement la connaissance. Selon Peacok (1830) et Peano (1889), on a d'abord ajouté $\sqrt{2}$, qui échappe aux rapports entre entiers, pour comprendre la diagonale du carré ; puis π pour comprendre le cercle. Et on est ainsi progressivement arrivé, avec la gloire finale du « i » imaginaire, au corps algébriquement *complet* des nombres complexes : toute équation algébrique y trouve une solution.

Hilbert reprendra ces considérations dans le cadre d'une analyse très fine de la fondation des Mathématiques. Il cherche des systèmes formels démontrablement cohérents et *complets*, qu'il désignera dans les années 20 comme « solution finale » du problème des fondements qui avait tant secoué les esprits. Heureusement il n'existe pas, en science, de solutions finales.

5. On peut trouver, outre ceux cités, de nombreux autres « résultats négatifs » de grand importance, en particulier en physique (sans compter qu'en mathématiques, par un habile jeu de double négation, tout résultat peut être présenté comme « négatif »). Les résultats dont nous parlons font partie de ceux qui se sont opposé à de grands projets de connaissance, à des théories qui ont marqué l'histoire de la science et qui parfois continuent à guider le sens commun. Ce sont aussi des résultats liés à la négation d'une complétude supposée, sous ses diverses formes, de ces propositions théoriques.

Mais quel problème des fondements ? Il ne s'agit certes pas de ces antinomies du début du siècle à propos de barbiers qui rasent tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes (ces barbiers doivent-ils se raser ?), de ces amusements ou contradictions du dimanche chez le barbier qu'on résout facilement. En effet la pratique (ou « doxa ») mathématique est « typée ». On n'y autorise pas en général les barbiers à se raser eux-mêmes, pas plus que les fonctions à s'appliquer à elles-mêmes. On définit d'abord les fonctions sur les nombres entiers ou réels, à valeurs dans ces « types » (ou d'autres) de nombres ; puis on définit les fonctionnelles sur les fonctions, par exemple l'intégrale ; et on continue ainsi de manière hiérarchisée. Une formalisation qui s'affranchit des précautions d'usage et ne le prend pas en compte mène facilement à des contradictions. Cela arrivera plusieurs fois : ces tentatives font partie de la recherche [6]. Ces antinomies (contradictions formelles) ne méritent toutefois pas le nom de « paradoxe » (contre la « doxa », vue comme savoir commun), riche d'histoire depuis le temps des Grecs, et d'autant moins quand la doxa contient déjà la solution. Il suffira qu'on pense au *paradoxe* de Zénon qui constitue un vrai défi à la doxa et qui a ouvert des siècles de discussions.

Le vrai problème des fondements des mathématiques se trouvait plutôt dans l'effondrement de l'intuition euclidienne de l'espace, de l'absolu newtonnien en coordonnées cartésiennes. Pendant plus de deux mille ans, les « Éléments » d'Euclide avaient fourni le lien entre les constructions géométriques dans l'espace sensible et l'espace physique à toute échelle. Les théorèmes, qui y étaient construits avec règle et compas dans notre monde des sens et de l'action, donnaient à la fois les rapports géométriques entre les étoiles et les mesures des atomes de Démocrite. Pour Kepler, Newton et Kant, l'intuition sensible comme l'intuition mathématique prenait racine dans la reconstruction géométrique de l'Univers. Et celui-ci était écrit, comme l'avait dit Galilée, dans le langage des cercles, triangles et droites euclidiennes. Et bien non, affirmèrent les géomètres du XIX$^{\text{e}}$ siècle : les variétés d'espace intéressantes *ne sont pas* « closes par homotéties ». Qu'est ce que ça veut dire ? Riemann, dans son discours d'habilitation de 1854, propose un cadre général pour ce qu'on appelle les géométries non-euclidiennes. De manière très synthétique, on peut suivre le traitement algébrique que Klein en a fait pour observer qu'une de leurs propriétés cruciales est le fait que le groupe des automorphismes (transformations ou symétries internes) ne contient pas d'homotéties — c'est-à-dire les agrandissements ou rapetissements arbitraires. Dans la géométrie de Riemann, il

6. On peut par exemple rappeler la première formalisation d'un des systèmes fondamentaux de la calculabilité, le lambda-calcul sans type de Church (1932). Le « paradoxe de Curry » qui l'a suivi, une antinomie similaire à celle du barbier en théorie des ensembles, engendra d'abord un raffinement du calcul (1936) puis l'invention d'un autre, avec des « types » (1940). Le premier système formel de types de Martin-Löf (1970) sera lui-aussi contradictoire. Les formalisations, qui perdent en chemin le « sens » — nous y reviendrons —, ont facilement tendance à donner lieu à des contradictions (« La logistique n'est pas stérile », polémiquera Poincaré en 1906, « elle a créé des contradictions »). En vertu du point de vue globalement novateur, et des réponses qu'elles ont rapidement reçues, de telles erreurs de syntaxe ont cependant été à l'origine d'idées et de systèmes très intéressants et non pas d'une crise majeure, sauf chez les logicistes.

peut ainsi arriver que le théorème sur la somme des angles internes d'un triangle — qui est équivalent à l'axiome des parallèles d'Euclide — ne donne pas 180° quand le triangle est agrandi à l'échelle des étoiles. Einstein donnera, avec la courbure des espaces relativistes, un sens physique précis à cette audacieuse négation de l'univers euclidien. Localement, dans les plans « tangents » de courbure nulle, la géométrie euclidienne est une bonne approximation ; mais au niveau global, de l'Univers, c'est justement la courbure non nulle qui permet d'unifier gravitation et inertie, la clé de voute de la Relativité d'Einstein. D'ailleurs, les « forces de cohésion entre les corps sont reliées à la métrique de l'espace » avait compris Riemann quand il démontrait le théorème général du tenseur métrique qui relie à son tour la métrique à la courbure de l'espace.

La courbure non nulle de l'espace, sa structure métrique... gravitation, inertie... une géométrisation révolutionnaire de la physique a trouvé son origine dans le « non » à la doxa euclidienne. Un « délire », dira Frege en 1884, grâce auquel Riemann s'est soustrait à l'intuition de type cartésienne dans les espaces euclidiens. C'était l'unique possible pour Frege au point qu'il continuera même après 1920 à penser aux fondements de la géométrie en termes euclidiens. Mais auparavant, à la toute fin du XIX^{e} siècle, en réaction au délire non-euclidien qui marquait la crise véritable de toutes les certitudes dans l'intuition mathématique, il avait posé les bases d'une nouvelle discipline mathématique, importante et rigoureuse : la logique mathématique moderne.

Bien sûr de nombreuses autres personnes participèrent à ce travail, parmi lesquels Peano. Mais Frege est le premier pour qui l'attention fondationnelle s'affranchit radicalement du rapport à l'espace sensible et intuitif, pour se focaliser sur l'analyse logico-déductive, construite sur le concept fondateur de nombre entier. L'arithmétique est logique ; le principe d'induction (ou récurrence), formalisé par Dedekind et Peano, est un principe logique qui capture complètement, et même s'identifie à la structure conceptuelle des nombres entiers. Les développements extraordinaires de cette approche fondationnelle sont sous les yeux de tout le monde : les machines logico-arithmétiques changent le monde. Elles sont les filles directes d'une réflexion mathématico-philosophique qui part des algébristes anglais, comme Peacock et Boole, pour arriver jusqu'à Turing en passant par Frege, Peano et Hilbert.

3. De Hilbert à Gödel

Hilbert était lui-aussi préoccupé avant tout par la perte de certitude due au tournant non-euclidien en géométrie. Son texte fondationnel le plus important, les *Fondements de la Géométrie* (1899), pose les bases d'une approche originale de la question, bien au-delà de l'unification algébrique des géométries proposée par Klein. Une axiomatique parfaitement abstraite doit capturer formellement les différents systèmes, en assurant les transformations mathématiques de l'un en l'autre et en distillant les propriétés « fondatrices » desquelles dériver tous les théorèmes de chaque système. C'est un calcul des signes, libéré de l'incertitude liée à l'intuition de l'espace, basé sur des axiomes et des règles de déduction dont on pourrait « potentiellement mécaniser » l'application. C'est le lieu de la certitude mathématique, justement parce que vidé de sens, de cette signification spatialle, qui est source d'ambiguïtés et lieu de la peu fiable intuition.

Dans les années suivantes, les “formalistes” insistéront : la certitude réside dans la manipulation formelle de suites finies de signes, grâce à des règles elles-aussi décrites par des suites finies de signes sans aucune référence sémantico-intuitive. Étant donnée la règle “suite-de-signes” « *de* A *et* $A \to B$ *découle* B », on déduit formellement B de A et $A \to B$. C'est-à-dire qu'en appliquant la règle, si le premier A est (composé de) une suite de signes *identique* au second A, on écrit/déduit B. Quel est le sens de la flèche $\to$? Ça n'a aucune importance : une machine doit pouvoir appliquer ce schéma formel de déduction.

Ainsi l'existence des objets mathématiques n'est pas pour Hilbert une question ontologique : elle est assurée par la seule *cohérence* du système axiomatique dans lequel ils sont définis, c'est-à-dire par l'impossibilité de déduire une contradiction à partir des axiomes en utilisant les règles de déduction du système. En d'autres termes, si (on peut démontrer que) un système est non contradictoire, alors les hypothèses et les preuves d'existence, même par l'absurde, sont la garantie existentielle propre aux Mathématiques. C'est un choix fort et courageux, un vrai tournant par sa rigueur et la clarté de l'exposition par rapport aux mythes antiques et ontologiques de triangles et de cercles idéaux qui « existent » car ils sont répertoriés dans l'esprit de Dieu. Pour Frege les signes et les propriétés mathématiques doivent avoir du sens, doivent évoquer dans le langage des concepts signifiants ou qui peuvent en être dérivés. Et c'est lui qui opposera de manière polémique une théorie axiomatique non contradictoire des propriétés de Dieu et qui observera qu'il en a ainsi prouvé l'existence. Ce n'est pas de cela dont parlait Hilbert, rendu furieux par l'observation de Frege, au contraire. Il parlait d'une pratique déductivo-formelle, purement linguistique et propre aux Mathématiques et à leurs objets, sans contenu ontologique au sens de Frege. Mais alors, comment peut-on démontrer la cohérence (le fait d'être non contradictoire) des théories axiomatiques ? Hilbert, dans son livre, traduit ou « interprète » les différentes axiomatiques géométriques, y compris les riemanniennes, dans le continu de l'Analyse, qui elle peut se construire à partir de l'Arithmétique. Il observe ainsi que si on peut donner une preuve de la cohérence de cette dernière, l'interprétation analytique garantit la cohérence de toutes les géométries traitées. C'est pourquoi il pose, dans une très célèbre conférence donnée à Paris l'année suivante (1900), la question de la cohérence de l'Arithmétique (et de l'Analyse) parmi les grands problèmes ouverts pour les Mathématiques du XX^{e} siècle. Et il a raison, vues les conséquences que ce problème aura et l'importance du cadre mathématico-formel proposé. En effet son travail de formalisation des géométries, d'une très grande rigueur, marque la naissance de la méthode axiomatique, un des tournants méthodologiques les plus féconds du XX^{e} siècle.

3.1. ... en passant par Poincaré et Weyl. Poincaré réagit vivement au parti pris de Hilbert et écrit une longue recension de son livre. Il apprécie la nouveauté et la profondeur technique, mais il n'aime pas du tout cette vision des Mathématiques comme pratique sans référence à la signification. C'est, observe-t-il, un « piano mécanique pour raisonner », qui produit des théorèmes de manière purement formelle : « ... on pourrait imaginer une machine dans laquelle on introduit les axiomes d'un côté pour recueuillir des théorèmes de l'autre côté, comme cette légendaire machine de Chicago dans laquelle les cochons entrent vivants pour ressortir transformés en jambons et saucisses » écrira-t-il dans [Poincaré, 1908]. Et le fossé entre les deux visions s'agrandit avec le temps. Hilbert, comme on disait tout à l'heure, reprend — à sa manière, vue l'originalité du personnage — cette tradition linguistico-formelle qui comptait sur le jeu des signes, fussent-ils nouveaux ou vides de sens (comme l'« i » imaginaire), pour pratiquer et faire croître les Mathématiques. D'une part, la gestion potentiellement mécanique des signes devrait être le lieu de la certitude, en tant que cohérence absolue, des Mathématiques. D'autre part, comme il le précisera plus tard, la complétude de formalismes judicieux garantira la possibilité de réduire toutes les Mathématiques à la méthode formelle. Et on entrevoit une fois de plus la trace de l'ancien programme positiviste. Les systèmes formels des équations de Laplace devaient recouvrir le monde, en expliciter la détermination et en prévoir l'évolution, complètement. C'est-à-dire que toute question sur l'évolution astronomique future, dans les systèmes déterministes comme le système solaire doit avoir une réponse. De la même manière, tout problème mathématique doit, pour Hilbert, avoir une solution, une réponse : oui ou non. En particulier le système formel de l'arithmétique doit être complet : chacune de ses assertions, pourvu qu'elle soit bien formulée, doit être décidable.

Bien sûr, parmi les réponses possibles, on peut trouver des résultats d'impossibilité. Les Grecs surent en donner pour l'impossiblité d'exprimer $\sqrt{2}$ comme rapport d'entiers, et on démontre la transcendance de π. Mais la référence conceptuelle de Hilbert, l'exemple théorique auquel aspirer, est le même que pour ses prédécesseurs, Peano en particulier : il s'agit du corps complet des nombres complexes. Le jeu formel audacieux que constitue l'invention d'un « i » sans sens est, comme nous le disions, pour cette école de pensée, l'école formaliste, le paradigme de la pratique et de la créatvité mathématique. Si on étend le corps des nombres réels avec ce nouveau signe sans signification et ensuite par le corps des complexes qu'il engendre, toute équation algébrique admet une réponse et une solution. « Non ignorabimus », en Mathématiques, comme le dira Hilbert dans sa conférence parisienne de 1900. Tout au plus s'agit-il d'étendre le système formel choisi, de manière cohérente, avec de nouvelles notions et des *principes de preuve* bien formalisés pour répondre à toutes les questions purement mathématiques.

Poincaré réfutera cela dans plusieurs textes : les problèmes insolubles, qu'on démontre comme insolubles, existent et sont les plus intéressants car ils ouvrent de nouvelles voies. Nous pouvons ajouter qu'il n'existe pas d'extension formelle des équations de Newton-Laplace qui permette de prévoir l'évolution des trois corps.

Évidemment Poincaré ne peut recourir à cet argument pour s'opposer à Hilbert, car l'imprévisibilité déterministe nait à l'interface entre un système d'équation et un processus physique que le système décrit. Ce n'est pas un problème « purement mathématique » comme l'existence de solutions, l'égalité entre deux fonctions formellement définies ou une assertion de l'Arithmétique... Hilbert pense que ces problèmes doivent toujours trouver une solution, même s'il faut passer par des théorèmes d'impossibilité. Ces derniers ne sont que des étapes pour arriver à la théorie complète dans laquelle on répondrait à toute question mathématique bien formalisée. Bien sûr, une telle théorie doit être cohérente : dans un système contradictoire, on démontre tout et son contraire. Et comme la certitude réside dans la *finitude*, comme elle réside seulement dans le jeu formel des signes, dans un calcul combinatoire sur des suites finies qu'on pourrait automatiser, il faut aussi que la preuve de cohérence soit finie. En d'autres termes, une démonstration rigoureuse est composée de déductions finies, de suites finies de signes, d'écritures formelles ligne après ligne. Par leur caractère mécanique, elles restent loin des ambiguités de la signification. Ainsi pour la théorie première des Mathématiques, l'Arithmétique ou Théorie formalisée des Nombres, à laquelle Hilbert avait réduit les différentes axiomatiques géométriques, la preuve de la cohérence doit être obtenue elle aussi avec un formalisme parfait et sûr, grâce à une analyse finie de suites de signes, ligne après ligne. On aurait pu ainsi assuré d'un seul coup le caractère non contradictoire de la Théorie des Nombres et des géométries euclidiennes et non-euclidiennes.

Lors d'un colloque en 1904, Hilbert propose un programme pour la preuve de cette cohérence, schéma basé sur une analyse inductive des preuves formelles de l'Arithmétique. Non sans ironie, Poincaré observera en 1906 que « Monsieur Hilbert » pense démontrer par induction la cohérence de l'Arithmétique, dont l'axiome principal est... l'induction ! Hilbert s'intéressera moins au problème des fondements pendant plus de dix ans, pour le plus grand profit de l'Analyse et de la Physique Mathématique, auxquelles il contribue de manière très importante. D'ailleurs le « meilleur de ses élèves », le grand géométre et physicien-mathématicien Hermann Weyl, s'éloignera lui-aussi durant ces années de la philosophie des fondements de Hilbert. Dans son livre sur le Continu (1917), Weyl explique à plusieurs reprises que les Mathématiques sont rendues triviales par l'idée de leur mécanisation potentielle et de leur décidabilité, par le biais de démonstrations faites « avec des techniques déductives fixées et en un nombre fini d'étapes ». Et surtout, d'une manière incertaine et confuse, on pourrait dire hésitante (comment oser penser contre un si grand Maître ?), il conjecture l'incomplétude de l'Arithmétique (fin de la sect. 3). Il se définira plus tard comme un « loup solitaire ».

La fermeté de Hilbert dans son travail sur son programme est, en effet, exemplaire. Au début des années 1920, il reprend sa preuve par induction de la cohérence de l'Arithmétique dans un cadre différent : il utilise une induction « métamathématique ». Il met en évidence durant ces années une distinction importante : un système formel est un fragment bien précis des mathématiques alors que le travail, également mathématique, qu'on peut faire sur lui est de la *méta-mathématique*. En d'autres termes, la méta-mathématique prend pour objet d'étude les systèmes axiomatiques formels, en particulier dans la mesure où ceux-ci peuvent être examinés sous la forme de suites finies de signes. Il faut souligner encore une fois l'originalité de la vision de Hilbert : de 1900 à 1922 (et même 1928, lors d'un célèbre congrès de mathématiques à Bologne), il propose une analyse *mathématique* de la déduction mathématique, décrite comme un calcul algébrico-combinatoire. Cette approche de la question des fondements des mathématiques est profondément novatrice. Pour ce qui est de sa preuve de cohérence toutefois, c'est Weyl — Poincaré étant mort — qui lui fera observer que sa démonstration par induction méta-mathématique reste tout de même une preuve par induction arithmétique. Elle ne peut donc pas « fonder » une théorie dont le coeur axiomatique est l'induction. Wittgenstein insistera en 1929 : « la méta-mathématique de Hilbert doit nécessairement se dévoiler comme mathématique déguisée ». Et parce qu'une preuve méta-mathématique « ... repose sur de *tout autres* principes que la preuve d'une proposition... il ne peut y avoir de méta-mathématique en aucun sens essentiel ». Ainsi : « avec les pièces d'échec, je peux jouer selon certaines règles. Mais je pourrais aussi inventer un jeu dans lequel je joue avec les règles mêmes. Les pièces de mon jeu sont maintenant les règles du jeu d'échec et les règles du jeu sont disons les lois logiques. *Ce que j'ai alors, c'est à nouveau un jeu et non un méta-jeu* » [Wittgenstein, 1968, § 153 et p. 315]. Comme nous le verrons, Gödel démolira, mathématiquement et dans la Théorie Formelle des Nombres, le rôle fondationnel de cette distinction entre théorie et méta-théorie. Celle-ci est pratique d'un point de vue technique mais artificielle, ou du moins tend à exclure du cadre hilbertien les aspects épistémologiques des fondements des Mathématiques ; nous y reviendrons.

3.2. **L'arithmétique, un absolu.** L'arithmétique, comme Théorie (formelle) des Nombres, est très importante en Mathématiques et revêt, pour Hilbert pas moins que pour Frege, un caractère central dans sa recherche des fondements. Cependant le cadre gnoséologique utilisé par ces deux hommes est tout à fait différent. Pour Frege, la certitude ultime réside dans la signification des nombres entiers vus comme des *concepts*, comme un absolu logique et ontologique. Pour Hilbert, en revanche, elle réside dans l'Arithmétique en tant que lieu du fini, qu'on peut compter ou écrire avec des signes et symboles finies et qui a pour objet d'étude le fini lui-même. Tous les deux partent du problème de l'espace, de la ruine des certitudes euclidiennes ; mais Hilbert, en grand mathématicien et géomètre de son temps, veut sauver les géométries non-euclidiennes. C'est son principal but, à l'inverse de Frege. Hilbert mentionne le formalisme mécanique comme un outil pour resoudre le problème des fondements et pour travailler ensuite librement « dans le paradis des infinis de Cantor ». Tous deux proposent néanmoins un nouvel absolu : l'Arithmétique.

En effet, la cohérence de l'Arithmétique elle-même aurait été garantie si le programme de Hilbert avait abouti, si on avait trouvé cette preuve formelle, finie et donc arithmétisable (l'Arithmétique — théorie des nombres entiers, finis — permet un codage de tout ce qui est fini, comme le démontrera formellement Gödel). Elle se serait alors soustraite à l'intuition de l'espace et du temps, grâce à des calculs finis (arithmétiques) basés sur des purs signes formels ; elle se serait élevée et soutenue hors du monde par elle-même, comme le baron de Münchausen qui se soulevait en se tirant par les cheveux. Elle serait devenue le lieu de la certitude ultime, sans recours au sens, à l'espace ou à l'action en ce dernier. Ce lieu formellement parfait et clos de la certitude déductive, capable d'auto-démontrer sa propre cohérence, aurait été un absolu différent mais parallèle à l'absolu ontologique des concepts et du nombre chez Frege. Et Hilbert parle en effet d'une preuve formelle *absolue* de la cohérence des Mathématiques, d'une *solution finale* au problème des fondements. Pour qui considère que les Mathématiques sont centrales d'un point de vue épistémologique et cognitif, ce programme propose ainsi le fondement définitif de toute la connaissance, « des protocoles et des règles selon lesquel fonctionne notre esprit » affirme Hilbert dans *Les Fondements des Mathématiques* de 1927.

4. Le Théorème

Et bien, non, ça ne marche pas. Si l'Arithmétique (Théorie Formelle des Nombres) est cohérente, elle est non seulement incomplète — c'est-à-dire qu'il existe dans son langage des assertions indécidables, qu'on ne peut pas prouver, pas plus qu'on ne peut prouver leur négation — mais il est aussi *impossible de la compléter* : il n'en existe pas d'extension formelle cohérente et complète. L'analogie avec le corps algébriquement *complet* des nombres complexes ne fonctionne pas : on ne peut pas ajouter des symboles ou des axiomes pour définir une théorie complète (ou maximale) qui la contienne. Mais il y a plus : la cohérence de l'Arithmétique, quand on la formalise, à la Hilbert pourrait-on dire, n'est pas démontrable en Arithmétique. Autrement dit, il n'y a pas de preuve finitaire de cohérence de l'Arithmétique. Voilà en quelques mots le tournant de Gödel, véritable douche froide sur les ambitions formalistes, que certains s'efforcent encore de sauver en introduisant des variations et de modalités différentes à la notion de « preuve finitiste ». Nous verrons en effet comment on peut « allonger » l'induction finie le long des ordinaux infinis pour améliorer la situation et, d'une manière techniquement intéressante, hiérarchiser les théories et repousser de théorie en théorie le problème de la cohérence. Il n'en reste pas moins que la non « complétabilité » est démontrable et intrinsèque au système. Cela marque la mort du fondement ultime des Mathématiques sur l'absence de sens, sur un calcul des signes potentiellement automatisable.

Voyons quelques points techniques de la preuve de Gödel, sans entrer dans les détails de la démonstration du premier théorème, un chef-d'oeuvre formel. Mais d'abord faisons une remarque. Gödel n'utilise jamais, ni dans les énoncés ni dans les preuves, la notion de « vérité », qui n'est pas une notion formelle. Il faut le souligner, car dans les lectures courantes du théorème, on dit un peu trop vite qu'il montre l'existence « d'énoncés vrais mais indémontrables » dans l'Arithmétique. « Vrais » ? Mais où, comment, pour quelle notion de vérité ? C'est une question délicate sur laquelle nous reviendrons, en évitant les envolées platonisantes qui postulent une liste d'énoncés vrais, déjà présents dans l'esprit de Dieu, mais dont certains sont « indémontrables ». De telles élucubrations n'ont rien à voir avec la preuve de Gödel. Sa force est au contraire de démolir le programme formaliste de l'intérieur, d'une manière formelle. Il utilise de purs calculs sur des signes sans signification et donc n'invoque pas de « vérité transcendante » ; il joue le jeu du pur formalisme. On peut y voir une première analogie de méthode avec le théorème des Trois Corps de Poincaré : ce dernier résultat détruit le mythe d'une détermination équationnelle capable de prévoir complètement l'évolution du monde ; et il le fait lui-aussi « de l'intérieur », par une pure analyse mathématique des *équations*.

La première grande idée de Gödel est de coder avec des nombres toutes les propositions de n'importe quel système formel, donné par un nombre fini de suite finies de signes, sous forme d'axiomes et de règles de déduction. En particulier, en numérotant chaque signe et chaque lettre du langage de l'Arithmétique, Gödel associe bijectivement un nombre-code entier à chaque énoncé de l'Arithmétique formalisée par Dedekind-Peano-Frege-Russell (qu'on appelera AP, l'Arithmétique de Peano). Nous n'avons pas besoin d'entrer dans les détails de cette formalisation qui décrit avec rigueur les axiomes bien connus (les propriétés de 0, du successeur et surtout de l'induction) et encore moins dans les détails de son codage (qu'on appelle « gödelisation » ou encore gödel-numbering). En effet ces codages numériques des lettres sont aujourd'hui... partout. Par la gödelisation des propositions, des phrases... mais aussi de la musique, des images, les machines logico-arithmétiques transforment notre vie. Toutes les phrases que vous voyez sur l'écran de votre ordinateur sont codées par des nombres entiers binaires exactement comme Gödel proposa de faire pour les assertions de n'importe quel langage formel. Nous noterons ici $\underline{A}$ le numéro de Gödel de la proposition A. Par exemple $2 = 1 + 1$ est une proposition, alors que $\underline{2 = 1 + 1}$ est un nombre, disons 651847, le nombre qui code dans la mémoire numérique cette proposition écrite sur l'écran d'ordinateur de l'auteur de ces lignes. Gödel pourra ainsi traiter mathématiquement la notion jusqu'ici informelle de déduction « effective » ou potentiellement automatisable. La déduction de formules à partir de formules sera traitée comme une fonction qui associe à des nombres des nombres (les numéros de Gödel de dites formules). C'est donc un *calcul sur des signes*. Il décrit pour ce faire une classe de fonctions à partir des calculs minimaux qu'on doit pouvoir faire dans AP si l'on considère, comme Hilbert, que AP, l'Arithmétique formalisée, est le lieu de l'effictivité finiste. Ces fonctions prennent pour base la fonction constante 0, la fonction successeur « Succ », et preque rien d'autre. À partir de là, on définit par induction les opérations de somme et de produit... et toute une énorme classe de fonctions arithmétiques, les fonctions *calculables* ou « récursives », car elles sont construites par induction (si on suppose A pour 0 et que de A pour n on puisse déduire A pour $n + 1$, on déduit alors A pour tous les nombres entiers m). Il existait déjà des définitions de classes de telles fonctions, mais Gödel complète et stabilise leur définition avec une grande rigueur.

Nous écrivons donc « $AP \vdash B$ » pour dire que la proposition B se *déduit des axiomes* de AP, c'est-à-dire que B est un *théorème* de AP. Gödel construit alors, par induction sur la structure des formules, des fonctions et des prédicats *dans* AP qui codent la formation et la déduction de formules *de* AP. Par exemple, il définit $\mathrm{neg}(x)$ ou $\mathrm{imp}(x, y)$ qui représentent *dans* AP la négation d'une formule ou l'implication entre deux formules à travers la gödelisation de ces formules. C'est-à-dire qu'on a :

$$AP \vdash \mathrm{neg}(\underline{A}) = \underline{\neg A} \ \text{ et } \ AP \vdash \mathrm{imp}(\underline{A}, \underline{B}) = \underline{A \to B}.$$

En d'autres termes, Gödel code les opérations de construction et de déduction des formules de AP jusqu'à en arriver à un prédicat de AP, qu'on note $Prov(x, y)$, tel que $Prov(\underline{A}, n)$ représente ou code le fait que la formule A se démontre, à partir des axiomes de AP, par la suite finie de formules représentée par leur nombre de Gödel n.

Le lecteur va peu à peu sentir se gonfler une puissante vague de circularité. En effet, on vient de voir rapidement comment on définit, *dans* AP, la déduction *sur* AP. On voit alors comment écrire un prédicat $Theor(\underline{A}) = \exists y, Prov(\underline{A}, y)$ qui code le fait que A soit un théorème *de* AP. Ce prédicat est un prédicat sur des nombres, car ce sont les nombres ce dont AP. Pour le dire autrement, $Theor(\underline{A})$ dit, dans AP, qu'il existe, toujours dans AP, (le nombre de Gödel de) une preuve « y » de $\underline{A}$. De manière plus formelle, le tour de force de syntaxe, de codage et de calcul de Gödel lui permet d'écrire un prédicat arithmétique $Theor$ et de démontrer que :

(1) Si $AP \vdash B$, alors $AP \vdash Theor(\underline{B})$.

(2) Si $AP \vdash Theor(\underline{B})$, alors $AP \vdash B$.

Ou encore, le point (1) dit que si B est un théorème de AP, on sait le dire et le démontrer dans AP car $Theor(\underline{B})$ est aussi un théorème, alors que le point (2) dit l'inverse : si on sait démontrer dans AP que B est un théorème, alors B est effectivement un théorème de AP[7]. Encore une formulation : $Theor(\underline{B})$ n'est rien d'autre que l'écriture dans AP de la fonction « déduction effective » de B à partir des formules-axiomes de AP.

Encore un pas et nous aurons refermé la boucle de la circularité. On note $\neg B$ (non B) la négation de B dans AP. Il suffit alors d'écrire, grâce à de nouvelles ingéniosités de calcul, de récursivité et de déduction, une formule G telle que :

(3) $AP \vdash (G \leftrightarrow \neg Theor(\underline{G}))$.

La formule G est une pure suite de signes, qu'on construit rigoureusement avec le calcul des signes ; cela devrait nous suffire. Mais on peut lui donner une « signification » intuitive. Le lecteur, dont le cerveau n'est pas une Machine de Türing, pourra ainsi « comprendre », attribuer « un sens », même approximatif, à cette preuve, cette construction formelle qu'on présente rapidement. La formule G « dit » que G n'est pas démontrable. C'est-à-dire que AP démontre que G et son caractère

7. Pour être précis, le point (2) demande une hypothèse à peine plus forte que la cohérence : la ω-cohérence.

non démontrable, formalisé par $\neg Theor(\underline{G})$, sont équivalentes. On peut continuer à mettre de force du sens là où il n'y en a pas (et, formellement, il ne doit pas y en avoir) : (on démontre que) G est (équivalente à) la phrase « G n'est pas démontrable ».

L'analogie avec le paradoxe du menteur (« cette phrase est fausse ») est évidente. Gödel reconnait d'ailleurs dans son introduction que cette géniale invention de la culture grecque est une de ses sources d'inspiration. Mais, pour obtenir cette contradiction, il ne faut pas faire référence à la signification (vrai/faux) comme le paradoxe du menteur. Il faut au contraire rester dans la théorie formelle de la démonstration (démontrable/indémontrable). C'est ce que fait Gödel avec une grande rigueur. Maintenant « cette phrase est fausse » n'est ni vraie ni fausse, c'est là sa grande force et son caractère paradoxal. De la même manière, G ne sera pas démontrable, ni sa négation, si on suppose que AP est cohérente.

En effet, supposons que AP soit cohérente, qu'elle n'engendre pas de contradictions (on ne peut, pour aucun A, prouver à la fois A et $\neg A$). On démontre alors que G n'est pas démontrable dans AP : si elle l'était, c'est-à-dire si $AP \vdash G$, le point (3) implique que $\neg Theor(\underline{G})$ est aussi démontrable. Or le point (1) nous dit que $AP \vdash Theor(\underline{G})$. Contradiction.

Mais $\neg G$ n'est pas non plus démontrable. En effet on peut utiliser la contraposition, qui se formalise pour toute théorie T par

(Contrap) : $T \vdash (A \to B)$ implique $T \vdash (\neg B \to \neg A)$,

et le résultat de logique classique $AP \vdash (\neg\neg A \to A)$. Le point (3) se réécrit alors $AP \vdash (\neg G \leftrightarrow Theor(\underline{G}))$. Donc une preuve de $\neg G$ donne une preuve de $Theor(\underline{G})$, et donc de G par le point (2). Contradiction.

Voilà donc une proposition de AP qui n'est pas démontrable : ni elle, ni sa négation. Donc, si AP est cohérente, elle est incomplète.

Mais qu'a-t-on utilisé de AP ? Uniquement sa capacité à coder des propositions et des preuves formelles. Ainsi toute théorie formelle T suffisament expressive, c'est-à-dire qu'on peut coder de manière finitiste et qui contient AP, permet de construire une assertion G_T qui est indépendante de T, si T est cohérente. Pour toute extension cohérente T de AP, il existe des propositions indécidables pour T. AP est donc *impossible à compléter* : il n'y a pas de « corps » (théorie formelle cohérente) qui soit complet (maximal) et qui contienne l'Arithmétique, pour reprendre le modèle du corps algébriquement clos des nombres complexes. Quant aux théories mathématiques qui ne contiennent pas AP, elles ne savent pas compter avec les nombres entiers : en général on n'y fait pas grand chose. Dans ce rapide survol des codages et des contradictions nous avons dû omettre des détails essentiels (et parfois, mais pas toujours, mathématiquement difficiles). Le caractère très technique du Premier Théorème, ces longues pages de codage et de déductions formelles, ne nous permettent pas d'y rentrer plus avant dans un texte comme celui-ci.

Mais attention, nous n'avons pas fini de nous casser la tête : il y a un Second Théorème d'incomplétude. Que veut dire formellement que AP est cohérente ?

Comme nous l'avons dit, une théorie (mathématique) est cohérente si elle n'engendre pas de contradictions : on ne peut pour aucun A démontrer A et $\neg A$. Il suffit d'une seule contradiction pour tout en déduire : on disait jadis « ex falso quodlibet ». AP est donc déjà contradictoire si on démontre seulement $0 = 1$ qui nie un des axiomes. Il est alors facile de dire dans AP que AP est cohérente : il suffit d'affirmer $\neg Theor(\underline{0 = 1})$. Donc la proposition $Coer \equiv \neg Theor(\underline{0 = 1})$ est une proposition de AP qui énonce la cohérence de AP, en disant formellement que AP ne démontre pas $0 = 1$. Il faut remarquer la force du formalisme : $Coer$ décrit dans la théorie AP l'assertion éminement méta-théorique (méta-mathématique) « AP est cohérente », ou AP n'engendre pas de contradiction. Si on prouve que $Coer$ n'est pas démontrable dans AP, nous aurons démontré l'impossibilité de démontrer avec des méthodes déductive formelles et finies, donc codables dans AP, la cohérence de AP.

Grâce à tout le travail technique réalisé pour le premier théorème, Gödel prouve ce résultat en quelques lignes. Ces lignes sont cependant d'une extrème densité et d'une extrème abstraction. On s'est éloigné de tout besoin (et même de toute opportunité mathématique) d'interprétation. Tout est fondé sur la proximité syntaxique entre les formules $\neg Theor(\underline{G})$ et $\neg Theor(\underline{0 = 1})$. Bref, le second théorème d'incomplétude démontre :

(4) $AP \vdash (Coer \leftrightarrow G)$.

C'est-à-dire qu'on démontre dans AP que $Coer$ et G sont équivalentes. Bien sûr, le sens qui nous intéresse le plus est : $AP \vdash (Coer \to G)$. Comme G n'est pas démontrable, $Coer$ non plus n'est pas démontrable !

Arrétons-nous un instant sur l'extraordinaire calembour ainsi construit. Commençons par écrire « $(AP, A) \vdash B$ » pour dire que B est conséquence des axiomes de AP avec *l'hypothèse supplémentaire* A. Ainsi $(AP, Coer)$ désigne les axiomes de AP auxquels on a ajouté l'*hypothèse de cohérence formalisée*. Observons alors que $AP \vdash (Coer \to G)$ et $(AP, Coer) \vdash G$ sont équivalentes (c'est un résultat général du calcul des propositions). On utilise aussi l'abréviation $AP \not\vdash B$ pour dire que AP *ne démontre pas* B. Nous pouvons réécrire de manière synthétique respectivement le premier et le second théorème :

(5) Si AP est cohérente, $AP \not\vdash G$ et $AP \not\vdash \neg G$.

(6) $(AP, Coer) \vdash G$.

Le passage du point (5) au point (6) est le point important et rarement mis en lumière. Sous l'hypothèse méta-théorique de cohérence, AP ne démontre ni G ni sa négation (c'est le point (5)). En revanche si on formalise la cohérence dans la théorie, avec $Coer$, et qu'on l'ajoute comme hypothèse à AP, on peut alors en déduire formellement G dans AP. Dans les deux cas, qu'il s'agisse de démontrer l'indécidabilité de G ou de *démontrer* G, l'hypothèse de cohérence est essentielle et elle donne des résultats différents. Plus précisément, après avoir codé la méta-théorie dans la théorie, avec la gödelisation et la construction de $Theor$ (ce sont les propriétés (1) et (2)), les points (5) et (6) démontrent que la seconde est en quelque sorte « plus forte ». En effet, avec l'hypothèse de cohérence, codée, la théorie *démontre* une assertion qui est formellement *indémontrable* si on suppose la cohérence au niveau uniquement méta-théorique.

C'est un coup d'arrêt définitif à la vision de Hilbert. Comme l'avait senti Wittgenstein, la méta-mathématique, quand elle est rigoureuse, fait partie des Mathématiques. Encore une fois, Gödel le prouve avec les points (1) et (2) : $Theor$ code dans la théorie AP la notion méta-théorique de démontrable. En jouant entre les points (5) et (6) il montre même que la théorie est encore plus expressive que la méta-théorie (ou encore, nous le verrons mieux en 4.1, la déduction méta-théorique de G à partir de la cohérence suit de la déduction dans la théorie). La méta-induction n'existe pas ; c'est une forme d'induction, qu'on peut parfaitement coder avec l'induction théorique (la remarque de Weyl). L'utilisation des termes méta-théorique ou méta-mathématique peut être pratique, notamment d'un point de vue didactique, par exemple pour faire la différence entre « Cohérence de AP » et $Coer$. Mais elle n'est pas fondamentale : on ne peut pas fonder les Mathématiques, pas plus qu'un autre savoir, en ayant recours à son méta-... Aucun méta-langage ne fonde le langage : « nous sommes enfermés dans la cage du langage », écrit Wittgenstein. Seule une « généalogie des concepts », disait Riemann — qu'il faut enraciner, avec le langage bien sûr, mais *au-delà* du langage, *avant* le langage, *sous* le langage, dans l'action dans l'espace (Poincaré) ou dans le temps (Brouwer) — peut proposer une analyse épistémologique des mathématiques, ce savoir ainsi construit dans le monde, pour organiser et comprendre le monde.

4.1. **Et la « vérité » ?** On continue — y compris d'illustres collègues — à proposer une vulgarisation facile et habituelle, que ce soit par « ontologisme » platonisant, par paresse ou pour épater le lecteur. Celle-ci adhère encore à la lecture rapide et ontologiquement naïve du théorème de Gödel. Ils sont ainsi nombreux à invoquer, dans de grands gestes et les yeux levés au ciel, l'existence stupéfiante d'assertions vraies mais non démontrables, comme G (oh ! miracle ontologique ou... quantique : et si G était vraie grâce à des effets quantiques dans le cerveau ?). Devant de telles affirmations, il faut toujours demander : mais comment peut-on dire que G est « vraie » ? D'ailleurs comment affirmer en Mathématiques qu'une assertion est vraie sans la démontrer (ou la prendre comme hypothèse) ? L'interlocuteur doit alors raisonner et *démontre* G, pour nous convaincre de la « vérité (non démontrable) » de G. L'hypothèse de cohérence, rappelle-t-il, implique que G n'est pas démontrable (premier théorème). Et comme G « affirme » n'être pas démontrable (elle est équivalente dans AP à $\neg Theor(\underline{G})$), elle est vraie. Ce raisonnement à partir de l'« interprétation » de $Coer$ et de G est informel, vague et non écrit ; mais, une fois formalisé, c'est une version sémantique et forcée de la rigoureuse implication formelle $AP \vdash (Coer \to G)$ qui constitue le cœur du second théorème. Ce dernier déduit justement G de $Coer$ formellement, et donc démontre G. Donc, une fois qu'on se donne une interprétation de AP dans le modèle des entiers numériques (ce qui donne la cohérence), G est « évidemment » vraie, car c'est une conséquence formelle de $Coer$. En définitive, on *démontre* la vérité de G et même tout platonicien acculé le fera, si on le questionne. On le fait, et même facilement, *dans AP* et *à partir* de *Coer* : c'est le second théorème. Comme on le disait, on en revient à l'extraordinaire finesse du résultat de Gödel, au jeu subtil entre les points (5) et (6). Et il n'y a nul besoin de miracle ontologique ou de Mécanique Quantique.

On verra plus loin des résultats « concrets » d'incomplétude, c'est-à-dire des assertions combinatoires de la Théorie des Nombres (du genre « pour tout x il existe y... puis une expression numérique compliquée en x et y »), intéressantes et pas banales, qui ne sont pas démontrables dans AP — pas même à partir de $Coer$ — mais avec des extensions infinies de l'induction. Vu leur complexité combinatoire, personne n'ose dire de ceux-ci qu'ils sont « évidemment » vrais en évoquant des miracles ontologiques ou quantiques. On en est réduit à les démontrer, bien sûr en dehors de AP, comme nous l'expliquerons [8].

Quelle est la responsabilité de Gödel là-dedans ? L'article de 1931 est parfait : il n'y a pas un seul énoncé, une seule preuve ni un seul raisonnement qui en appelle à la « vérité » ou qui fasse référence à une *interprétation* du jeu formel. Dans l'introduction seulement Gödel veut expliquer de manière informelle le sens du théorème I et il observe que G, l'énoncé qui sera indémontrable, est *correct*. Mais il ajoute *immédiatement après* que l'analyse précise du raisonnement méta-théorique qui le prouve — raisonnement que nous avons esquissé — mènera à des « résultats surprenants » du point de vue des « preuves de cohérences des systèmes formels » (le second théorème !).

Bien sûr la vision ontologique peut encore être sauvée : la preuve est seulement un point d'accès à une réalité pré-existante qui peut parfois ne pas être que formelle. Plus précisément, on peut donner une bonne notion de vérité relative au rapport entre un système formel et une structure mathématique donnée. Par exemple, imaginez la suite des nombres entiers avec les propriétés apprises à l'école primaire. Vous savez dire que $4 + 3 = 7$ est vrai, ou que $667 \times 52 = 34084$ est faux, ou que $7 < 8$... La théorie formelle (AP) permet de le démontrer de manière automatique (et une machine le fait beaucoup mieux que nous). Il est donc possible de considérer ces propriétés « vraies » ou « fausses » en associant aux signes de la théorie les nombres concrets et signifiants de votre expérience scolaire. En général, on dira qu'une théorie formelle est « correcte » si elle prouve *seulement* des assertions vraies dans le modèle associé (ou standard) et « complète » si elle prouve *toutes* les assertions vraies dans ce modèle.

8. Dans la recherche ontologique d'une vérité mathématique non démontrable, on utilise parfois le « fait » que G doit être soit vraie soit fausse, ou encore — ce qui revient au même — que soit G soit $\neg G$ est doit être vraie, *sans dire laquelle* car il faudrait le démontrer. Cette « ontologie faible du vrai » vient d'une hypothèse classique et légitime (le tiers-exclus) mais très forte et insatisfaisante sémantiquement (ou de très mauvais goût — et c'est important en mathématique) quand il s'agit de discuter de la vérité de l'assertion G : c'est une réécriture formelle du paradoxe du menteur qui n'est justement ni vrai ni faux. Gödel lui-aussi utilise le tiers-exclus (G est indépendante de AP classique) mais justement pour nous donner, en *théorie de la démonstration*, le « tiers » : l'indécidable.

Et, en effet, Alfred Tarski propose dans les années 1930 une théorie générale de la vérité (la sémantique tarskienne), le fondement de la nouvelle Théorie logico-mathématique des Modèles. On y associe à chaque signe formel l'« objet » correspondant dans la structure (le modèle) associée : le « 0 », comme signe, correspond au premier élément de la structure bien ordonnée des entiers ; le signe de fonction $Succ$ sera le passage au suivant dans l'ordre... La description formelle s'adapte à la structure sous-jacente, dont ensuite dérive les propriétés. Développer une théorie générale de la vérité de l'expression linguistique et scientifique comme « adaequatio intellectus et rei » est un exercice très délicat. Les abus, inspirés par le travail de Tarski, furent nombreux. Certains ont étendu la sémantique tarskienne par exemple aux langages historiques. On observe alors que « la neige est blanche » est vrai quand la neige est blanche (fulgurance de l'esprit !). Ainsi « le pré est vert » est presque toujours vrai, tandis que « le pré est bleu » est presque toujours faux (observation délicate pour les grecs anciens, qui n'avaient qu'un seul mot pour vert et bleu). Et nous aurions du mal à arbitrer une dispute entre deux esquimaux dont l'un dit « aujourd'hui la neige est blanc5 » et l'autre dit « blanc7 » (il paraît que les esquimaux disposent de 20 noms différents pour le blanc-neige). La couleur n'est pas une longueur d'onde précise et définie, mais un geste humain qui trace des frontières dans un quasi-continuum de longueurs d'onde, un geste riche d'intersubjectivité et d'histoire. Et il en est ainsi de toute la construction de l'objectivité. Mais pour l'Arithmétique, en première approximation, cette sémantique peut suffire et le lecteur peut se satisfaire de ce qu'il a compris à l'école. Il n'a qu'à associer les signes formels à sa compréhension scolaire des nombres entiers. Mais nous verrons comment la notion de vérité (ou « élément de réalité » comme dira Einstein), devient une énorme défi en Mécanique Quantique ; nous en reparlerons en examinant sa prétendue « non complétude ». On peut maintenant dire que Gödel démontre qu'il existe — et même construit — un énoncé vrai à la Tarski et formellement indémontrable. Et on peut expliquer qu'il est vrai parce que AP le prouve à partir de l'hypothèse formalisée de cohérence : si alors on suppose $Coer$ vrai, comme $AP \vdash (Coer \to G)$ et AP est correcte, G aussi est vraie (je le démontre) [9].

L'importance historique de l'extraordinaire article de Gödel devrait maintenant être évidente, non seulement pour les conséquences sur les fondements des Mathématiques, mais aussi pour les *techniques* inventées tout au long de la preuve du premier théorème. La gödelisation et la définition de la classe des fonctions récursives ouvrira la voie à la Théorie de la Calculabiblité et donc aux travaux des années 1930 de Church, Kleene, Turing... Ces derniers, surtout Turing, posent à leur tour les bases de l'Informatique moderne en partant — insistons là-dessus — de problèmes entièrement logico-mathématiques : la question de l'indécidabilité et la définition de nombre réel calculable (c'est-à-dire effectivement générable par un

9. Rappelons pour le lecteur un peu assomé par ce calembour que la question réside dans la différence entre l'hypothèse méta-théorique de cohérence et $Coer$, l'hypothèse théorique de cohérence qui permet de démontrer G dans AP.

algorithme). Il est intéressant de noter comment Gödel et, cinq années plus tard, Turing inventent la notion rigoureuse de calculable ou effectivement décidable dans le cadre des langages et systèmes formels, ce qui stabilise aussi définitivement la notion de système formel hilbertien (la « machine à saucisses » de Poincaré) : ils ont pour but de démontrer qu'on peut exhiber des propositions ou des processus non décidables, non calculables (qu'on ne peut pas générer automatiquement, comme des saucisses, sans utiliser d'autres hypothèses). Pour dire non, il faut définir exactement ce à quoi on dit non. Et ainsi, si c'est intéressant, le rendre encore mieux utilisable, jusqu'à devenir la machine arithmétique (ou de Turing) qui change le monde d'aujourd'hui.

Comme avec le Théorème des Trois Corps de Poincaré, le résultat négatif est le point de départ d'une nouvelle science grâce à son contenu et aux méthodes qu'il propose. Il faut dire qu'en 1931 la portée de l'analyse de la calculabilité proposée par Gödel n'était pas évidente. Gödel, qui en avait conscience, écrit à la fin de son article que son résultat ne contredit pas nécessairement le point de vue formaliste de Hilbert. On pourrait trouver d'autres formalisations de la notion informelle de déduction effective qui ne serait pas nécessairement codable avec ses fonctions récursives. Ce n'est que grâce aux résultats d'équivalence de tous les systèmes formels pour la calculabilité prouvés par Turing et Kleene en 1935 et 1937 qu'on aura la preuve de la généralité de la méthode de Gödel. La thèse de Church proposera l'invariance mathématique de toutes les notions de calculabilité et de la notion de déduction effective ou acceptable pour le finitisme. Et dans une note de 1963, Gödel reconnaitra l'entière généralité de son théorème : il se base sur une notion « sûre, précise et adaptée » de système formel et contredit la décidabilité, la complétude et la cohérence démontrable (formellement) « de tout système formel cohérent qui contient une théorie des nombres finitaire suffisamment expressive ». Et la recherche d'extensions propres (et consistantes) de l'Arithmétique et de la Théorie des Ensembles formelles marquera les développements de la logique des décennies suivantes [10].

5. Poincaré vs. Gödel

Nous avons tenté d'expliquer comment le théorème des Trois Corps de Poincaré peut être vu comme un « précédent philosophique » du théorème de Gödel. L'imprévisibilité ressemble à de l'indécidabilité, dans le temps et dans l'espace ; d'un point de vue philosophique, Poincaré apprécie constamment les problèmes insolubles, les « résultats négatifs ». Mais, techniquement, on ne peut pas corréler directement les

10. On peut faire mention de l'analyse ordinale de Gentzen (1935). L'infini, comme ordre au-delà des entiers ou comme cardinal au-delà du dénombrable, fournit des outils d'analyses des preuves pour combler l'incomplétude de l'Arithmétique comme de la Théorie des Ensembles qui est incapable dans sa version formelle (ZF ou NBG) de répondre aux questions pour lesquelles elle était née : la validité de l'axiome du choix et de l'hypothèse du continu. Les résultats d'indépendance respectifs ont jeté une lumière supplémentaire sur l'expressivité et les limites des systèmes formels [Kunnen, 1980].

deux théorèmes ; ne serait-ce que parce que la prévisibilité laplacienne est un problème d'interface système mathématique/processus physique et non pas une une question purement mathématique comme la décidabilité hilbertienne. Nous pouvons cependant établir une corrélation mathématique entre certaines *conséquences* de ces deux grands théorèmes.

Le géométrie des systèmes dynamiques étend la détermination physico-mathématique et capture l'aléatoire, contrairement à la distinction de Laplace. L'aléatoire classique, comme nous l'avons dit, est du déterminisme imprévisible. Or, cet aléatoire peut aussi être donné par des moyens purement mathématiques sans référence à des processus physiques. Birkhoff en a donné une définition dans les années 1930, comme conséquence d'un de ses résultats importants. De manière très informelle, si on se donne une observable dans une dynamique donnée (la vitesse ou l'accélération en chaque point, par exemple), un point est dit *aléatoire* si la moyenne de l'évolution temporelle de l'observable pour le point coïncide à l'infini avec la moyenne de l'observable sur l'espace entier (la moyenne temporelle coïncide asymptotiquement avec la moyenne spatiale). Pensez à une particule dans un volume isolé de gaz parfait : sa vitesse moyenne dans le temps sera égale à la vitesse moyenne de toutes les particules du gaz considéré. Quand on pousse cela à la limite asymptotique, en s'éloignant de l'inspiration physique, on obtient une façon mathématique de définir un mouvement aléatoire, et même un *point aléatoire* (l'origine de la trajectoire).

Plus précisément, soit (D, μ, T) un système dynamique, c'est-à-dire une transformation (une dynamique) T d'un espace D dans lui-même et μ une mesure sur D. Sous des bonnes hypothèses sur le (D, μ, T), un point x de D est (Birkhoff-)aléatoire (ou « générique » au sens ergodique) si, pour toute observable f (fonction sur D à valeurs réelles), on a :

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \left(f(x) + f(T(x)) + \ldots + f(T^{n-1}(x)) \right) = \int_D f d\mu.$$

Évidemment T détermine la dynamique et tout cela a un sens pour des systèmes déterministes chaotiques (en fait, “faiblement” chaotiques : on dit “mélangeants” ou “mixing”). Nous avons donc rendu mathématique la notion d'aléatoire déterministe à la Poincaré [Petersen, 1983].

Revenons à Gödel. Dans les années 1960, P. Martin-Löf a donné une notion d'aléatoire pour les suites infinies de nombres (par exemple 0 et 1) complètement basée sur la récursivité à la Gödel. L'idée, avancée lors d'une thèse de doctorat dirigée en partie par Kolmogorov, a ensuite été amplement développée, notamment par G. Chaitin et C. Calude. En résumé, on définit la notion de « test effectif d'aléatoire » en termes de fonctions récursives : on contrôle les possibles régularités ou segments calculables dans une suite. Une suite aléatoire ne doit avoir aucune régularité effectivement reconnaissable (“testable”) qui se répète indéfiniment. On énumère alors tous les tests effectifs possibles et on qualifie de *(ML)-aléatoire* un suite infinie qui passe « tous les tests effectifs ».

Plus précisément, considérons l'espace 2^ω des suites infinies de 0 et de 1. Un ouvert U_s dans cet espace est « un éventail » défini par une suite initiale finie commune : $U_s = \{x/\ s$ est une suite initiale de $x\}$. Donnons-nous une mesure μ calculable sur cet espace topologique, c'est-à-dire une fonction calculable et σ-additive des ouverts vers les nombres réels calculables (qu'on peut générer effectivement). Un *test de Martin-Löf* est une séquence d'ouverts $(U_{s_n})_{n\in\omega}$ telle que s est une fonction calculable des entiers dans les suites finies et $\mu(U_{s_n}) < 2^{-n}$. Un élément x de 2^ω *ne passe pas* le test $(U_{s_n})_{n\in\omega}$ si $x \in \cap_n U_{s_n}$. Alors x est (ML)-aléatoire s'il *passe tous* les tests de Martin-Löf (c'est-à-dire qu'aucune suite effective et convergente d'ouverts ne peut « capturer asymptotiquement » x) [Martin-Löf, 1966, Calude, 2002]. Une suite infinie de 0 et de 1 peut aussi être interprétée comme (bijectivement associée à) un nombre réel, ou plus généralement à un point d'un espace métrique.

Il est facile de démontrer qu'une suite (ML)-aléatoire est (fortement) indécidable au sens de Gödel : elle est non seulement indécidable et aussi impossible à générer effectivement (semi-indécidable), mais elle implique même qu'aucune de ses sous-suite infinie ne peut être effectivement générée. La conjecture, énoncée par l'auteur et prouvée récemment grâce au travail de deux thèses qu'il a codirigées, était que les deux aléatoires, dynamique et « gödelien » (algorithmique), devaient être équivalents. Et, en effet, si on donne une structure d'effectivité à une vaste et intéressante classe de dynamiques physico-mathématiques (D, T, μ) — et pas seulement sur le simple 2^ω —, on peut démontrer que l'aléatoire à la Poincaré-Birkhoff et celui à la Gödel-Martin-Löf (légèrement modifié, à la Schnorr, et généralisé à ces espaces) coïncident, [Gacs et al., 2009].

Soyons clairs, on ne peut pas déduire du théorème de Poincaré celui de Gödel (ni l'inverse !). Cependant, comme nous l'avons dit, dans les théories proposées par l'un et l'autre, et plus spécifiquement en renforçant leurs résultats négatifs, on donne des notions limites, purement mathématiques, d'aléatoire dynamique et d'aléatoire algorithmique. Et ces notions coïncident, sous des bonnes hypothèses (des hypothèses qui ont un sens physique) sur les dynamiques concernées. Observons que l'introduction de l'aléatoire classique dans les systèmes déterministes, le considérer comme détermination imprévisible, est un point de grande importance pour la nouvelle vision des systèmes dynamiques proposées par Poincaré ; et de la même manière l'indécidabilité est au cœur du théorème de Gödel (et l'aléatoire algorithmique en est un renforcement). Notons enfin que démontrer l'équivalence, asymptotiquement, de l'aléatoire algorithmique et de celui des dynamiques physiques ne signifie pas du tout que « l'Univers est un (grand ?) algorithme ». Au contraire on a démontré que dans un cadre déterministe et sous certaines hypothèses, l'aléatoire ou l'imprévisibilité dynamique coïncide avec l'aléatoire algorithmique, qui est une forme forte d'indécidabilité. Donc — en contraposant (la règle Contrap énoncée plus haut) l'équivalence — une procédure algorithmique, une méthode de semi-décision ou une fonction calculable (récursive) engendrent seulement des processus déterministes prévisibles. Or non seulement le dé bien-sûr, mais aussi le système solaire (ou juste trois corps célestes) et presque tout ce qui nous entoure est un tissu de corrélations et, donc, un « système d'interactions ». Cela rend les processus physiques presque toujours (pas toujours) mieux décrit par des systèmes non-linéaires et donc imprévisibles, c'est-à-dire non calculables (rappelons le rôle de la mesure physique, qui est toujours un intervalle, de la sensibilité aux conditions initiales et du "mélange").

Plus généralement, la compréhension du monde donnée par les mathématiques du continu et celles du discret est différente : le monde n'est pas la somme de petits carrés ou de petits points, comme les tableaux de Seurat, auxquels l'accès (la mesure) est exact. Turing avait parfaitement compris cela dans les dernières années de sa brève vie.

5.1. **Turing : des sytèmes formels aux dynamiques continues.** « La Machine à États Discrets », écrit Turing en 1950 à propos de la Machine Logique qu'il a inventée en 1936, le prototype de l'ordinateur numérique, « est laplacienne » : l'imprévisibilité ne peut-être que pratique (un programme trop long et compliqué), et n'existe pas en principe, insiste-t-il, comme dans la physique des « systèmes continus ». C'est ainsi qu'il définit les systèmes qu'il étudiera dans son article fondamental de 1952 consacré à la morphogénèse (les dynamiques continues de formes). Dans les systèmes continus non-linéaires d'action/réaction/diffusion de 1952, l'évolution des formes — par exemple les couleurs sur le pelage d'un animal — est sensible aux conditions initiales (elle est sujette à la « dérive exponentielle » ou à « l'instabilité catastrophique », comme dit Turing). Il en étudie surtout des approximations linéaires, mais il discute le cas non-linéaire et comprend que des changements imperceptibles pour la mesure physique, *et donc pour toute discrétisation*, peuvent causer de grandes différences avec le temps. Turing change complètement de domaine de recherches et de point de vue. Les dynamiques continues remplacent la succession des états discrets de sa première Machine. Le "calcul" (l'évolution du système) n'est plus basé sur la distinction fondamentale, qu'il a inventée lui-même, entre logiciel et matériel (bien discrets eux), mais est plutôt un continuum de déformations, une *genèse continue* de formes, uniquement du matériel qui change de forme ; tournant remarquable d'un grand esprit, loin de toute monomanie computationnaliste.

Essayons très rapidement de saisir le sens de la réflexion de Turing. Grâce à ce changement de point de vue, nous comprendrons pourquoi le résultat de corrélation entre les aléatoires dynamique et algorithmique contribue à son tour à nier formellement le mythe d'un univers a identifier au calcul informatique. L'approximation de ce calcul transfère les déterminations équationnelles sur des bases de données discrètes ; ici l'accès aux données est *exact*, contrairement à la mesure physique qui est toujours un intervalle. De plus, à cause des arrondis successifs, les orbites des dynamiques chaotiques, quand elles sont calculées par une machine, diffèrent rapidement des orbites physiques décrites dans l'espace-temps continu. Ainsi la sensibilité aux conditions initiales peut être cachée dans une théorie des algorithmes, nécessairement arithmétique, et la discrétisation impose des évolutions différentes de celles que l'on sait décrire dans le continu mathématique. Prenez la meilleure simulation par ordinateur du pendule double (c'est facile, il n'y a que deux équations ; on en trouve sur internet). Si vous la lancez et la relancez sur les mêmes valeurs initiales, l'algorithme fera parcourir exactement la même trajectoire au pendule simulé mille ou dix mille fois. Ceci n'a aucun sens physique. En effet, l'évolution imprévisible (aléatoire) de ce processus physique très simple est exactement caractérisée par le fait que, relancé sur les mêmes conditions initiales (dans le monde physique où la mesure n'est pas exacte et par nature un intervalle), il ne parcourt pas plusieurs fois la même trajectoire en général. À cause de la sensibilité aux conditions initiales, après quelques oscillations et à partir de l'intervalle même de la meilleure mesure physique possible, il suit des orbites très différentes. Les mathématiques du continu nous le disent *a priori*. Et certains appellent aléatoire un processus physique justement quand, répété à partir des « mêmes » conditions initiales (au sens physique), il ne suit pas la même évolution.

Ceci est étranger à la théorie des algorithmes, et ce n'est qu'artificiellement que celui qui a compris peut imiter le phénomène physique. On peut par exemple ajouter au moment de chaque relance, un déplacement d'un chiffre à gauche ou à droite selon un aléatoire pris sur internet (les utilisateurs de Skype sont-ils en nombres pairs ou impairs à cet instant ?). Mais c'est une « imitation » et pas une « modélisation » du phénomène physique. À ce propos, Turing fait une très subtile distinction entre *imitation* (le jeu décrit dans l'article de 1950) et *modèle* (1952). Ce dernier ne cherche pas à berner l'observateur, comme l'imitation, mais bien à rendre intelligible le processus physique examiné et en proposer une structure de détermination. Par exemple, la sensibilité du pendule double aux fluctuations de température n'est pas rendue intelligible, du point de vue de la « causalité », par le recours à un aléatoire du réseau sur une machine à états discrets. Elle est bien imitée. Les équations différentielles de son mouvement, un modèle mathématique, en fournissent en revanche une détermination formelle ; elles mettent en évidence les forces en jeu et permettent d'analyser la divergence des trajectoires (la « dérive exponentielle », les coefficients de Lyapounov).

Attention nous ne sommes pas en train de dire que le monde est continu plutôt que discret. Il est ce qu'il est. Nous disons seulement que les Mathématiques du continu, depuis Newton, permettent de comprendre des propriétés des dynamiques physiques qui échappent à celles du discret. L'inévitable intervalle de la mesure physique classique, avec les possibles fluctuations/perturbations en son sein, est mieux saisi par le continu. Dans une théorie du numérique, *en-dessous* la discrétisation proposée, il ne peut plus rien se passer par principe... mais aussi pour l'utilisation : la répétition fonctionne, et malheur s'il manquait une virgule au fichier réouvert mille fois ! Cependant les Mathématiques du discret à leur tour, une fois implémentées dans des machines extrêmement puissantes, permet d'analyser des processus que le traitement mathématico-conceptuel ne peut absolument pas nous faire voir. Elles nous fournissent ainsi un autre type d'intelligibilité, tout aussi important.

En résumé, du point de vue physique, une théorie des algorithmes ne parle pas de manière fidèle du monde, mais d'une petite partie des systèmes déterministes : les prévisibles. Et une fois transférés sur le discrets, tous les systèmes déterministes deviennent prévisibles, même s'ils sont l'implémentation d'équations ou fonctions non-linéaires. On peut répéter parfaitement, contre la Physique, même la plus sauvage des turbulences. Et il n'est pas vrai que le discret est une approximation du continu. Les analystes numériques savent bien qu'il faut de difficiles théorèmes de « poursuite » ("Shadowing", cf. [Pilyugin, 1999]) pour démontrer que, dans l'implémentation numérique de certaines dynamiques chaotiques, les trajectoires continues « poursuivent » les discrètes (et pas l'inverse). *Le discret n'est pas une approximation du continu. C'est, au mieux, l'inverse : une trajectoire donnée dans le discret peut-être approximée par une trajectoire continue.* Et alors les images sur l'écran d'une évolution chaotique donnent des informations qualitativement importantes sur les trajectoires continues : elles fournissent des imitations très utiles et aujourd'hui indispensables pour la science et ses applications. Et la richesse de la science et des technologies, la variété de l'histoire veulent que, à partir de Lorenz et surtout des années 1970, on apprécie le chaos sur les écrans des machines numériques comme nul part ailleurs. Le météorologue peut voir et revoir des simulations de turbulences et d'ouragans, les répéter de manière identique s'il le souhaite. Il lui est ainsi possible de mieux saisir les aspects qui l'intéressent et de faire, à partir aussi de son expérience, des prévisions toujours plus fiables.

Dans un sens bien précis donc, toute théorie algorithmique de l'Univers physique est mathématiquement « incomplète » par rapport aux descriptions continues. Et les théorèmes cités plus haut, qui relient aléatoire classique et algorithmique, le démontrent à nouveau, par dualité (ou contraposition comme nous l'avons dit). Si le théorème de Gödel pose des limites à toute tentative de réduction mécaniste de la déduction mathématique, ses conséquences (nous en verrons d'autres) anéantissent aussi les plates visions algorithmiques de l'univers inerte — et ne parlons même pas de l'état vivant de la matière, par exemple le cerveau — car elles nous font comprendre qu'il y a des problèmes même dans la... simulation algorithmique du pendule double. C'est pour cela que ce théorème a ouvert la voie à faire mieux, de la Théorie de la démonstration à la simulation numérique ; et cette dernière est aujourd'hui le principal instrument pour faire de la science. Quant au jeu continu/discret, à l'intérieur même de l'informatique les analyses des réseaux d'ordinateurs demandent aujourd'hui un usage difficile d'outils géométriques, dans le continu. Ils sont en effet immergés dans un espace-temps, relativiste, que nous comprenons mieux avec l'aide du continu (cf. par exemple [Goulbault, 2000] pour une utilisation peu banale de la théorie de l'homotopie en théorie de la concurrence — réseaux d'ordinateurs). Quant au discret de la Mécanique Quantique — que certains pourraient invoquer comme discrétisation ultime du monde — les phénomènes d'intrication ou de non-séparabilité sont à l'opposé de la séparation topologique propre aux bases de données discrètes où tout point est isolé, bien séparable de tous les autres. Parlons-en, justement.

6. Einstein et la thèse de l'incomplétude de la Mécanique Quantique

Einstein n'était certainement pas étranger au débat sur les fondements des Mathématiques, en premier lieu par sa collaboration active avec Weyl à Zurich. Celui-ci publie en 1917-18 un livre sur les fondements des Mathématiques (Le continu) et un autre, un véritable pilier, sur les fondements mathématiques de la Relativité (Temps, Espace, Matière). Ensuite il y eut en Allemagne la fréquentation de Weyl, à nouveau, et de Hilbert ; et il observa à distance la bataille des fondements entre Hilbert et Brouwer. Cette bataille aboutit à l'exclusion du second du comité de rédaction de la très prestigieuse revue de Mathématiques dirigée par le premier ; cette issue ridicule indigna Einstein (il la qualifia de « batrachomiomachie » en référence à la comédie grecque). Enfin, il discuta à Princeton avec Von Neumann, lui aussi exilé de l'Allemagne nazie à l'Insitute for Advanced Studies, comme le sera Weyl à partir de 1933. Et Von Neumann connaissait bien le théorème de Gödel. On dit même que, quand Gödel, âgé de 24 ans, présenta son résultat à un congrès en 1930, Von Neumann fut le seul à en comprendre la portée. Il en fut bouleversé : c'était un formaliste convaincu, il avait travaillé au programme de Hilbert, comme Ackermann et tant d'autres, il fut brièvement convaincu d'avoir obtenu une preuve acceptable pour les finitistes de la cohérence et de la complétude de l'arithmétique. Ce grand mathématicien était très rapide : après avoir entendu le premier théorème, il en tira lui-même la preuve purement formelle du second. Mais quand il en informa Gödel, l'article de ce dernier était déjà sous presse avec ses deux théorèmes. Non seulement Von Neumann connaissait les théorèmes de Gödel, mais il y avait même travaillé et il les avait présentés aux mathématiciens et physiciens de Princeton dans un de ses premiers séminaires à l'automne 1931 [Sieg, 1994] ; il fut ensuite suivi par Gödel lui-même, temporairement à l'Institut en 1933-1934 [11]. Dans les années suivantes, Von Neumann développa son approche hyper-formaliste dans divers domaines, des axiomatisations de la Mécanique Quantique à celles de Calcul des Probabilités et de la Théorie des Jeux, jeux formels d'économie et de guerre.

En 1935, Einstein écrit avec Podolski et Rosen un article connu sous les initiales EPR dans lequel ils se posent le problème du caractère « correct » et de la « complétude » de la Mécanique Quantique (MQ). Ces termes sont propres à la Logique Mathématique (nous les avons utilisés) et pas du tout habituels en Physique, surtout le second. Il est ainsi plus que probable que les auteurs n'utilisent pas par hasard le terme de « non complétude » pour parler des descriptions de la réalité physique proposées par les formalismes quantiques : ils pensaient très probablement répéter un coup à la Gödel contre Hilbert. Le paradigme gödelien sera de toutes façons un outil de compréhension : presque sûrement pour eux, et pour nous c'est certain. On parle de « paradoxe EPR », pour rappeler l'utilisation du raisonnement par l'absurde comme dans Gödel, de même que le caractère

11. Gödel s'y installa définitivement en 1939, après une rocambolesque fuite de l'Autriche envahie par les nazis.

« paradoxal » de la MQ (c'est en effet une théorie qui se situe souvent contre la « doxa »).

EPR commence par énoncer, avec une grande clarté, les hypothèses ontologiques de toute la réflexion : même en microphysique, il doit exister une réalité physique indépendante de la mesure et de la théorie. Tout au plus la première peut « déranger » la grandeur physique mesurée. Quant à la théorie, elle doit évidemment être *correcte* : une théorie « satisfaisante » ne doit mener qu'à des assertions vraies. Ensuite, pour qu'elle soit *complète*, « tout élément de la réalité physique doit avoir une contrepartie dans la théorie », c'est-à-dire doit être décrit ou déduit dans la théorie. On reconnait une exigence de correction et de complétude « sémantique », comme nous disions en Logique, de même qu'une lecture ontologisante de ces propriétés. L'interprétation sémantique classique du théorème de Gödel dit que justement que l'assertion vraie, G, est déjà là dans la structure, comme toutes les assertions vraies mais que la théorie formelle, AP, ne permet pas de le déduire. EPR cherche une théorie complète par rapport à une réalité physique qui, même en microphysique, doit déjà « être là », bien séparée du sujet connaissant. Et il démontre, sous cette hypothèse ontologique, que l'actuelle MQ ne l'est pas. Les arguments qu'utilise EPR sont en rapport avec différents aspects fondamentaux de la MQ, parmi lesquels ceux qu'on connaît sous le nom de « indétermination » et « intrication ».

L'*indétermination* quantique peut être décrite comme non commutativité de la mesure de la position et du moment d'une particule. Selon la théorie, les valeurs obtenues *dépendent de l'ordre* dans lequel on fait ces mesures et donc, comme il est écrit dans EPR, « on ne peut pas parler de la quantité physique A [ou B] qui prend une valeur particulière ». Ou encore, « si A et B ne commutent pas, c'est-à-dire si AB≠BA, alors la connaissance précise de l'une empêche cette connaissance pour l'autre ». Et EPR continue : ainsi les deux quantités physiques position et moment « ne peuvent pas avoir de réalité simultanée » et au moins un élément de la réalité n'est pas décrit. « Si la fonction d'onde fournissait une telle description de la réalité, elle contiendrait ces deux grandeurs ; et on pourrait alors les prévoir ».

Quant à l'*intrication*, EPR la déduit d'une observation qui deviendra fondamentale. Du formalisme quantique (en particulier l'équation de Schrödinger) on peut déduire que si deux systèmes ont interagi à un instant $t = 0$ et sont ensuite séparés sans plus aucune interaction jusqu'à l'instant $t = T > 0$, on peut connaître avec certitude la valeur d'une mesure sur un des systèmes à l'instant T en faisant cette mesure sur l'autre système. Deux particules « intriquées », comme on dit, permettent une connaissance instantanée de la valeur d'une mesure faite sur l'une grâce à la mesure faite sur l'autre. Si la première a le spin « up », par exemple, on est sûr que l'autre spin est « down » *si on le mesure*. En répétant le même processus, on peut obtenir le spin « down » pour la première ; l'autre aura alors le spin « up ». C'est une propagation de l'information instantanée, plus rapide que la lumière ? C'est impossible, ce serait contre la Relativité. L'explication théorique est incomplète, dit EPR.

Pour résumer, EPR reproche, comme une incomplétude, une propriété fondamentale du jeu entre théorie et mesure dans MQ : *ce qu'on calcule*, avec la fonction d'onde (l'équation de Schrödinger), *n'est pas ce qu'on mesure*. En physique classique et relativiste, on fait des calculs sur des nombres réels, qui proviennent de mesures ; ces calculs produisent à leur tour des nombres réels qu'on vérifie avec de nouvelles mesures. Dans MQ on calcule sur des nombres complexes, dans des espaces de Hilbert très abstraits, même de dimensions infinies, en dehors donc de l'espace-temps habituel. On produit ensuite des nombres réels comme projections (modules) des nombres complexes obtenus par le calcul. Ces valeurs sont la probabilité d'obtenir certains résultats dans le processus de mesure et, quand on les vérifie par la mesure, elles sont, d'une part, dépendantes de l'ordre dans lequel on fait les mesures (non commutativité) et, d'autre part, elles peuvent être reliées si on mesure des particules intriquées (ou dans un état « EPR », disent encore aujourd'hui les physiciens).

Et encore récemment les théories « à variables cachées » ont tenté de combler (compléter) ces lacunes de la MQ, c'est-à-dire son incomplétude. Cependant l'« interprétation standard » prévaut, qui met l'accent sur l'originalité de la construction de connaissance dans MQ. La mesure est consubstantielle à l'objet physique : il n'y a pas déjà une particule qui voyage avec ses propriétés et ses états « déjà donnés » et qui est, tout au plus, perturbée par la mesure. Si on lance un « photon » contre une fente double et si on en mesure avec un interféromètre l'effet sur un mur au-delà des fentes, on observe une interférence, un comportement typiquement ondulatoire. Si, en revanche, on met un compteur de particules derrière chacune des fentes, on « observera » une particule qui passe 50 % du temps d'un côté et 50 % de l'autre. L'action de la mesure, conséquence de tout un cadre théorique, donne la spécification de l'objet. Le *concept scientifique* de photon *isole* un fragment de l'Univers qui se spécifie dans l'acte théorique et pratique de *sa propre production* et des *mesures* : une onde ou une particule.

De la même façon l'équation de Schrödinger permet de calculer l'évolution d'un système de particules intriquées et fournit des valeurs « corrélées » de probabilités pour des éventuelles mesures. En bref, si on lance deux pièces de monnaie classiques en l'air et qu'elles interagissent (par exemple elles se touchent) pour ensuite se séparer définitivement, les analyses probabilistes des valeurs pile/face prises par les deux monnaies sont complètement indépendantes. Les équations de Bell [Bell, 1964] et les expériences d'Aspect [Aspect et al., 1982] ont démontré, en revanche, que les mesures (valeurs de probabilités) pour deux quantas intriquées (c'est-à-dire qui ont interagi) sont corrélées, pas indépendantes. Si on connait l'une on connait l'autre, même à très grande distance. Il ne passe pas d'« information » entre les deux événements distants : il faut se téléphoner le résultat pour contrôler que les deux mesures sont en effet intriquées. Mais elles le sont toujours. Ce fait, sans doute extraordinaire (paradoxal) et désormais vérifié empiriquement des dizaines de fois, est à l'origine de réflexions théoriques très intéressantes et qui pourraient avoir une conséquence pratique importante : le Calcul Quantique. Un tel « calcul » pourrait révolutionner tout le calcul automatique : tout au moins des calculs impossibles à effectuer car trop complexes deviendraient-ils tout à fait possibles car l'intrication est une forme (très originale) de « calcul parallèle ». Mais que calcule-t-on ? On ne calcule pas l'information numérique comme on le comprend habituellement, mais l'évolution d'un système, qui est globale : les deux particules ne sont pas séparables par la mesure et une variable associée à l'objet ne serait pas locale (elle ne dépendrait pas de l'évolution d' « un seul point »). Des absurdités, du point de vue de la physique classique et relativiste, que EPR déduit de la théorie et qui sont ensuite vérifiées empiriquement. Comme nous disions le monde n'est pas fait de petits points ou de petits carrés, de bits et octets classiques bien séparables entre eux par la façon unique qu'on a d'y accéder : cette activité constitutive des objets et de l'objectivité scientifique, dans le frottement entre nous et le monde, qu'est la mesure (sensorielle ou instrumentale).

Observons enfin que nous n'avons pas dit que MQ est complète, mais seulement que la preuve donnée par EPR de son incomplétude n'est ni valide théoriquement ni empiriquement corroborée : elle se fonde sur des hypothèses ontologisantes inadéquates à la microphysique et annonce comme impossible une situation qu'on a démontrée empiriquement possible (et très intéressante). Einstein avait tort, mais quand il observait que « la MQ est incomplète car de sa structure théorico-mathématique on déduit l'intrication », il ouvrait la voie d'abord à des recherches et des expériences, puis à de possibles machines, d'une grande importance [12].

7. L'incomplétude mathématique des théories formelles

Après le grand théorème de Gödel, les oppositions entre les diverses écoles de fondements des Mathématiques s'accentuèrent. Federigo Enriques le dit en 1935 à Paris avec beaucoup de lucidité : « ... si on évite la Scylla de l'ontologisme, on tombe dans la Charybde du nominalisme : un système de signes vide et tautologique pourrait-il satisfaire notre raison scientifique ? Des deux côtés je vois surgir devant nous le spectre d'une nouvelle scolastique » [Enriques, 1983]. D'un côté, l'invocation de l'éternelle et pré-existante « vérité », certaine car absolue, que « le mathématicien découvre en regardant par dessus l'épaule de Dieu » (John D. Barrow). De l'autre, l'insistance sur la certitude mathématique fondée sur l'absence des ambiguïtés du sens, sur le caractère mécanique de la déduction et ... pourquoi pas du raisonnement entier ?, donc de notre humanité, qu'on pourrait transporter entièrement dans une machine Logico-Mathématique, et ce jusqu'aux fameux super-cerveaux de l'Intelligence Artificielle des années 1960 et 1970. En effet, diront les formalistes (les nominalistes) pendant des dizaines d'années, le théorème de Gödel démontre l'indépendance d'une assertion complètement artificielle. C'est un paradoxe astucieux, tiré par les cheveux, il n'a pas d'importance pour la déduction mathématique intéressante et encore moins pour le raisonnement humain. Au

12. La déduction dans EPR peut faire penser à une autre, d'Aristote : « le vide est impossible, car dans celui-ci tous les objets tomberaient à la même vitesse » (La Physique, vol. 4, chap. 8). Ces très grands scientifiques, même quand ils se trompent, proposent des idées très intéressantes.

contraire le théorème de Gödel est seulement le départ d'une avalanche d'assertions formellement indémontrables, parmi lesquelles certaines sont très intéressantes. Ce sont des assertions *de l'Arithmétique* avec une signification et un intérêt mathématique qu'on ne peut démontrer qu'avec des raisonnements plus puissants que le finitisme formel. Pour passer d'une ligne à l'autre de ces raisonnements, il faut à un certain point invoquer ce « sens » qu'on craint tant. Essayons d'expliquer cela.

Pour rester dans la Logique, rappelons que Gentzen (1935) donna très tôt une preuve de la cohérence de l'Arithmétique en utilisant une induction transfinie ; ce résultat inaugurera la Théorie de la Démonstration moderne, sous sa forme d'« analyse ordinale ». Pour le dire rapidement, il démontrera la cohérence de AP par induction transfinie sur une classe restreinte de formules (grossièrement : une induction avec une infinité d'hypothèses, jusqu'à l'ordinal ϵ_0, un « petit » infini, mais quand même assez grand pour résoudre l'équation $x = \omega^x$, où ω est l'infini des nombres entiers). La restriction à un certain type de formules et la rigueur de la preuve, dans un cadre original appelé « déduction naturelle », rendra la preuve convaincante mais elle n'est évidemment pas formalisable dans AP. En 1958, Gödel lui-même donnera une preuve dans un système « stratifié » (les nombres, puis les fonctions sur les nombres, etc... le λ-calcul typé). Notons que cette preuve sera étendue, de manière non triviale, par Girard (1970) à un calcul des types imprédicatif, fondée sur une quantification (pour dire « pour tous ... ») du second ordre, c'est-à-dire une quantification sur les ensembles (AP est du premier ordre, on ne quantifie que les variables de nombres). Ce calcul a eu un grand succès en... Informatique, pour introduire une forme forte de modularité en programmation [Girard et al., 1990]. Évidemment, dans ce cas aussi, l'effectivité du calcul cohabite avec l'indémontrabilité formelle de sa cohérence, dont la preuve n'est formalisable que dans l'Arithmétique du troisième ordre (les ensembles d'ensembles) et implique celle de AP. Avec Gentzen commence l'utilisation d'ordinaux toujours plus grands pour donner des preuves infinitaires de cohérence de théories toujours plus expressives ; avec Gödel ou Girard, on passe à des ordres supérieurs, comme quantification sur des ensembles ou des types infinis.

Ainsi pour sauver la théorie paradigmatique du fini, AP, on doit recourir à des formes d'infini ; l'infini est un concept difficile mais omniprésent en Mathématiques. Il suffit de penser à la naissance du calcul infinitésimal et aux notions associées de vitesse et d'accélération *instantanées*, indispensables à la Physique après Newton et obtenues comme limites à l'infini d'approximations finies. Ou encore à la géométrie projective, née dans la peinture italienne du XV^{e} siècle, et en particulier dans les Annonciations, où l'infini divin, le point de fuite au fond du tableau, rend plus humain l'espace au plan fini. *Avec l'infini, en Mathématiques, on comprend mieux le fini.* Et la théorie des ensembles le démontre : pour formaliser le concept de « fini », il faut donner un axiome d'existence de l'infini (dans AP, il est impossible d'isoler formellement les nombres standards, finis, donc de définir le « fini »). N'en déplaise aux formalistes finitistes, les concepts mathématiques de fini et d'infini sont formellement « intriqués », inséparables : si on veut capturer formellement le fini, il faut travailler le concept d'infini.

En 1978, Paris et Harrington publient une assertion combinatoire, toujours inspirée de la Logique, mais pas artificielle, un énoncé mathématique « sensé » (le G de Gödel ne l'est pas, selon beaucoup de gens) formalisable dans AP et sans lien apparent avec la cohérence (formalisée par $Coer \equiv \neg Theor(0 = 1)$ au paragraphe 4). À partir de cet énoncé on peut déduire $Coer$ dans AP et donc il est indémontrable. Mais on peut en donner une preuve, en dehors de AP, avec l'induction transfinie à la Gentzen. Nous parlerons d'un autre résultat, analogue mais encore plus intéressant. En réalité les deux preuves sont similaires et ce que nous allons dire vaut, implicitement, pour la preuve de l'assertion de Paris et Harrington.

Dans une note de 1981 jamais publiée, H. Friedman donne une version finie, formalisable en arithmétique, d'un célèbre théorème sur les arbres finis. Les arbres, qui en mathématiques poussent vers le bas, sont des structures familières et utiles, aux nombreuses applications. En particulier le théorème de Kruskal [Kruskal, 1960], que Friedman « miniaturise », prouve une propriété très utilisée, surtout en informatique mathématique (pour des problèmes de terminaison dans des systèmes de calcul formel, ou « réécriture »).

Indiquons rapidement les deux résultats. L'*immersion* entre deux arbres, $T_1 \leq T_2$, est définie de manière évidente : une fonction injective qui préserve l'ordre des nœuds (un arbre est un ordre partiel entre les nœuds, avec un minimum ou racine). Le théorème dans [Kruskal, 1960] s'énonce ainsi :

« Pour toute suite infinie $(T_n)_{n\in\omega}$ d'arbres finis, il existe i et k tels que $i < k$ et $T_i \leq T_k$. »

Attention, ce n'est pas évident : on pourrait imaginer donner une suite d'arbres de manière assez astucieuse pour que aucun ne soit une « extension » d'un arbre déjà mis dans la suite. Le théorème dit que cela est impossible : les suites infinies d'arbres ne peuvent pas être complètement désordonnées (tous les arbres incomparables), ni contenir de suites décroissantes infinies (et cela permet de donner les résultats de terminaisons mentionnés). La Forme Finie de Friedman (FFF) s'écrit alors :

« Pour tout n, il existe un m tel que pour toute suite finie d'arbres finis T_0, T_1, $\ldots$, T_m vérifiant que, pour tout $j \leq m$, T_j a au plus $n(j + 1)$ nœuds, il existe i et k tels que $i < k$ et $T_i \leq T_k$. »

En un certain sens, FFF « rend au fini » l'énoncé infinitaire de Kruskal (qui parle de suites infinies d'arbres finis) : FFF donne, pour tout n, la longueur m de la suite finie dans laquelle on trouve deux arbres comparables. Le lecteur comprendra facilement que FFF est formalisable dans AP : c'est un « pour tout n il existe m tel que (...) » où « (...) » est une propriété codable dans AP (les arbres finis sont facilement gödelisables) et décidable (une fois fixés n et m). Or la fonction qui à n associe m est calculable mais croît si vite qu'elle majore définitivement toute fonction récursive qu'on démontre totale dans AP (et aussi dans ses extensions fortes). C'est une façon de démontrer l'indémontrabilité de FFF dans AP. Friedman, lui, immerge les arbres dans les ordinaux transfinis et, grâce à l'absence de suites décroissantes infinies (voir ci-dessus ; c'est donc une induction transfinie), démontre que FFF implique $Coer$ dans AP. Et donc il démontre que FFF est formellement indémontrable par le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel ($Coer$ est indémontrable). Avec l'une ou l'autre technique, la preuve de l'indémontrabilité est un surprenant tour de force logico-mathématique auquel on a consacré un livre entier peu après la diffusion la note de 1981 [Harrington et al., 1985], voir aussi [Gallier, 1991].

La première observation à faire est que beaucoup des applications du théorème de Kruskal s'obtiennent aussi à partir de la forme arithmétique de Friedman. C'est donc bien autre chose qu'un calembour artificiel : c'est vraiment des Mathématiques. Et pourtant FFF comme sa négation sont formellement indémontrables : c'est pour cela que nous avons intitulé cette section *incomplétude mathématique* des formalismes, ce qu'on ne peut pas faire si on pense seulement à l'assertion « logico-antinomique » G de Gödel qui est peu « mathématique ». Et pour démontrer l'indémontrabilité de sa négation, on ne peut que prouver quelque chose de plus fort : elle est vraie pour les entiers. C'est bien des Mathématiques, pas seulement de la Logique. Comment démontrer que FFF est vrai sur cette structure ? Bien sûr on ne peut pas faire une induction formelle finie, une induction dans AP, à cause de son indémontrabilité. Les preuves données par Friedman et dans le livre que nous mentionnions utilisent l'induction d'une manière tout à fait habituelle pour les mathématiciens qui ne s'occupent pas de fondements.

7.1. **Vers les fondements cognitifs de l'induction.** Pour expliquer et peut-être justifier un tel usage de l'induction nous prendrons une position épistémologique forte, qui développe la référence de Riemann aux fondements des Mathématiques comme « généalogie de concepts », les réflexions de Poincaré sur le rôle de l'action dans l'espace pour la constitution des concepts mathématiques, celles — proches de ces dernières et tout aussi stimulantes — de Enriques sur les formes diverses d'accès sensoriel à l'espace et l'unité de la pensée de Weyl sur les symétries comme principes de construction conceptuel, en Mathématiques et en Physique. Ces grands géomètres, opposés au formalisme, ont ouvert, de manière très incomplète et préliminaire, des pistes de réflexions fondationnelles de nature strictement épistémologique. Certains les reprennent aujourd'hui en des termes cognitifs, relativement généraux et scientifiques, au delà de l'introspection qui restait le seul moyen d'investigation à l'époque (nous renvoyons au livre de Berthoz et Dehaene de 1997 et les réflexions postérieures de l'auteur). On pourra alors comprendre l'incomplétude des formalismes comme une insuffisance des « principes de preuves » (dont l'induction formelle est le paradigme) à capturer les « principes de construction » (en premier lieu le bon ordre et les symétries) — et ces derniers sont en plus partagés avec la construction théorique en Physique, alors que les principes de preuves y sont différents, cf [Bailly et al., 2006].

Le mathématicien dit et écrit tous les jours la chose suivante : si un ensemble de nombres entiers — peu importe comment il est défini — est non vide, *alors* il a un plus petit élément. Vous, le lecteur, voyez (espérons-le) la suite des nombres entiers bien ordonnés de gauche à droite (pour nous qui écrivons dans cette direction, pour les arabes c'est le contraire). Regardez la attentivement, dans votre tête grandir jusqu'à l'horizon, sans fin, plutôt que sur le papier : 1, 2, 3, 4... Si on isole dans cette suite, conceptuellement, un ensemble non vide, qui contient donc au moins un élément, vous observerez que cet ensemble contient un plus petit élément, au pire ce sera 0 (l'ensemble est discret et sans suites décroissantes infinies — on dit techniquement qu'il est *bien ordonné*). C'est une pratique commune de l'intuition numérique, interdite au formaliste car géométrique et évocatrice de « sens », du sens comme acte de compter quelque chose — c'est un geste plein de significations — d'ordonner, d'écrire, de faire ce mouvement répété vers l'horizon ; il a aussi le sens du flot discret du temps (Brouwer). Il prend son origine dans l'acte humain, et même pré-humain pour les petits nombres [Dehaene, 1997], de mettre ensemble les quantités dénombrables. Ce sens est enraciné dans des gestes antiques et pour cela extrêmement solides. Le langage et l'écriture leur a donné l'objectivité de l'intersubjectivité, la stabilité de la notation commune, l'indépendance vis-à-vis des objets dénombrés. Le nombre et son ordre sont des invariants conceptuels qui font sens grâce à leur indépendance acquise par rapport à une pluralité de "praxes", d'expériences actives. Par la répétition dans l'espace, grâce au langage et à l'écriture, on construit cette suite discrète et croissante à laquelle le mathématicien applique sans problème le principe abstrait du « bon ordre » parce qu'il est riche de sa signification géométrique : un ensemble non vide de nombres entiers a un plus petit élément. Le mathématicien utilise une telle structure signifiante, évocatrice d'ordre dans l'espace, tous les jours et même pour construire une axiomatique formelle, comme Peano ou Hilbert, comme dernière étape d'une construction d'invariance ou d'indépendance. Mais cette dernière étape, la formalisation, ne permet pas de détacher complètement la démonstration du sens, *de* l'espace et *dans* l'espace, qui s'est constitué dans cette généalogie de concepts qui est derrière toute la construction mathématique [13]. Voilà ce que veut dire l'incomplétude *mathématique* des systèmes formels : les principes de preuve (formels) n'ont pas l'expressivité des principes de construction (ordre et symétries) qui ont produit les structures conceptuelles des mathématiques [14].

C'est ainsi que mêmes des mathématiciens philosophiquement adeptes ou proches du formalisme démontrent, dans le livre de 1985 et après, la validité de l'énoncé de Friedman en invoquant, de manière répétée mais bien visible, le principe du « bon ordre ». Avec une certitude tranquille ils passent à un certain point du raisonnement d'une ligne à la suivante en observant qu'un ensemble non vide de nombres entiers, défini dans la démonstration, a un plus petit élément. Ces preuves sont

13. « L'évidence originelle ne peut pas être confondue avec l'évidence des axiomes, du fait que les axiomes sont déjà le résultat d'une formation de sens et ont toujours cette formation de sens derrière eux » [Husserl, 1933].

14. Pour des détails techniques sur l'ordre et les symétries dans les démonstrations que nous évoquons, voir [Longo, 2002].

parfaitement rigoureuses, fondées sur une pratique cognitive des plus solides : l'invariance et la stabilité conceptuelle du bon ordre propre à la "gestalt", riche de sens, de la suite des nombres entiers. Contrairement à tant de formalisations, elle n'engendrent pas de contradictions.

Bien sûr certains ont par la suite fait une analyse fine de la preuve, puisqu'elle n'est pas formalisable dans AP. Et ils ont démontré que l'ensemble utilisé dans le bon ordre échappe à la formalisation finitiste, car il utilise implicitement une quantification infinie (sur des ensembles, Σ^1_1 techniquement, cf. [Rathjen et al., 1993]). Ils prouvent ainsi l'énoncé de Friedman grâce à une induction sur un ordinal transfini immense, beaucoup plus grand que celui proposé par Gentzen et définissable avec une construction très difficile. Certains justifient l'audace infinitaire en observant que cet ensemble n'est non vide que comme hypothèse d'un raisonnement par l'absurde. Il disparaitra ensuite car il fait justement naitre l'absurde... il sera donc vide. Et pourtant, ce détour par l'infini est nécessaire, car on a démontré que l'assertion est indémontrable de manière finitaire.

Mais alors tout ce travail a été inutile ? Même les Grecs pouvaient croire à la cohérence de l'Arithmétique, eux qui « voyaient » la suite des nombres entiers potentiellement infinie et bien ordonnée — avec au milieu, parsemés, les nombres premiers. Le théorème de Gödel est un calembour sans sens mathématique ; les énoncés mathématiques qui ont du sens, on les démontre avec de présumés ensembles infinis et non définissables dans AP, ensembles qu'on peut ensuite jeter parce qu'ils sont vides... Mais non, pas du tout, ce chemin est extrêmement riche, en soi et pour ses retombées. Uniquement en ce qui concerne le jeu entre fini et infini des nombres, de l'espace, il parcourt toutes les Mathématiques. Il commence par l'usage de l'infini en puissance chez Euclide, comme apeiron (sans-limite). Ensuite il passe par les clarifications d'Aristote, précisées par l'école thomiste, habituée à travailler avec le difficile et controversé infini du Dieu chrétien : grâce à elle on perçoit clairement la distinction entre infini en puissance et infini en acte, propre à Dieu. Ensuite vient la géométrie projective, comme nous le disions, première conséquence mathématique de la pratique l'infini en acte, suivie du calcul infinitésimal, règne de l'infini — qui eurent tous deux d'immenses développements et applications. Il fallait alors clarifier *comment* on faisait des démonstrations, en particulier quand on utilisait ce concept limite et en particulier après le marasme génial des Mathématiques du XIX$^{\text{e}}$; *comment* on définit avec rigueur, après un siècle avec tant de Mathématiques et si souvent peu rigoureuses. Les systèmes formels sont incomplets, mais ils sont loin d'être inutiles : ils nous ont enseigné à donner de bonnes définitions, à généraliser avec rigueur, à unifier des méthodes et des preuves grâce à la méthode axiomatique... L'erreur, c'était plutôt de penser pouvoir se passer du sens pour être parfaitement, mécaniquement, rigoureux ; de pouvoir éviter toute référence à l'action dans l'espace et dans le temps, lieux constitutifs des Mathématiques, même celles des nombres entiers. Mais ainsi, nous l'avons dit, on a dû — pour démontrer qu'il y a des énoncés indécidables — préciser ce qu'on voulait dire par décidable ou calculable de manière mécaniquement certaine ; et on a posé les bases mathématiques, avec Gödel et Turing, de l'Informatique. Et à la fin, on est ramené, mais avec un grand bagage, à ce sens de l'espace et de l'action dans celui-ci, à sa « ... géométrie, engendrée dans notre espace d'humanité à partir d'une activité humaine » [Husserl, 1933] [15].

8. L'information et les codages dans la cellule

« En comparant les structures des fibres chromosomiques au texte d'un code, on veut dire que l'esprit universel, dont parle Laplace,... pourrait déduire de leur structure si l'œuf donnera un coq noir ou une poule tachetée, une mouche ou un plant de maïs... » a écrit Schrödinger, dans *What is life* en 1944, pendant son exil irlandais.

L'immense figure de Laplace est à l'arrière-plan de toute l'histoire que nous avons parcourue. Certains de ces grands, comme Turing et Schrödinger, en ont lucidement vu la trace dans leurs propres propositions scientifiques. Schrödinger en effet lance en 1944 l'idée de comprendre, à mi-chemin entre métaphore et science, les chromosomes comme un « code-script », une information héréditaire codée. Et, de son point de vue de physicien, il en comprend la nature implicite laplacienne (et il donne des exemples prudents et plausibles). Son bref livre explore cette hypothèse et d'autres, encore plus intéressantes ; il est souvent contradictoire, toujours informel et profond. Mais que peut-on trouver de commun dans ces diverses formes de détermination qui impliquent la prévisibilité et ainsi la compréhension complète du monde à partir de quelques d'équations ou de quelques de signes ? La complétude expressive de l'écriture, plus précisément de l'écriture alphabétique, peut donner une clé pour l'interprétation de l'omniprésence de cette façon que nous avons de faire science.

Les équations de Laplace sont évidemment une écriture, formelle ou formalisable, dont on croyait jusqu'à Poincaré qu'elle était une détermination complète, en mesure de prévoir les évolutions possibles de l'univers physique — avec à côté

15. La date d'écriture du manuscrit d'Husserl nous rappelle que presque toute l'histoire que nous avons racontée se déroule pendant la première et dramatique moitié du XX^e siècle, avec 1933 comme année charnière : l'arrivée du nazisme et le départ d'Allemagne de tant des personnages rencontrés. Durant cette année, il fut interdit à Husserl, 74 ans, de publier et même d'accéder à la bibliothèque de l'Université. Et cette apparition fréquente de certains noms illustres remet en mémoire une autre grande/petite histoire académique/politique. En 1923, Einstein, depuis peu de temps récipiendaire du prix Nobel, réflechissait à retourner en Italie, peut-être pour une longue période, après un court séjour à Bologne. Il connaissait très bien les résultats de Levi-Civita et était en contact avec beaucoup de collègues, parmi lesquels Volterra et Enriques. Ce dernier, habitué depuis des années aux couloirs des ministères, réussit à obtenir une entrevue avec le nouveau chef du gouvernement, Benito Mussolini : il espérait obtenir un financement exceptionnel pour l'invité. Nous sommes alors en 1924 et le Duce répond : « l'Italie n'a pas besoin de génies étrangers » — une attitude qui rappelle par contraposition les grands Princes de la Renaissance ou le Princeton des années 30 (et après). Et Einstein ne vint pas en Italie. En 1929, Marconi mit dans une liste de collègues rédigée pour Mussolini un petit e. (pour juif — « ebreo » en italien) devant les noms des trois mathématiciens italiens mentionnés, les plus grands de l'époque. Le Duce, neuf ans avant les lois raciales, les exclut de l'Académie d'Italie [Faracovi et al., 1998].

un aléatoire bien distinct de la détermination équationnelle. Nous avons aussi rappelé dans la première section comment, pour Laplace, le niveau fondamental se trouve toujours dans l'*élémentaire*, dans les particules dont il faut isoler et décrire le mouvement pour ensuite l'intégrer dans des systèmes par somme progressive des comportements individuels.

Hilbert à son tour explicitera la nature discrète des formalismes mathématiques, comme suite de signes matériels *simples* et *élémentaires*, alphabétiques. Il ouvrit la voie à la machine numérique de Turing, une fois que les lettres et les mots furent gödelisés. Des systèmes formels alpha-numériques à nouveau supposés complets, au moins par rapport aux structures conceptuelles des Mathématiques : ils auraient dû tout nous dire d'elles. Et pour certains, la machine de Turing aurait dû un jour modéliser complètement le fonctionnement du cerveau. S'il reste à chaque fois audacieux, le programme de connaissance semble se dégrader toujours plus. Il est original et justifié dans les cas de Laplace et Hilbert (il fallut deux grands théorèmes, Poincaré et Gödel, pour les défaire — théorèmes qui furent rendus possibles par la rigueur mathématique de la proposition). Mais ce projet touche le fond quand on en arrive au 0 et 1 d'un cerveau vu comme un grand commutateur numérique, ou à l'alphabet de quatre lettres des bases des nucléotides qui composent l'ADN. Ce dernier devient « le programme de l'ordinateur comportemental de tout individu » [Mayr, 1961] (ensuie Mayr s'opposa au prétendu rôle central des gènes dans l'évolution). Il l'atteint encore quand on dit que « l'ADN contient toute l'information pour la reproduction de la cellule » et de l'organisme [Crick, 1966].

Ainsi l'hypothèse « un gène - une protéine »[Beadle et al., 1941] puis le « dogme central de la biologie moléculaire » (l'information passe successivement et de façon unidirectionelle de l'ADN à l'ARN, aux protéines et ensuite à la structure de l'organisme [Crick, 1958]) sont de nature laplacienne pour la structure de la détermination qu'ils suggèrent : l'ADN, codage gödelien de l'homunculus des anciens, est "informationnellement" complet et l'information se propage de manière linéaire et dans un seul sens a partir de lui (« un gène - une protéine » et le « dogme »). La première hypothèse a été considérée comme valide pendant plus de cinquante ans avant qu'on ne démontre qu'elle était fausse ; quant au dogme, il imprègne encore la recherche en biologie moléculaire bien que depuis peu il soit rejeté par la majorité, parfois à voix basse. Ce n'est pas ici le lieu de développer davantage ces considérations, dont le but était seulement de procéder à la comparaison avec les pratiques scientifiques dans des disciplines jeunes et d'une grande importance comme la biologie moléculaire, voir par exemple [Fox Keller, 2000]. Observons seulement que ces hypothèses ou dogmes qui furent si longtemps à la base de nombreux travaux, et qui prétendent être « physicalistes » ou « matérialistes », semblent ne pas tenir compte de ce qui s'est passé en physique [Longo et al., 2007]. Depuis Poincaré, nous avons compris qu'en présence d'interactions simples (seulement trois corps célestes !), la situation initiale mesurable ne contient pas « toute l'information » (pour utiliser une expression tout à fait impropre) sur les trajectoires futures, si on veut dire par là la « détermination complète » sur l'évolution du *système*. Et on reste laplacien quand on ajoute à la « nécessité » un fragment de « hasard », bien distinct de la première, comme l'a fait Monod en 1973 (Poincaré avait intégré les deux). Cette nécessité, de par sa nature laplacienne, serait programmable (la théorie du « programme génétique »). On semble négliger, dans les hypothèses et les dogmes sur les cascades moléculaires séquentielles, que la Physique du XX^{e} siècle, après la Relativité, voit l'Univers comme un tissu d'interactions : *si les interactions changent, le tissu et son espace se déforme, si on agit sur le tissu et sur l'espace, les interactions changent.* Le dogme central est étranger à cette vision des interactions constitutives d'une unité, propre à la physique contemporaine ; et il parle, rappelons-le, de molécules à l'intérieur d'une structure, la cellule, l'organisme, où presque tout est relié à presque tout.

L'ADN est bien sûr la composante plus importante de la cellule, mais les analyses du vivant qui se basent seulement sur lui et sur les cascades moléculaires qui suivent sont incomplètes, dans un sens certes impossible à préciser dans un théorème mais que la Logique et la Physique même nous suggèrent. Quand on voit qu'il est décrit comme « le livre sur lequel est écrite l'essence de la vie », on réalise que le mythe alphabétique gouverne encore une partie de la science : c'est un mythe au sens grec, positif, de constructeur puissant de connaissance, mais qui réclame des révisions continuelles et une mise en évidence de ses limites. De Démocrite — qui subdivise le monde en atomes et les associe aux lettres de l'alphabet — à Descartes — pour qui la certitude s'obtient en décomposant le raisonnement en composants élémentaires et simples —, puis Laplace et Hilbert, la compréhension certaine doit toujours faire référence à l'élémentaire et simple, atomique ou alphabétique. Le modèle de la reconstruction alphabétique, discrète et élémentaire, du chant continu du langage préside depuis des millénaires à notre science, avec une extraordinaire productivité : nous voulons tout comprendre de cette manière. Ainsi, pensons-nous depuis des millénaires que, comme le langage avec la structure alphabétique, nous pouvons reconstruire, pour tout le savoir, le monde en projetant en lui les lettres, ces structures matérielles complètement déterminées, en physique, logique, biologie (atomes, suites de signes d'un formalisme, lettres des bases de l'ADN). C'est-à-dire que les signes discrets et les lettres permettent d'exprimer tout le dicible et *donc* tout le pensable : alors même en Mathématiques, Physique et Biologie, les signes et les suites discrètes de signes (codages formels) contiennent la détermination complète des évolutions, à tous les niveaux de phénomènes.

Or il faut mettre en évidence la force et les limites, l'incomplétude en un mot, de cette vision du savoir, à comparer par exemple, pour un enrichissement mutuel, aux tendances holistiques des cultures idéogrammatiques. En effet, même l'image du langage ainsi proposée, comme instrument de communication humaine, est bien incomplète. On oublie que le « compilateur » ou « interprète » du langage est le son, composition de phonèmes : le sens est dans le parlé-chanté et son expressivité. Il faut lire, produire un son — même en silence dans sa tête — pour retrouver le sens, de la même manière qu'un musicien *entend* la musique, l'« interprète », quand il lit une partition, qui est une autre écriture alphabétique du continu musical (mais une écriture bi-dimensionnelle et enrichie de symboles et de signes de continuité). Ainsi le contexte, parfois linguistique et écrit, puis le ton, le geste, le dessin contribuent de manière essentielle à l'expression et à la compréhension, c'est-à-dire à la signification. En outre une moue, un sourire, un coup de poing, faire l'amour, tout cela permet de dire autre chose, contribue à l'expressivité humaine, au pensable, de manière essentielle, *au delà* et *avec* les suites de signes alphabétiques. De la même manière, le sens dans l'espace du bon ordre des nombres entiers fait partie de la preuve mathématique et, pour nous fervent anti-formaliste, de ses fondements, au sens épistémologique, *avec* mais *au-delà* des systèmes formels, démontrés incomplets.

Ainsi, pour revenir à la Biologie, on sort petit à petit du mythe alphabétique, malheureusement encore la priorité pour les financements, qui prétend que la stabilité et l'organisation de l'ADN et des cascades moléculaires qui en découlent déterminent complètement la stabilité et l'organisation de la cellule et de l'organisme. Ce mythe est faux, car la stabilité et l'organisation, physique et biologique, de la cellule et de l'organisme contribuent causalement à la stabilité et à l'organisation de l'ADN et des cascades moléculaires qui en découlent. C'est une circularité ? Nous sommes habitués à ce défi : rappelons nous ce que Gödel a fait avec une circularité très subtile, loin des peurs des logicistes. Le problème du « comment ça a commencé », de l'origine de la vie, reste de toutes façons énorme. Sans membrane, sans cellule, aucun cycle métabolique important ne se crée et encore moins ne se maintient dans le temps. Comme l'incomplétude gödelienne nous a fait comprendre pour les Mathématiques par rapport aux systèmes formels, de extensions "strictes" (dans le sens de la logique) des théories moléculaires semblent nécessaires pour dire quelque chose de plus sur la singularité physique de l'état vivant de la matière, voir [Longo, 2009].

Concluons ces considérations en posant des questions et en identifiant des défis généraux. Pourquoi le fondamental devrait toujours être « l'élémentaire » ? Les théories de la gravitation et de l'inertie de Galilée ne disent rien des atomes de Démocrite qui composaient pourtant ses masses, et ce sont des théories fondamentales. Einstein a unifié inertie et gravitation ; il a proposé une autre théorie, le champ relativiste, elle aussi fondamentale, sans rien dire des quantas. Bien sûr le problème de l'unification avec le champ quantique se pose. Mais attention, les physiciens disent *unification*, et non pas réduction : il s'agit de mettre en perspective des théories fondamentales, de les modifier toutes les deux pour une synthèse à inventer. Les plus grands progrès sont peut-être faits aujourd'hui en reconstruisant à partir de la mesure quantique la géométrie de l'espace et du temps (la « géométrie non-commutative » d'A. Connes).

Et enfin, pourquoi l'élémentaire devrait toujours être simple, comme si on transposait aux phénomènes la méthode alphabétique et cartésienne ? Deux frontières du savoir contemporain, la microphysique et l'analyse du vivant, semblent avoir besoin d'une autre vision : leurs composants élémentaires, les quantas et la cellule (qui est élémentaire, atomique, car elle n'est plus vivante si on la coupe en deux) sont très complexes. Leur compréhension demande des visions « non locales », pour reprendre la terminologie quantique, ou des analyses systémiques, comme on dit toujours plus en Biologie, bien au-delà de la prétendue complétude causale de l'ADN et bien au delà des mythes, des Mathématiques et de la Physique aux analyses de la cognition humaine, de la complétude des formalismes alphabétiques [16].

Références

[Aspect et al., 1982] Aspect A., Grangier P. and Roger G., *"Experimental Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell's Inequalities"*, **Phys. Rev. Let.49**, p.91, 1982.

[Beadle et al., 1941] Beadle G. W., Tatum E. L., "*Genetic Control of Developmental Reactions"*, **American Nauturalist**, 75, 107-116, 1941.

[Bailly et al., 2006] Bailly F., Longo G., **Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant**, Hermann, Paris, 2006.

[Bailly et al., 2009] Bailly F., Longo G., "*Biological Organization and Anti-Entropy"* **J. of Biological Systems**, Vol. 17, No. 1, pp. 63-96, 2009.

[Barrow, 1997] Barrow-Green J., **Poincaré and the three body Problem**, AMS, 1997.

[Bell, 1964] Bell J.S., *"On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox"*, **Physics1**, p.195, 1964.

[Beguin, 2006] Béguin F., "*Le mémoire de Poincaré pour le prix du Roi Oscar"*, **L'héritage scientifique de Poincaré**, Charpentier et al. eds, Belin, Paris, 2006.

[Berthoz] Berthoz A., **Le sens du mouvement**, Odile Jacob, Paris, 1997

[Bottazzini, 1999] Bottazzini U.,"*Poincaré*", **Le Scienze**, 1999.

[Buiatti, 2000] Buiatti M., **Lo stato vivente della materia. Le frontiere della nuova biologia**, UTET, 2000.

[Calude, 2002] Calude C., **Information and randomness**, Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2002.

[Charpentier et al., 2006] Charpentier E., Ghys E., Lesne A. (eds.), **L'héritage scientifique de Poincaré**, Belin, Paris, 2006.

[Crick, 1958] Crick F. H. C., "*Central Dogma of Molecular Biology"*, **Nature**, 227, pp. 561-3, 1958.

[Crick, 1966] Crick F. H. C., **Of Molecules and Man**, Seattle, USA, Washington Univ. Press, 99 pp., 1966.

[Dehaene, 1997] Dehaene S., **La bosse des Maths**, Odile Jacob, Paris, 1997.

[Editors, 2009] Editors, "*Bibliometrics and the Curators of Orthodoxy"*, Note of the Editorial Board, **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge U.P., vol.19, n. 1, 2009.

[Einstein et al., 1935] Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete ? " **Phys. Rev.41**, p.777, 1935.

[Enriques, 1983] Enriques F., "*Filosofia scientifica"*, **La filosofia scientifica a congresso**, Parigi, 1935, a cura di G. Polizzi, in Dimensioni VII, p. 50, 1983.

[Faracovi et al., 1998] Faracovi O., Speranza F., **Federigo Enriques. Filosofia e storia del pensiero scientifico**, Belforte, Livorno, 1998.

16. Ce texte est l'introduction au cours de l'auteur à l'Ens en 2009/10 ; les séances sont video-enregistrées et accessibles de http ://www.di.ens.fr/users/longo/ ; les articles de l'auteur sont aussi téléchargśable de sa page web.

[Frege, 1884] Frege G., **The Foundations of Arithmetic**, 1884 (english transl.Evanston, 1980).

[Fox Keller, 2000] Fox Keller E., **Le siècle du gène**, Gallimard, 2000.

[Gacs et al., 2009] Gacs P., Hoyrup M., Rojas C., "*"Randomness on Computable Metric Spaces : A dynamical point of view"*, in : **26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science**, (STACS, 2009).

[Gallier, 1991] Gallier J., "*What is so special about Kruskal's theorem and the ordinal 0 ?"*, **Annals Pure Appl. Logic**, 53, 1991.

[Gentzen, 1969] Gentzen G. **The collected papers of Gerard Gentzen**, M. E. Szabo ed., North Holland, Amsterdam, 1969.

[Girard et al., 1990] Girard J.Y., Lafont Y., Taylor P., **Proofs and Types**, Cambridge U. Press, 1990.

[Gödel] Gödel K. **Collected Works**, S. Feferman e al. eds., 5 volumes, Claredon Press Oxford, 1986-2003.

[Goulbault, 2000] Goubault E. (ed.), Geometry in Concurrency, Special issue, **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge U.P., vol.10, n. 4, 2000.

[Harrington et al., 1985] Harrington L. et al. (eds), **H. Friedman's Research on the Foundations of Mathematics**, North-Holland, 1985.

[Hilbert, 1899] Hilbert D., **Grundlagen der Geometrie**, Teubner, Leipzig, 1899. (Translated by L. Unger as Foundations of Geometry, Open Court, La Salle, 1971.)

[Husserl, 1933] Husserl E., **The Origin of Geometry** , 1933. (transl. in English, University of Nebraska Press, 1989.)

[Kunnen, 1980] Kunnen K., **Set Theory : An Introduction to Independence Proofs**, North-Holland, 1980.

[Kruskal, 1960] Kruskal J., "*Well-quasi-ordering and the tree theorem"*, **Trans. Amer. Math. Soc.**, 95, 1960.

[Laskar, 1989] Laskar J., "*A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System"*, **Nature**, 338, 237-238, 1989.

[Laskar, 1990] Laskar J., *"The chaotic behaviour of the solar system",* **Icarus**, 88, 266-291, 1990.

[Laskar, 1994] Laskar J., "*Large scale chaos in the Solar System*", **Astron.Astrophys**., 287, L9-L12, 1994.

[Lighthill, 1986] Lighthill J., "*The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics*", **Proc. R. Soc. Lond**. A 407, 35-50, 1986.

[Longo, 2002] Longo G., "*Reflections on Incompleteness"*. Invited Lecture, **Types for Proofs and Programs**, Durham, (GB), Dec. 2000 ; Lecture Notes in Computer Science, vol 2277 (Callaghan et al. eds), pp. 160 - 180, Springer, 2002 (revised and reprinted in **Philosophia Mathematica**, 19(3) : 255-280, 2011).

[Longo, 2009] Longo G., "*From exact sciences to life phenomena : following Schroedinger and Turing on Programs, Life and Causality"*, special issue of **Information and Computation**, 207, 5, 543-670, 2009.

[Longo et al., 2007] Longo G., Tendero P.-E., "*The differential method and the causal incompleteness of Programming Theory in Molecular Biology"*, **Foundations of Science**, n. 12, pp. 337-366, 2007.

[Mayr, 1961] Mayr E., "*Cause and Effect in Biology"*, **Nature**, 10, 1961.

[Martin-Löf, 1966] Martin-Löf P., "*The definition of random sequences"*, **Information and Control** 9, 602-619, 1966.

[Monod, 1973] Monod J., **Le Hasard et la Nécessité**, PUF, 1973.

[Paris et al., 1978] Paris J., Harrington L., "*A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic*", **Handbook of Mathematical Logic**, Barwised ed., North-Holland, 1133-1143, 1978.

[Petersen, 1983] Petersen K., **Ergodic Theory**, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Poincaré, 1892] Poincaré H., **Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste**, Paris, 1892.

[Poincaré, 1902] Poincaré H., **La Science et l'Hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902.

[Poincaré, 1906] Poincaré H., "*Les mathématiques et la logique*", **Revue de Métaphys. et de morale**, 14, 1906.

[Poincaré, 1908] Poincaré H., **Science et Méthode**, Flammarion, Paris, 1908.

[Pilyugin, 1999] Pilyugin S. Yu., **Shadowing in dynamical systems**, Springer, 1999.

[Rathjen et al., 1993] Rathjen M., Weiermann A., "*Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem*", **Annals Pure Appl. Logic**, 60, 49–88, 1993.

[Ruelle et al., 1971] Ruelle D., Takens F., "*On the nature of turbulence*", **Commun. Math. Phys.** 20, 167-192, 1971 and 23, 343-344, 1971.

[Sieg, 1994] Sieg W., "*Mechanical procedures and mathematical experience*", **Mathematics and Mind**, A. George ed., Oxford University Press, 71-117, 1994.

[Smoryński, 1997] Smoryński C., "*The incompleteness theorems*", **Handbook of Mathematical Logic**, J. Barwise, ed., North-Holland, 821-866, 1977.

[Turing, 1950] Turing A.M., "*Computing Machines and Intelligence*", **Mind**, vol. LIX, n. 236, p. 433-460, 1950.

[Turing, 1952] Turing A.M., "*The Chemical Basis of Morphogenesis*", **Philo. Trans. Royal Soc.**, vol. B237, p. 37-72, 1952.

[Weyl, 1949] Weyl H.**Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences**, 1927 (english transl., Princeton University Press, 1949).

[Weyl] Weyl H., **Symmetry**, Princeton University Press, .

[Wittgenstein, 1968] Wittgenstein L., **Philosophical Remarks**, Ascombe ed., University Of Chicago Press, 1968.