

Incompletezza¹

Giuseppe Longo

<http://www.di.ens.fr/users/longo>

Laboratoire et Département d'Informatique
CNRS et Ecole Normale Supérieure, Paris
et CREA, Ecole Polytechnique

Introduzione.

Il teorema di incompletezza di Gödel del 1931 non è solamente un grande risultato di Logica Matematica, ma può anche divenire il punto di partenza di una riflessione che va oltre la Matematica e la questione dei suoi fondamenti e le correla a problemi e metodi in altre discipline. Riferendoci ad esso, faremo qui una “storia critica delle idee”, ovvero una rilettura esplicitamente a posteriori di alcuni passaggi del pensiero scientifico moderno, in cui l’audacia di proposte di conoscenza si è scontrata con problemi dimostrabilmente insolubili e risultati limitativi o negativi, i quali però, a loro volta, hanno aperto nuovi orizzonti del sapere. Rifletteremo cioè ad alcuni grandi paradigmi scientifici per coglierne un aspetto comune, l’incompletezza appunto, nei rispettivi ambiti e nei suoi diversi significati; vedremo i modi in cui essa è stata dimostrata e, in alcuni casi, superata. Un’analisi puntuale, benché informale, del teorema di Gödel e di una riflessione di Turing sarà dunque solo un elemento di questo testo. In esso, pur evitando, si spera, abusi e contaminazioni improprie, si estenderà il tipo di lettura proposto alle analisi scientifiche ed epistemologiche di Laplace ed al loro limite nel grande « teorema negativo » di Poincaré, così chiamato dal suo autore; quindi, alle tesi di Einstein sulla « non completezza » della Meccanica Quantistica, termine usato e tema analizzato in un celeberrimo articolo in collaborazione con Podolski e Rosen. Si parlerà infine della presunta completezza delle descrizioni molecolari in Biologia ovvero del DNA inteso come luogo della informazione ereditaria e programma completo dell’ontogenesi.

1. Da Laplace a Poincaré.

L’unità del metodo (e dell’Universo), secondo Laplace (1749-1827), va trovata nell’identità delle leggi della Fisica alla scala della nostra percezione e di quelle che governano le particelle microscopiche. Tutti i fenomeni osservabili sono riducibili alla ontologia elementare soggiacente della materia, del movimento e della forza. Ed a quel livello, ogni analisi deve basarsi sulla possibilità di isolare, matematicamente, una sola particella elementare e descriverne il moto, ricostruendo poi, grazie a delle operazioni di integrazione matematica, l’espressione della legge di interazione a distanza in sistemi di particelle. Anche l’analisi matematica del sistema dei pianeti deve procedere per una progressiva composizione dei

¹ Per **La Matematica**, vol. 4, Einaudi, 2010.

movimenti individuali, per giungere ad una comprensione, del “sistema” appunto, come somma dei comportamenti individuali e delle loro interazioni, due a due, tre a tre....

Questa riduzione meccanicista è strettamente associata, per Laplace, alla struttura della determinazione di tutti gli eventi fisici. Per i grandi della Fisica matematica fra '700 ed '800, i sistemi di equazioni differenziali devono poter descrivere tutti fenomeni fisici rilevanti, a partire appunto dalla descrizione dei moti individuali e delle loro progressive interazioni. In particolare, le leggi fisiche, sotto la forma delle equazioni di Lagrange, prima, di Hamilton, poi, devono poter regolare (esprimere la determinazione di) ogni movimento, ogni traiettoria, quindi ogni evento fisico, proprio come le equazioni di Newton-Laplace determinano l'evoluzione dei corpi celesti nei loro campi gravitazionali (in quanto $3n$ equazioni che descrivono il moto di n corpi interagenti, nello spazio a 3 dimensioni, attraverso i rispettivi campi gravitazionali). E questa determinazione equazionale consente la predizione, misura della validità della proposta teorica, cuore del rapporto fra esperienza e teoria: si osserva, si teorizza (ovvero si scrivono le equazioni che correlano azioni e forze osservate), si predice l'evoluzione del sistema grazie alle soluzioni di dette equazioni, si raffrontano infine le predizioni con nuove osservazioni. L'efficacia predittiva di una teoria è lo scopo stesso della formalizzazione matematica. La creatività matematica dei nuovi formalismi del '700-'800 permette gradualmente di capire l'Universo tutto espandendo la conoscenza in modo certo e progressivo: le equazioni mirano a ricoprire completamente il mondo, a renderlo intelligibile e predittibile.

Certo, Laplace è anche un grande del calcolo delle probabilità e non a caso. Egli è cosciente che numerose evoluzioni sono aleatorie, come il lancio dei dadi, soggetto a troppe forze e frizioni per esser tutte note. Questi sistemi sono allora da analizzare in termini statistici, del tutto diversi dai metodi propri alla determinazione equazionale del moto. Laplace sa anche che una traiettoria deterministica può dipendere da «nuances presque insensibles», come una biglia sulla cima di una montagna (un massimo di potenziale) che, per perturbazioni non osservabili (insensibles), potrà prender una direzione od un'altra, opposta. Ritene però che tali situazioni o punti iniziali “critici” siano isolati, eventi rari nella metrica dello spazio. E pensa di poterli trattare matematicamente, in quel sistema, paradigma di stabilità e certezza delle evoluzioni, modello della predittibilità, che è il sistema solare. «Si devono poter dedurre tutti i fatti astronomici», sostiene Laplace. Del resto Alexis Clairaut aveva calcolato persino i tempi di ritorno della cometa di Halley, uno straordinario successo della matematica della seconda metà del '700. Determinazione e predittibilità regolano l'Universo, dalle particelle agli astri, con inevitabili frammenti di aleatorio (non siamo onniscienti) da analizzare in termini probabilistici, ben distinti da quelli dei sistemi della descrizione equazionale. Questa, quando è conosciuta, deve sempre fornire grazie ad avveduti calcoli, lo strumento principe della predizione scientifica e della conoscenza positiva.

Ebbene, no: Poincaré (1854-1912) dimostrerà che basta considerare tre corpi celesti nei loro campi gravitazionali perchè il sistema di equazioni che ne descrive il moto risulti *dimostrabilmente* incapace di predirne l'evoluzione (il sistema formale delle equazioni è “incompleto”, diremo noi, rispetto alla conoscenza del processo fisico). Quale è il problema? Già Newton se ne era reso conto: la sua legge di gravitazione è “universale”, ovvero riguarda

l'interazione di due astri o corpi qualsiasi, anche dei pianeti *fra loro*. Quindi, se dalle sue equazioni si può dedurre l'orbita kepleriana di un pianeta intorno ad un Sole, due pianeti orbitanti si attraggono anche reciprocamente, perturbando i rispettivi moti. Con il tempo, le piccole perturbazioni possono dar luogo a cambiamenti rilevanti, «secolari», dirà Laplace, pure cosciente del problema. E Newton aveva proposto l'unica soluzione atta a garantire la stabilità del sistema in 'saecula saeculorum': di tanto in tanto, il Buon Dio interviene con sapienti tocchi che ristabiliscono l'ordine. Laplace, che vuole evitare ipotesi metafisiche, pensa invece che una fine analisi matematica dovrebbe dimostrare la stabilità del sistema solare e la sua completa predittibilità. Ed astronomi e matematici si affannano per decenni a trovare soluzioni delle equazioni dei moti planetari, ma, a partire da tre corpi, incontrano difficoltà insormontabili. Nel 1890, Poincaré si avvede di un errore nella sua dimostrazione di convergenza della serie di Lindsted che avrebbe dovuto fornire una soluzione analitica del sistema di equazioni per tre corpi gravitazionali (il "Problema dei Tre Corpi"). E, da grande quale è, deriva dal suo stesso errore l'intrinseca insolubilità del sistema; dimostra cioè che, quasi ovunque, si ottengono dei divisori sempre più piccoli nei coefficienti della serie che ne impediscono la convergenza. Cosa ancora più audace e certo nuova, dà un *senso fisico* a questa difficoltà matematica, al suo «risultato negativo», come lo definisce: radicali cambiamenti dell'evoluzione dei tre corpi possono dipendere da variazioni molto piccole (non misurabili) delle condizioni iniziali ("sensibilità alle condizioni iniziali", si dirà poi). Ed a questo senso fisico Poincaré arriva per via geometrica: dimostra che, nello "spazio delle fasi" (i cui punti sono non solo dati dalla posizione ma anche dalla quantità di moto dei corpi) le traiettorie periodiche stabili ed instabili si intersecano in modo estremamente complesso (in punti che chiamerà *omoclini*), tagliandosi l'un l'altra infinite volte, in maglie «infinitamente strette», ripiegandosi inoltre su se stesse, ognuna «senza mai tagliare se stessa²». Da questa analisi, la prima presentazione del caos deterministico, e dalla nozione di *biforcazione*, che pure propone per primo, Poincaré deduce, già nel '92 e meglio tematizza in seguito, che «piccole differenze nei valori iniziali producono grandi differenze in fenomeni successivi... la previsione diviene impossibile ed abbiamo un "fenomeno aleatorio"» (Poincaré, 1902, cap. 4).

In conclusione, la determinazione equazionale, ben semplice – solo tre corpi celesti -, non implica la predittibilità del sistema; più precisamente, la geometria delle sue evoluzioni *consente di dimostrare* l'impredittibilità come conseguenza della loro complessità (punti omoclini, biforcazioni...) e, quindi, della sensibilità alle condizioni iniziali del sistema (minime fluttuazioni/perturbazioni possono far prendere al sistema traiettorie, nel tempo, molto diverse). Con il lavoro che lo porta a questa negazione di un programma di conoscenza, Poincaré inizia la *geometria dei sistemi dinamici*, ovvero l'analisi qualitativa di sistemi

² «Se si cerca di rappresentare la figura formata da queste due curve e le loro infinite intersezioni [...], queste intersezioni formano una sorta di reticolo, di tessuto, di rete a maglie infinitamente strette; ciascuna di queste curve non deve mai tagliare se stessa, ma si deve ripiegare su se stessa in modo molto complesso per arrivare a tagliare una infinità di volte tutte le maglie della rete. Si sarà sorpresi dalla complessità di questa figura, che non cerchiamo neppure di tracciare. Nulla è più appropriato a darci una idea della complicazione del problema dei tre corpi ed, in generale, di tutti i problemi della dinamica dove non si ha un integrale uniforme», (Poincaré, 1892). Poincaré "vede" la geometria del caos, senza neppure disegnarlo.

deterministici imprevedibili. Si tratta di una analisi, in gran parte topologica, di flussi globali, di andamenti e dei limiti, anche quantitativi, della prevedibilità, v. (Charpentier et al., 2006). Si arriverà poi a calcolare, ricorderemo più sotto, dopo quanto tempo un sistema, il sistema solare in particolare, diventa imprevedibile.

La novità di rilievo epistemologico dell'approccio di Poincaré consiste nel capire che le evoluzioni aleatorie possono reperirsi anche in sistemi dalla determinazione relativamente semplice e che tutto *l'aleatorio classico* può esser capito come *determinazione imprevedibile*: un dado, un doppio pendolo e persino il sistema planetario... sono tutti sistemi deterministici, ma caotici si dirà poi (v. (Laskar, 1989; 1994) per il sistema solare). Per descrivere il lancio del primo ci vorrebbero numerose equazioni e non val la pena neppure tentare di scriverle: la sua grandissima sensibilità alle condizioni iniziali od al contorno ne rende il moto totalmente imprevedibile. Ciò non toglie che un dado lanciato segua un'orbita perfettamente determinata dal principio di minima azione, una geodetica fisica (una traiettoria che minimizza la variazione di energia nel tempo), certo imprevedibile. Due sole equazioni determinano il moto del doppio pendolo, ma la sua evoluzione è rapidamente caotica e, dunque, anche essa imprevedibile³. Quanto al sistema solare, ne sono stati calcolati da poco i tempi di imprevedibilità, (Laskar, 1989; 1994): i baricentri dei pianeti possono essere misurati solo in modo approssimativo, se non altro per l'elasticità della materia, ed un limite inferiore alla migliore delle misure possibili, associato ad una fine analisi delle equazioni del moto, dà un limite superiore alla prevedibilità, un limite temporale astronomicamente modesto (pochi decine di milioni di anni, a seconda dei pianeti). Per la dinamica moderna, a partire da Poincaré in effetti (1892), il sistema solare è dunque caotico. Osserviamo tuttavia che c'è chi lo ha capito un po' tardi, al punto da sentir il dovere di scusarsi ufficialmente dell'incomprensione a nome di una intera comunità scientifica, in modo molto british ed in un celebre e fruibilissimo articolo, ma senza far gran riferimento all'illustre francese di un secolo prima, presentato solo come l'autore di ... un errore (Lighthill, 1986)⁴.

³ Un pendolo può essere equivalentemente studiato come una barra appesa ad uno snodo; se a questa si attacca un'altra barra, in basso, pure libera di ruotare, si ottiene un doppio pendolo. Un divertente teorema recente (Beguin, 2006) dimostra quanto segue: data una qualsiasi sequenza di interi $a_1, a_2, a_3 \dots$ si possono dare condizioni iniziali al doppio pendolo, tali che la seconda barra effettua almeno a_1 giri in senso orario, poi cambia senso di rotazione ed effettua almeno a_2 giri in senso anti-orario, quindi di nuovo almeno a_3 in senso orario... Se si prende la sequenza $a_1, a_2, a_3 \dots$ aleatoria (v. sez. 5 più sotto), questo risultato, puramente matematico, fa intuire (non dimostra) il caos e l'imprevedibilità in uno dei più semplici sistemi deterministici possibili. Lì si apprezza del resto anche guardando un buon doppio pendolo fisico od una simulazione informatica (la si cerchi sul web: ne riparleremo).

⁴ E' interessante raffrontare l'esplicita teorizzazione e l'analisi geometrica dell'imprevedibilità di un sistema newtoniano in (Poincaré, 1892) ed i riferimenti (ed il titolo!) in (Lighthill, 1986). In effetti, nella teoria dei sistemi dinamici del XX secolo, si sono particolarmente illustrate la scuola francese (Hadamard, Leray, Lévy, Ruelle, Yoccoz...) e quella russa (Lypaounov, Pontryaguin, Landau, Kolmogorov, Arnold...), a cui vanno aggiunti, fra gli altri, gli americani Birkhoff e Lorentz. Ma il lavoro in materia di Hadamard, Lyapounov e Birkhoff, nella prima metà del secolo, è stato a lungo isolato e ben poco citato. Fino ai risultati di Kolmogorov e Lorentz degli anni '50-'60, e ben oltre, la meccanica razionale classica, la cui associazione internazionale era presieduta da Lighthill nel 1986,

In generale quindi, l'aleatorio classico, in quanto imprevedibilità di un processo fisico, è un caso particolare di determinazione, quella propria ad un sistema deterministico caotico (si accettano scommesse per sapere se fra 100 milioni di anni la Terra sarà ancora in orbita intorno al Sole: è dimostrabilmente imprevedibile grosso modo come il lancio di un dado, questione solo di tempi). Si noti che la "caoticità" è una proprietà *matematica* precisa, descritta, nel caso più tipico, da tre caratteristiche ben formalizzabili, precisate con rigore e piena generalità dopo il 1970 (sensibilità alle condizioni iniziali, esistenza di orbite dense, densità dei punti periodici)⁵. Per lo più, dal punto di vista matematico, si ha caoticità quando le equazioni o la funzione di evoluzione che determinano il sistema sono non-lineari, modo matematico tipico per esprimere interazioni ed effetti ago-antagonistici o di risonanza (tecnicamente, due pianeti entrano in "risonanza gravitazionale", momento di grande perturbazione reciproca, quando sono allineati con il Sole). L'imprevedibilità è invece un problema di interfaccia fra sistema matematico e processo fisico: se la determinazione matematica di un processo fisico (le equazioni od una funzione che ne descrive l'evoluzione) verifica i requisiti formali di caoticità, è il *processo fisico* che risulta imprevedibile da quel sistema matematico. E questo perché la misura, in Fisica classica (e relativistica, ovviamente), è sempre un intervallo, ovvero è sempre approssimata; allora, fluttuazioni (interne) o perturbazioni (esterne), *non osservabili* (all'interno dell'intervallo di approssimazione della misura), possono indurre cambiamenti ben osservabili, nel tempo, ma del tutto imprevedibili. Ovvero, per predire o dimostrare che non si può predire, bisogna che qualcuno provi a *dire*, matematicamente, di un qualche *processo fisico*. Se il dire, la determinazione data nel linguaggio matematico, è "sensibile alle condizioni al contorno" (proprietà matematica cruciale dei sistemi caotici) e la misura è, come sempre in Fisica, approssimata, ecco insorgere l'imprevedibilità.

Più sotto si accennerà come, sul piano sia epistemologico sia tecnico, l'imprevedibilità dei sistemi deterministici può essere associata alla indecidibilità gödeliana dei sistemi logico-formali. Dal punto di vista storico, una prima analogia è semplice (ne vedremo altre). La nuova concezione della "determinazione" fisico-matematica che deriva dal risultato negativo di Poincaré, un limite posto alla conoscenza equazionale, e la sua analisi geometrico-qualitativa hanno aperto la via alla moderna geometria dei sistemi dinamici. Analogamente, il teorema di Gödel, un limite alla conoscenza formale, è il momento di nascita della logica matematica contemporanea (Teorie della Calcolabilità, dei Modelli e della Dimostrazione). La

ha dominato l'analisi matematica delle dinamiche fisiche (nonché l'insegnamento della materia subito da chi scrive, ahinoi prima di quelle scuse).

⁵ Un articolo fondatore della nozione moderna di caos in sistemi a pochissimi gradi di libertà, (Ruelle, Takens, 1971), ebbe grandi difficoltà ad essere accettato per la pubblicazione: come si è detto e si tornerà a dire in seguito, la mentalità laplaciana (ma Laplace era un grande, due secoli fa) pervade ancor oggi gli spiriti, sebbene ormai soprattutto al di fuori della fisica matematica. Osserviamo che, in generale, i "risultati negativi" sono i più difficili da digerire ed, oggi, impossibili da far finanziare, anche se spesso aprono nuovi orizzonti. Ed è proprio questo che i menagers istituzionali della ricerca tutta orientata a *progetti positivi* e brevetti, riusciranno ad impedire, forti dei loro indici bibliometrici: il ruolo di pensiero critico e l'innovazione intrinsecamente "anti-ortodossa" propri alla ricerca scientifica, v. (Editors, 2009).

frattura epistemologica, diremmo con Bachelard, di grande rilievo e sorprendente all'epoca (e per tanti ancor oggi), prodotta da questi grandi risultati negativi, è stata una straordinaria generatrice di scienza⁶.

2. *Dalla geometria alla logica.*

Il programma della progressiva e completa occupazione del reale tramite sistemi di equazioni, ha un parallelo epistemologico nella visione del “creativismo” formalista ed in Berkeley (1685-1753) l'illustre predecessore. Per il vescovo inglese, particolarmente impressionato dall'invenzione dei numeri complessi, da quell' “i” immaginario, audace proposta linguistico-simbolica atta a risolvere un'equazione senza soluzioni “reali”, il matematico crea strumenti formali di intelligibilità che progressivamente costruiscono conoscenza. Così, diranno Peacock (1830) e Peano (1889), come si è aggiunto $\sqrt{2}$, che sfugge ai rapporti fra interi, per capire la diagonale del quadrato, π per descrivere il cerchio, si è progressivamente arrivati, con la gloria finale dell'immaginario “i”, al corpo algebricamente *completo* dei numeri complessi: ogni equazione algebrica trova in esso una soluzione.

Hilbert riprenderà questi temi, si dirà più sotto, nel quadro di una finissima analisi fondazionale della Matematica, mirante a sistemi formali *completi*, « soluzione finale», dirà negli anni '20, del problema dei fondamenti che tanto aveva scosso gli intelletti. Per fortuna, in scienza, non esistono soluzioni finali.

Ma quale problema dei fondamenti? Non certo giochi minori di barbieri di inizio novecento, che fanno la barba a tutti e quelli che non si radono da sé (devono farsela?), giochi od antinomie della domenica in barberia, facilmente risolti. La pratica (o la “doxa”) matematica infatti era ed è “tipata”: non consente, in generale, ai barbieri di farsi la barba da sé, né alle funzioni di applicarsi a se stesse. Si definiscono funzioni su numeri interi, o reali, a valori su questi od altri “tipi” di numeri, e poi funzionali sulle funzioni, l'integrale ad esempio, e così via, gerarchicamente. Una formalizzazione che, senza le dovute cautele, non tiene conto di questo, porta facilmente a contraddizioni: succederà altre volte, fa parte dei tentativi, nel far ricerca⁷. Queste antinomie (contraddizioni formali) tuttavia non meritano il nome, ricco di

⁶ Oltre a quelli che qui citati, si possono trovare molti altri “risultati negativi”, in fisica in particolare, e di grande rilievo (in matematica, poi, ogni enunciato, con un abile gioco di doppia negazione, può esser presentato come “negativo”). Tuttavia, i risultati di cui parliamo sono da annoverare fra quelli che si sono opposti a “filosofie” o grandi progetti di conoscenza, a teorie che hanno marcato la storia della scienza e, talvolta, continuano a guidare il senso comune. Dei risultati, inoltre, correlati dal negare una presunta completezza, nelle sue varie forme, di tali proposte teoriche.

⁷ Ricordiamo ad esempio la prima formalizzazione di uno dei sistemi fondamentali della calcolabilità, il lambda-calcolo senza tipi di Church (1932): il successivo “paradosso di Curry”, un'antinomia analoga a quella del barbiere in teoria degli insiemi, portò ad un affinamento del calcolo (1936) e, quindi, alla invenzione di un altro, con i “tipi” (1940). Il primo sistema formale di tipi di Martin-Löf (1970) risulterà pure contraddittorio. Le formalizzazioni, perdendo per strada il “senso”, tema su cui si tornerà, sono facilmente pronte a generar contraddizioni (« la logistica non è sterile: ha generato contraddizioni » osserverà polemicamente Poincaré nel 1906). Tali errori sintattici, per l'insight

storia sin dai tempi della Grecia, di “paradosso” (contro la doxa, in quanto sapere comune), soprattutto quando la doxa contiene già la soluzione. Si pensi invece, ad esempio, al *paradosso* di Zenone, vera sfida alla doxa e che ha aperto secoli di discussioni.

Il problema grave dei fondamenti della matematica consisteva piuttosto nel crollo dell’intuizione euclidea dello spazio, dell’assoluto newtoniano in coordinate cartesiane. Per più di 2000 anni gli “Elementi” di Euclide avevano fornito il nesso fra costruzioni geometriche nello spazio sensibile e spazio fisico, in ogni scala. Teoremi costruiti qui, con riga e compasso nel nostro mondo dei sensi e dell’azione, davano ad un tempo i rapporti geometrici fra le stelle e le misure fra gli atomi di Democrito. Per Keplero, Newton e Kant, l’intuizione sensibile e quella matematica si radicavano nella ricostruzione geometrica dell’Universo, scritto nel linguaggio di cerchi, triangoli e rette euclidei, aveva detto Galileo. Ebbene, no, diranno i geometri del XIX secolo: le varietà spaziali interessanti *non sono* “chiuse per omotetie”. Cosa vuol dire? Riemann, nella sua lezione di abilitazione del 1854, propone un quadro generale per le cosiddette geometrie non-euclidee. In modo molto sintetico e seguendo la successiva trattazione algebrica di Klein, si può osservare che una loro proprietà cruciale è che il gruppo degli automorfismi (trasformazioni o simmetrie interne) non include le omotetie, ovvero gli ingrandimenti e rimpicciolimenti a piacere. Così, nella geometria di Riemann, può accadere che il teorema della somma degli angoli interni di un triangolo, equivalente dell’assioma delle parallele di Euclide, non dia 180° se il triangolo è ingrandito alla scala delle stelle. Einstein, con la curvatura degli spazi relativistici, darà un senso fisico preciso a questa audace negazione dell’universo euclideo. La geometria euclidea è localmente, in piani “tangenti” a curvatura 0, una buona approssimazione, ma, a livello globale, dell’Universo, è proprio la curvatura non nulla dello spazio che consente di unificare gravitazione ed inerzia, il pilastro della Relatività einsteiniana. Del resto, le « forze coesive fra i corpi sono correlate alla metrica dello spazio » aveva intuito Riemann, dimostrando il teorema generale del tensore metrico che a sua volta correla la metrica alla curvatura dello spazio.

Curvatura non nulla dello spazio, sua struttura metrica... gravitazione, inerzia... geometrizzazione rivoluzionaria della Fisica, originata da un “no” alla doxa euclidea. Un « delirio », nelle parole di Frege del 1884, con cui Riemann aveva sottratto la geometria alla intuizione di tipo cartesiano in spazi euclidei; unica possibile, per Frege, al punto che anche dopo il 1920 continuerà a pensare ai fondamenti della geometria in termini euclidei. Ma, prima, nello scorcio del secolo precedente, in reazione al delirio non-euclideo, vera crisi di ogni certezza nell’intuizione matematica, Frege aveva posto le basi per una nuova, importante e rigorosa disciplina, la logica matematica moderna.

Altri ovviamenti vanno affiancati al suo lavoro, Peano fra i tanti, ma è con Frege che l’attenzione fondazionale si sposta in modo radicale dal rapporto allo spazio sensibile ed intuibile, all’analisi logico/deduttiva, imperniata sul concetto fondante di numero intero. L’aritmetica è logica; il principio di induzione, formalizzato da Dedekind e Peano, è un

comunque proposto e per le risposte rapidamente date, sono stati comunque produttori di idee e sistemi interessantissimi, non di crisi epocali.

principio logico e cattura completamente, anzi si identifica alla struttura concettuale dei numeri interi. Gli sviluppi straordinari di questo approccio fondazionale sono sotto gli occhi di tutti: le macchine logico-aritmetiche stanno cambiando il mondo. E sono figlie dirette di un percorso matematico-filosofico che, dagli algebristi inglesi, come Peacock e Boole, arriva fino a Turing, passando per Frege, Peano ed Hilbert.

3. *Da Hilbert a Gödel*

Anche Hilbert era in primo luogo preoccupato per questa perdita di certezza dovuta alla svolta non-euclidea in geometria. Il suo testo fondazionale più importante, i *Fondamenti delle Geometria* (1899), pone le basi per un approccio originale alla questione, andando ben oltre l'unificazione algebrica delle geometrie proposta da Klein. Un'assiomatica perfettamente astratta deve catturare formalmente i vari sistemi, assicurandone le trasformazioni matematiche dell'uno nell'altro, distillando le proprietà "fondanti" da cui derivare formalmente tutti i teoremi di ciascuno dei sistemi. Un calcolo dei segni, scevro dalle incertezze dell'intuizione dello spazio, basato su assiomi e regole di inferenza, da applicare in modo « potenzialmente meccanizzabile ». Luogo della certezza matematica, proprio perché scevro di senso, di quel significato spaziale, fonte di ambiguità, luogo dell'inattendibile intuizione: la certezza è nella manipolazione formale di sequenze finite di segni, tramite regole pure descritte da sequenze finite di segni, senza alcun riferimento semantico-intuitivo. Data la regola "da A ed $A \rightarrow B$, segue B ", scrivi B se hai A ed $A \rightarrow B$; ovvero, per applicare la regola, se la prima A è (composta di) una sequenza di segni *identica* alla seconda A , allora scrivi/deriva B . Cosa significa la freccia " \rightarrow "? Non ha importanza: una macchina deve poter applicare questo schema formale di deduzione.

Così, l'esistenza degli oggetti matematici non è, per Hilbert, questione ontologica: essa è assicurata dalla sola *coerenza* del sistema assiomatico in cui essi sono definiti, ovvero dall'impossibilità di dedurre una contraddizione dagli assiomi usando le regole di inferenza del sistema. In altri termini, se un sistema formale è (dimostrabilmente) non contraddittorio, allora le ipotesi o le prove di esistenza, anche per assurdo, sono la garanzia *esistenziale* propria alla Matematica. Scelta forte, coraggiosa, vera svolta, per il rigore e la chiarezza con cui è posta, rispetto ad antichi miti ontologici di triangoli e cerchi ideali, "esistenti" perché già tutti elencati nella mente di Dio. E Frege, per l'appunto, per il quale i segni e le proprietà logiche e matematiche devono esser significanti, devono evocare nel linguaggio concetti numerici o da essi derivabili, gli contrapporrà polemicamente una teoria assiomatica non contraddittoria delle proprietà di Dio, osservando che così ne aveva dimostrata l'esistenza. Non di questo parlava Hilbert, furibondo all'osservazione di Frege, bensì dell'opposto, ovvero di una pratica deduttivo-formale, puramente linguistica e propria alla Matematica ed ai suoi oggetti, senza contenuti ontologici nel senso fregeano. Ma, allora, come dimostrare la coerenza (non contraddittorietà) delle teorie assiomatiche? Hilbert, nel suo libro, traduce, od "interpreta", le diverse assiomatiche geometriche, incluso quelle riemanniane, nel continuo dell'Analisi. Poiché quest'ultimo può essere ricostruito a partire dall'Aritmetica, osserva che, se si riesce a dare una prova di coerenza di quest'ultima, l'interpretazione analitica garantisce

la coerenza di tutte le geometrie trattate. Per questo, l'anno successivo (1900), in una celeberrima conferenza a Parigi, pone la questione della coerenza dell'Aritmetica (e dell'Analisi) fra i grandi problemi aperti per la Matematica del XX secolo. Ed a ragione, per le conseguenze che questo problema avrà e per il rilievo del quadro matematico-formale proposto. E' nata infatti, con il suo rigorosissimo lavoro di formalizzazione delle geometrie, la forma moderna del metodo assiomatico, una delle svolte metodologiche più feconde del secolo XX.

3.1 ... passando per Poincaré e Weyl.

Poincaré reagisce vivacemente alla impostazione di Hilbert e scrive una lunga recensione del suo libro. Ne apprezza la novità e la profondità tecnica, ma non ama affatto questa visione della Matematica da praticare senza riferimenti al significato, una « pianola meccanica per ragionare », osserva, produttrice meramente formale di tutti i teoremi matematici; « ... si potrebbe ideare una macchina nella quale si introducono da una parte gli assiomi per raccogliere i teoremi all'estremità opposta, come quella leggendaria macchina di Chicago nella quale i maiali entrano vivi per uscirne trasformati in prosciutti e salsicce », scriverà in (Poincaré, 1908). Ed il divario fra le due visioni si accentua nel tempo. Hilbert, si diceva, riprende a suo modo, data l'originalità del personaggio, quella tradizione linguistico-formale che affidava al gioco dei segni, anche nuovi, anche senza senso (come l' "i" immaginario), la crescita e la pratica della Matematica. Da una parte, la gestione potenzialmente meccanizzabile dei segni dovrebbe essere il luogo della certezza, come coerenza assoluta, della Matematica. Dall'altra, preciserà in seguito, la completezza di formalismi adeguati garantirà la riducibilità della Matematica tutta al metodo formale. Ed ancora una volta si intravede una traccia dell'antico programma positivista. I sistemi formali delle equazioni di Laplace dovevano ricoprire il mondo, esplicitarne la determinazione e predirne l'evoluzione, completamente; ovvero ogni domanda sull'evoluzione astronomica futura, nei sistemi deterministici come il sistema solare, deve avere una risposta. Così, ogni problema matematico per Hilbert deve avere una soluzione, una risposta sì o no. In particolare, il sistema formale dell'Aritmetica deve essere completo; ogni suo asserto, se ben formulato, deve essere decidibile. E, quindi, si devono poter dedurre tutti i "fatti" dell'Aritmetica, proprio come Laplace voleva poter dedurre tutti i fatti astronomici.

Certo, fra le risposte possibili vi possono essere risultati di impossibilità, come seppero darne i greci sulla non esprimibilità di $\sqrt{2}$ come rapporto fra interi, o come la non algebricità di π ; ma il riferimento concettuale di Hilbert, l'esempio teorico cui mirare, è lo stesso dei suoi predecessori, di Peano in particolare: il corpo completo dei numeri complessi. L'audace gioco formale, l'invenzione di un "i" senza senso, dicevamo, è per questa scuola di pensiero, la scuola formalista, il paradigma della prassi e della creatività matematica: estendendo il corpo dei reali con questo nuovo segno senza significato e, quindi, con il corpo dei complessi che esso genera, ogni equazione algebrica trova risposta e soluzione. « Non ignorabimus », in Matematica, dirà Hilbert nella sua conferenza di Parigi del 1900: si tratta al più di estendere il sistema formale prescelto, in modo coerente, per rispondere, grazie a nuove nozioni e *principi di prova* ben formalizzati, ad ogni questione puramente matematica.

No, dirà Poincaré in diversi scritti: i problemi insolubili, dimostrabilmente insolubili, esistono e sono i più interessanti, perchè aprono nuove vie. Non c'è estensione formale delle equazioni di Newton-Laplace, aggiungiamo noi, che permetta di predire l'evoluzione dei tre corpi. Ovviamente, Poincaré non può ricorrere a questo argomento per contrapporsi ad Hilbert: l'impredittibilità deterministica nasce nell'interfaccia fra un sistema di equazioni ed un processo fisico che il sistema descrive, essa non è un problema "puramente matematico", come l'esistenza di soluzioni, l'eguaglianza fra funzioni formalmente definite, un asserto dell'Aritmetica A questi problemi Hilbert pensa che si debba trovare sempre soluzione, anche passando attraverso risultati di impossibilità, tappe per giungere alla teoria completa, in cui ogni domanda matematica, ben formalizzata, trovi risposta. E' evidente però che tale teoria deve essere coerente: in un sistema contraddittorio si può dimostrare tutto e l'opposto di tutto. E poiché la certezza è solo *finitaria*, è solo nel gioco formale dei segni, calcolo combinatorio su sequenze finite potenzialmente meccanizzabile, è necessario che pure la prova di coerenza sia di tipo finitario. Ovvero, il dimostrare rigoroso è dato da derivazioni finite, fatte di sequenze finite di segni, scritture formali riga dopo riga, lontane, nella loro meccanicità, dalle ambiguità del significato; quindi, la prova della coerenza della teoria principe della Matematica, quell'Arismetica, o Teoria formalizzata dei Numeri, in cui aveva ricondotto le diverse assiomatiche geometriche, deve essere ottenuta a sua volta in modo formalmente perfetto e certo, grazie ad una analisi finitaria di sequenze finite di segni, riga dopo riga. In questo modo si sarebbe potuto assicurare con un colpo solo la non-contraddittorietà della Teoria dei Numeri e delle geometrie euclidee e non-euclidee.

Ad un convegno del 1904, Hilbert propone uno schema di dimostrazione di detta coerenza basato su di una analisi induttiva delle prove formali dell'Aritmetica. Non senza ironia, nel 1906 Poincaré osserverà, come ricorda Davis nel suo articolo nel secondo volume di quest'opera, che « Monsieur Hilbert... » pensa di dimostrare per induzione la coerenza dell'Aritmetica, il cui assioma principale è ... l'induzione! Hilbert, per più di 10 anni, si interesserà meno ai problemi dei fondamenti, con gran vantaggio dell'Analisi e della Fisica Matematica, cui apporterà ulteriori ed importanti contributi. In quegli anni del resto anche il « migliore dei suoi allievi » e grande geometra e fisico-matematico, Hermann Weyl, gradualmente si allontanerà dalla filosofia dei fondamenti di Hilbert. Nel suo libro sul Continuo (1917), Weyl spiega più volte che l'idea della potenziale meccanizzabilità e della decidibilità della Matematica, in cui tutto si dovrebbe dimostrare con « tecniche deduttive prefissate ed in un numero finito di passi », la trivializzi. E soprattutto, in modo incerto e confuso, esitante si direbbe (come osar pensare contro cotanto Maestro?), congettura l'incompletezza dell'Aritmetica (p. 36 della versione italiana); un « lupo solitario », dirà in seguito di se stesso.

In effetti, la fermezza di Hilbert nel lavorare al suo programma è esemplare. Agli inizi degli anni '20 riprende la sua prova induttiva di coerenza dell'Aritmetica, in un quadro diverso: usando una induzione « meta-matematica ». In quegli anni mette a fuoco infatti una distinzione di rilievo: un sistema formale è un frammento ben preciso di matematica, mentre il lavoro, pure di tipo matematico, fatto su di esso, è *meta-matematica*. Ovvero, la meta-matematica ha per oggetto di studio i sistemi assiomatici formalizzati, in particolare poiché

essi possono esser esaminati come sequenze finite di sequenze finite di segni. Ancora una volta, va sottolineata l'originalità della visione di Hilbert: nel percorso che va dal 1900 al 1922 (ed al 1928, un celebre convegno di matematica a Bologna), egli propone un'analisi *matematica* della deduzione matematica, descritta come calcolo algebrico-combinatorio, approccio profondamente innovativo alla questione dei fondamenti della matematica. Quanto alla prova di coerenza, tuttavia, morto Poincaré, sarà Weyl a fargli osservare che la sua dimostrazione, per induzione meta-matematica, è pur sempre una prova per induzione aritmetica, e che, quindi, non può "fondare" una teoria il cui cuore assiomatico è l'induzione. Wittgenstein, nel 1929, insisterà: « la meta-matematica di Hilbert è una matematica mascherata ». Poiché una prova metamatematica « ... dovrebbe essere basata su principi totalmente diversi rispetto quelli di una prova di una proposizione... in nessun modo essenziale può esistere una meta-matematica ». Così: « Posso giocare a scacchi secondo certe regole. Ma posso anche inventare un gioco in cui si gioca con le regole stesse. I pezzi del gioco sono allora le regole degli scacchi e le regole del gioco sono, ad esempio, le regole della logica. In questo caso, ho un altro gioco, non un meta-gioco » (in (Wittgenstein, 1968), §. 153 e p. 319). Gödel demolirà, matematicamente e nella Teoria Formale dei Numeri, come vedremo, il ruolo fondazionale di questa distinzione, teoria/meta-teoria, tecnicamente comoda, ma artificiale, o, quanto meno, tendente ad escludere dal quadro hilbertiano gli aspetti epistemologici, cui faremo riferimento, dei fondamenti della matematica.

3.2 L'Aritmetica, un assoluto.

Si osservi che, in quanto Teoria (formale) dei Numeri, ben importante in Matematica, l'Aritmetica ha, per Hilbert, una centralità anche fondazionale non minore che per Frege, benché in un quadro gnoseologico ben diverso. Frege vede il luogo della certezza ultima nel significato dei numeri interi in quanto *concetti*, un assoluto logico ed ontologico. Per Hilbert, l'Aritmetica è invece il luogo della certezza nel finito, contabile, iscrivibile con segni e marche finite e avente per oggetto di studio il finito stesso. Entrambi tuttavia partono dal problema dello spazio, dal crollo delle certezze euclidee, ma Hilbert, da grande matematico e geometra immerso nel suo tempo, vuole salvare le geometrie non-euclidee: è il suo scopo principale, contrariamente a Frege. Hilbert fa riferimento alla meccanicità formale in modo strumentale, per togliersi di mezzo il problema dei fondamenti e lavorare poi liberamente « nel paradiso degli infiniti di Cantor ». Entrambi tuttavia propongono un nuovo assoluto: l'Aritmetica. Se infatti il programma di Hilbert avesse raggiunto il suo scopo, una prova formale, finitista, quindi aritmetizzabile (l'Aritmetica - teoria dei numeri interi, finiti - consente codifiche formali di tutto ciò che è finito, dimostrerà formalmente Gödel), avrebbe garantito la coerenza dell'Aritmetica stessa. Questa quindi, sottraendosi all'intuizione dello spazio e del tempo, grazie a calcoli finiti (aritmetici) di puri segni formali, tirandosi cioè fuori dal mondo da sé, "per i capelli", per così dire, come il Barone di Munchausen si sollevava tirandosi su per il codino, sarebbe diventata il luogo della certezza ultima, senza riferimenti al senso, allo spazio, all'azione in esso. Luogo formalmente perfetto e chiuso della certezza deduttiva, capace di auto-dimostrare la propria coerenza, sarebbe stata un assoluto diverso ma parallelo a quello ontologico dei concetti e del numero in Frege. Prova formale *assoluta*, dice infatti Hilbert, della coerenza della Matematica, *soluzione finale* del problema dei fondamenti.

Per chi coglie la centralità epistemologica della Matematica, il programma propone in effetti il fondamento definitivo della conoscenza tutta, dei « protocolli e delle regole secondo cui procede il nostro pensiero », insiste Hilbert in “Die Grundlagen der Mathematik” (1927).

4. Il Teorema

Ebbene, no, non funziona. Non solo l’Aritmetica (la Teoria Formale dei Numeri), se coerente, è incompleta, ovvero ammette asserti del suo linguaggio indecidibili, di cui cioè non è dimostrabile né l’asserto né la sua negazione, ma è *incompletabile*, ovvero non ammette estensioni formali coerenti e complete. L’analogia con il corpo algebricamente *completo* dei numeri complessi non funziona: non si può, aggiungendo qualche simbolo ed assioma, definire una teoria completa (o massimale) che la contenga. E non basta: la coerenza dell’Aritmetica, una volta formalizzata, alla Hilbert diciamo, non è dimostrabile in Aritmetica. Ovvero, non esiste una prova finitista di coerenza dell’Aritmetica. Ecco in breve la svolta gödeliana, vera doccia fredda sulle ambizioni formaliste, che ancora alcuni si affannano a salvare, introducendo varianti e modalità diverse della nozione di “finitista”. Vedremo infatti come “tirando il collo” all’induzione finita, lungo gli ordinali infiniti, si può far meglio, e, con lavoro tecnicamente interessante, gerarchizzare le teorie e rinviare di teoria in teoria il problema della coerenza. Fatto salva però la non “completabilità”, dimostrabile ed intrinseca del sistema, pietra tombale sui fondamenti ultimi della Matematica nell’assenza di senso, in calcoli di segni potenzialmente meccanizzabili.

Vediamo qualche elemento tecnico della prova di Gödel, senza entrare nei dettagli di questo capolavoro di rigore formale che è la dimostrazione del I teorema. Un’osservazione, prima. Mai, negli enunciati, nelle prove, Gödel utilizza la nozione di “verità”, nozione extra-formale. Questo va detto, poiché in letture comuni del teorema, si dice frettolosamente che esso dimostra l’esistenza di “enunciati veri ma indimostrabili” dell’Aritmetica. “Veri”? dove? come? secondo quale nozione di verità? la questione è delicata e ci torneremo, evitando gli svolazzi platoneggianti che fan riferimento a liste di enunciati veri, già tutti lì, elencati nella mente di Dio, ma di cui alcuni “indimostrabili”. Tali elucubrazioni sono estranee alla prova di Gödel. La sua forza invece è nel demolire il programma formalista dal suo interno, per via meramente formale, con puri calcoli di segni senza significato e, quindi, senza invocazioni di “verità” trascendenti, ma giocando il puro gioco formalista. Ed in questo si può vedere una prima analogia di metodo con il teorema dei Tre Corpi di Poincaré: anche quel risultato distrugge il mito della determinazione equazionale capace di predire completamente l’evoluzione del mondo, “dall’interno”, grazie ad una pura analisi matematica delle *equazioni*.

La prima grande idea di Gödel è quella di codificare con numeri le proposizioni di un qualsiasi sistema formale, in quanto dato, sotto forma di assiomi e regole di inferenza, da un numero finito di sequenze finite di segni. In particolare, numerando ogni segno, ogni lettera del linguaggio dell’Aritmetica, Gödel associa biunivocamente un numero-codice intero ad ogni enunciato dell’Aritmetica formalizzata alla Dedekind-Peano-Frege-Russell (che chiameremo AP, Aritmetica di Peano). E’ inutile entrare nei dettagli di tale formalizzazione, che descrive con rigore assiomi ben comuni (proprietà dello 0, del Successore e, soprattutto,

1. Se $AP \mid\text{---} B$ allora $AP \mid\text{---} \textit{Theor}(\underline{B})$
2. Se $AP \mid\text{---} \textit{Theor}(\underline{B})$ allora $AP \mid\text{---} B$

Ovvero, per 1., se B è un teorema di AP , allora lo so dire e dimostrare *dentro* AP , poiché $\textit{Theor}(\underline{B})$ anche è un teorema. L'inverso per 2.: se so dimostrare che B è un teorema *dentro* AP , allora è veramente un teorema di AP ⁸. Od ancora, $\textit{Theor}(\underline{B})$ non è altro che la scrittura in AP della funzione “deduzione effettiva” di B a partire dalle formule-assiomi di AP .

Ancora un passo e ci siamo, il gioco delle circolarità si completa. Scriviamo $\neg B$ per la negazione di B (*non-B*) in AP . Basta allora scrivere, con ulteriori e non banali astuzie di codifiche, ricorsività e deduzioni, una formula G tale che

$$3. AP \mid\text{---} (G \leftrightarrow \neg \textit{Theor}(\underline{G}))$$

G è una mera sequenza di segni, rigorosamente costruita con un calcolo dei segni e questo ci dovrebbe bastare. Intuitivamente, tuttavia le si può dare un “significato”, perchè il lettore, il cui cervello non sia una Macchina di Turing, “capisca”, ovvero attribuisca alla lontana, un “senso” alla prova, alla costruzione formale accennata. G “dice che” G non è dimostrabile. Ovvero, AP dimostra che G e la sua non dimostrabilità, formalizzata (ovvero, $\neg \textit{Theor}(\underline{G})$), sono equivalenti. Od ancora, se si vuole continuare a forzare del senso in ciò che non ne ha (e, formalmente, non deve averne!), G è (dimostrabilmente equivalente al) la frase “questa frase, G , non è dimostrabile”. L’analogia con il paradosso del mentitore (“questa frase è falsa”) è evidente e Gödel riconosce nell’introduzione che la geniale invenzione della cultura greca è stata una delle sue fonti di ispirazione. Ma per ottenere la contraddizione, contrariamente al “mentitore”, paradosso semantico, non si deve far riferimento al significato (vero/falso), bensì restare nella teoria formale della prova (dimostrabile/indimostrabile), come fa Gödel con grande rigore. Ora, “questa frase è falsa” non è né vera né falsa, questa è la sua forza, la sua paradossalità. E così G non sarà dimostrabile né essa né la sua negazione, se AP è coerente.

Supponiamo infatti che AP sia coerente, cioè che non generi contraddizioni (non dimostri A e $\neg A$, per alcun A). Dimostriamo, allora, che G non è dimostrabile in AP : se lo fosse, ovvero se $AP \mid\text{---} G$, lo sarebbe pure $\neg \textit{Theor}(\underline{G})$, a causa di 3., mentre, per 1., sappiamo che $AP \mid\text{---} \textit{Theor}(\underline{G})$. Contraddizione.

Ma neppure $\neg G$ è dimostrabile, poichè 3. implica che $AP \mid\text{---} (\neg G \rightarrow \textit{Theor}(\underline{G}))$, per contrapposizione, ovvero per

$$\text{(Contrap)} \quad T \mid\text{---} (A \rightarrow B) \text{ implica } T \mid\text{---} (\neg B \rightarrow \neg A)$$

in ogni teoria T , e per $AP \mid\text{---} \neg \neg \textit{Theor}(\underline{G}) \rightarrow \textit{Theor}(\underline{G})$, in logica classica. Ovvero, una prova di $\neg G$ darebbe una prova di $\textit{Theor}(\underline{G})$, quindi, per 2., una di G . Contraddizione.

Ecco quindi una proposizione di AP , G , che non è dimostrabile, né essa, né la sua negazione. Quindi AP , se è coerente, è incompleta.

Ma cosa si è utilizzato di AP ? Solo la sua capacità di codificare proposizioni e prove formali. Quindi ogni teoria formale T sufficientemente espressiva, ovvero ogni teoria finitisticamente codificabile e che contenga AP , permette di costruire un asserto G_T tale che, se T è coerente, è indipendente da T . Insomma, per ogni estensione coerente di AP , esistono proposizioni indecidibili per T . Quindi AP è *incompletabile*: non esistono “corpi” (teorie formali coerenti)

⁸ Un dettaglio: 2. richiede una ipotesi appena più forte della coerenza di AP , detta ω -coerenza.

che siano completi (massimali) e contengano l’Aritmetica, per riprendere il paradigma del corpo algebricamente completo dei numeri complessi. E se una teoria matematica non contiene AP, ovvero se non sa fare i conti sui numeri interi, in generale ci si fa poco. In questo veloce “surfing” sulla cresta delle codifiche e delle contraddizioni abbiamo ommesso dettagli essenziali (e, talvolta, ma non sempre, matematicamente difficili). La grande tecnicità del I teorema, pagine e pagine di codifiche e deduzioni formali, non consente di fare di più in un testo come questo.

Ma, attenzione, il rompicapo non è finito: c’è un II teorema di incompletezza. Che vuol dire formalmente che AP è coerente ?

Come dicevamo, una teoria (matematica) è coerente se non genera alcuna contraddizione, ovvero non dimostra A e $\neg A$, per alcun A . Basta però una sola contraddizione perché da essa tutto si derivi: “ex-falso quodlibet”, dicevano gli antichi. La contraddittorietà è quindi equivalentemente caratterizzata, nel caso di AP, dal solo derivare $0 = 1$, che nega uno degli assiomi. Ma allora è facile dire in AP che AP è coerente, basta affermare che $\neg Theor(0 = 1)$. Ovvero $Coer \equiv \neg Theor(0 = 1)$ è una proposizione di AP che asserisce la coerenza di AP: dice formalmente che AP non dimostra $0 = 1$. Si noti la forza del formalismo: *Coer* descrive nella teoria AP l’asserto eminentemente meta-teorico (meta-matematico) “AP è coerente”, ed AP non genera contraddizioni. Se quindi proviamo che *Coer* è indimostrabile in AP, avremmo dimostrato la non dimostrabilità, con metodi deduttivi formali e finitisti, quindi codificabili in AP, della coerenza di AP.

Grazie al lavoro tecnico fatto per il I teorema, Gödel dimostra questo risultato in poche righe. Righe densissime ed astrattissime però, lontane da ogni necessità (e direi, opportunità matematica) di interpretazione, basate sulla sola vicinanza sintattica di $\neg Theor(\underline{G})$ e $\neg Theor(0 = 1)$. Il secondo teorema di incompletezza dimostra infatti:

$$4. AP \mid\text{---} (Coer \leftrightarrow G)$$

Ovvero, in AP, G e *Coer* sono dimostrabilmente equivalenti. Ovviamente, quel che ci interessa è soprattutto una implicazione: $AP \mid\text{---} (Coer \rightarrow G)$. Poiché G è indimostrabile, allora anche *Coer* è indimostrabile !

Soffermiamoci allora sullo straordinario calembour che abbiamo prodotto. Scriviamo in primo luogo “ $(AP, A) \mid\text{---} B$ ” per dire che B si deduce, nell’assiomatica di AP, con l’ipotesi aggiuntiva A . Quindi, $(AP, Coer)$ sta per l’aggiunta agli assiomi di AP dell’ipotesi di coerenza formalizzata; si osservi che $AP \mid\text{---} (Coer \rightarrow G)$ ed $(AP, Coer) \mid\text{---} G$ sono equivalenti (un facile e generale teorema del calcolo proposizionale). Scriviamo pure, per brevità, $AP \mid\text{---} B$ per dire che AP non dimostra B . In modo sintetico, il I ed il II teorema dimostrano allora, rispettivamente:

$$5. \text{ Se AP è coerente, allora } AP \mid\text{---} G \text{ ed } AP \mid\text{---} \neg G$$

$$6. (AP, Coer) \mid\text{---} G.$$

Il passaggio da 5. a 6. è quel che conta ed usualmente non è messo in evidenza. In ipotesi meta-teoriche di coerenza, AP non dimostra né G né la sua negazione (vedi 5.). Se però si formalizza, nella teoria, la coerenza, *Coer*, e la si prende come ipotesi aggiuntiva, da essa si

deriva G, formalmente, dentro AP (vedi 6.). Quindi, in entrambi i casi, per dimostrare l'indecidibilità di G o per *dimostrare* G, l'ipotesi di coerenza è essenziale e dà risultati diversi. Più precisamente, dopo aver codificato la meta-teoria nella teoria (la gödelizzazione e la costruzione di *Theor*, con le proprietà 1. e 2.), le 5. e 6. dimostrano che la seconda è, in un certo senso, “più forte”: a partire dalla coerenza, codificata, la teoria *dimostra* un asserto formalmente *indimostrabile* se si suppone la coerenza al solo livello meta-teorico.

Ultimo colpo definitivo alla visione di Hilbert: come avevano intuito Weyl e Wittgenstein, la meta-matematica, se resa rigorosa, è una parte della Matematica. Ancora una volta, Gödel lo dimostra con 1. e 2. più in alto: *Theor* codifica nella teoria AP la dimostrabilità meta-teorica. Con il gioco fra 5. e 6. dimostra poi che la teoria è addirittura più espressiva della meta-teoria (o, come osserveremo in 4.1 con più cura: la deduzione meta-teorica di G dalla coerenza *segue* da quella teorica). La meta-induzione non esiste: è una forma di induzione, pienamente codificabile nell'induzione teorica. L'uso dei termini meta-teorico, meta-matematico, è spesso comodo (didatticamente soprattutto, per distinguere fra “coerenza di AP” e *Coer*, ad esempio), ma non ha ruolo fondazionale: non si può fondare la Matematica e nessuna forma di sapere, con il ricorso al suo meta-.... Nessun meta-linguaggio fonda il linguaggio: « siamo chiusi nella gabbia del linguaggio », scrive Wittgenstein. Solo una « genealogia di concetti », diceva Riemann, da radicare, con il linguaggio certo, ma *oltre* il linguaggio, *prima* del linguaggio, *sotto* il linguaggio, nell'azione nello spazio (Poincaré) e nel tempo (Brouwer), può proporre una analisi epistemologica della Matematica, questo sapere così costruito nel mondo, per organizzare e capire il mondo.

4.1 E la “verità” ?

La volgata usuale e facile, che anche illustri colleghi continuano a proporre, per “ontologismo” platoneggiante o per prigrizia o per stupire il lettore, aderisce ancora alla lettura rapida, ontologicamente ingenua del teorema di Gödel. E di conseguenza molti, con ampio gesto delle mani ed occhi alzati al cielo, invocano stupefatti l'esistenza di asserti veri, ma non dimostrabili, come G (oh, miracolo ontologico o ... quantistico: e se G risultasse vero per via di effetti quantistici nel cervello ?). A fronte di affermazioni del genere, bisogna sempre chiedere: ma come fai a dire che G è “vero” ? Del resto come affermare che un asserto, in Matematica, è vero se non dimostrandolo (o prendendolo come ipotesi) ? L'interlocutore allora ragiona e *dimostra* G, per convincerci della “verità (indimostrabile)” di G. In ipotesi di coerenza, ricorda, G risulta indimostrabile (I teorema). Poiché G “dice” di essere indimostrabile (la sua equivalenza in AP con $\neg Theor(G)$), allora essa è vera. Questo ragionamento informale, fatto a partire dall'“interpretazione” di *Coer* e G, agitando le mani e senza scrivere; se formalizzato, risulta una versione semanticamente forzata della rigorissima derivazione formale $AP \mid \text{---} (Coer \rightarrow G)$, al cuore del II teorema. Quest'ultimo, appunto, deduce formalmente G da *Coer*, dimostrando quindi G, che risulta, una volta data una rigorosa interpretazione di AP nel modello dei numeri interi, “ovviamente” vera, come conseguenza formale di *Coer*. Ovviamente, insomma, la verità di G la si dimostra, come fa ogni platonista messo alle strette, ed è pure facile e fattibile *in AP*, a partire da *Coer* (il II teorema). E' tutta qui, si diceva, la straordinaria finezza del risultato di Gödel, è nel gioco sottile fra 5. e 6.. Nessun bisogno di miracoli ontologici né di Meccanica Quantistica.

Vedremo più sotto risultati “concreti” di incompletezza, ovvero asserti combinatorii della Teoria dei Numeri (del genere “per ogni x , esiste $y \dots$ e qui una complessa espressione numerica in x ed $y \dots$ ”), interessanti e non banali, non dimostrabili in AP, neppure a partire da *Coer*, ma derivabili con estensioni infinitarie dell’induzione. In questi casi, data la loro complessità combinatoria, nessuno osa dire che tali asserti sono “evidentemente” veri, evocando il miracolo ontologico o quantistico. Si è solo costretti a dimostrarli, al di fuori di AP ovviamente e come spiegheremo⁹.

La responsabilità di Gödel in tutto ciò? L’articolo del ’31 è perfetto: non un enunciato, non una prova, né un ragionamento invoca la “verità” né fa riferimento ad *interpretazioni* del gioco formale. Solo nell’introduzione, per spiegare informalmente il senso del I teorema a venire, Gödel osserva che G , l’enunciato che risulterà indecidibile, è *corretto*. Ma *subito dopo* aggiunge che l’analisi precisa del ragionamento meta-teorico che lo prova, ed a cui abbiamo accennato, porterà appunto a dei « risultati sorprendenti » riguardo alle « prove di coerenza dei sistemi formali » (il II teorema!). Ovviamente, una visione ontologica può ancora essere salvata: la prova è solo un accesso ad una realtà pre-esistente e, talvolta, essa può non essere solo formale. Più precisamente, si può dare una buona nozione di verità relativamente al rapporto fra una sistema formale ed una struttura matematica data. Così, immaginate la sequenza dei numeri interi con le proprietà imparate alla scuola elementare, sapete allora dire che $4+3 = 7$ è vero e che $667 \times 52 = 34084$ è falso, o che $7 < 8 \dots$ La teoria formale (AP) permette di dimostrarlo in modo automatico (ed una macchina lo fa molto meglio di noi). E’ possibile dunque considerare queste proprietà “vere” o “false” e definirle tali associando ai segni formali della teoria i numeri concreti e significanti della vostra esperienza scolastica. In generale, si dirà che una teoria formale è “corretta” se dimostra *solo* asserti veri nel modello inteso (o standard), è “completa” se ne dimostra *tutti* gli asserti veri.

Alfred Tarski in effetti propone negli anni ’30 una teoria generale della verità (la semantica tarskiana) fondamento della novella Teoria logico-matematica dei Modelli. In essa si associa ad ogni segno formale il corrispondente “oggetto” nella struttura (il modello) inteso: lo “0”, segno, corrisponde al primo elemento della struttura ben ordinata dei numeri interi, il segno di funzione Succ sarà il passaggio al successivo nell’ordine.... La descrizione formale si adegua alla struttura soggiacente, da cui dopo tutto deriva. Una teoria generale della verità dell’espressione linguistica e scientifica, come “adaequatio intellectus et rei” è cosa molto delicata, e gli abusi, ispirati dal lavoro di Tarski, sono stati numerosi. La semantica tarskiana è stata da alcuni estesa, ad esempio, ai linguaggi storici. Si osserverà allora che « la neve è bianca » è vera quando la neve è bianca (formidabile insight!). Così « il prato è verde » è in

⁹ Nella ricerca ontologica di una verità matematica indimostrabile, si fa talvolta uso del “fatto” che G deve essere vera o falsa, o, il che è lo stesso, che G o $\neg G$ (una delle due) deve esser vera, *senza dire quale*, poiché questo andrebbe dimostrato. Questa “ontologia debole del vero” deriva da un’ipotesi classica (il “tertium non datur”), legittima, ma fortissima e *semanticamente* insoddisfacente (o di cattivo gusto – nozione importante in matematica) per discutere della verità un asserto, G , riscrittura formale del paradosso del mentitore, il quale, per l’appunto, non è né vero né falso. Gödel pure usa il “tertium non datur” (G è indipendente da AP classica), ma proprio per darci, in *teoria della dimostrazione*, il “tertium”, l’ind decidibile.

generale vera, mentre « il prato è azzuro » è quasi sempre falsa (osservazione delicata per i greci classici, che avevano un solo nome per azzurro e verde). Per altro, noi avremmo difficoltà a dirimere una disputa fra due esquimesi, uno dei quali dice che « oggi la neve è bianco⁵ » e l'altro che « è bianco⁷ » (sembra che gli esquimesi abbiano 20 nomi diversi per il bianco-neve). Il colore non è una lunghezza d'onda precisa e già data, ma è un gesto umano che demarca i confini di un quasi-continuo di lunghezze d'onda, un gesto ricco di intersoggettività e di storia. E così è tutta la costruzione di oggettività. Ma per l'Aritmetica, in prima approssimazione, tale semantica può andare, ed il lettore può accontentarsi di come l'ha capita a scuola: associi i segni formali alla sua comprensione scolastica dei numeri interi. Vedremo però come la nozione di "verità", od « elemento di realtà » dirà Einstein, diventi una sfida enorme in Meccanica Quantistica; ci torneremo parlando della sua presunta « non completezza ». Per ora, si dica pure che Gödel dimostra che esiste (anzi, costruisce, si badi bene!) un enunciato vero, alla Tarski, formalmente indimostrabile. Si spieghi poi, però, che esso è vero perché, nell'ipotesi formalizzata di coerenza, lo si riesce addirittura a dimostrare in AP: allora, se assumo *Coer* vero, poiché $AP \mid - (Coer \rightarrow G)$ e AP è corretta, anche *G* è di certo vero (lo dimostro!)¹⁰.

Il rilievo storico dello straordinario articolo di Gödel dovrebbe ora essere ben evidente e questo non solo per l'impatto sui fondamenti della Matematica, ma anche per le *tecniche* inventate nel corso della prova del I teorema. La gödelizzazione e la definizione della classe delle funzioni ricorsive aprirà la via alla Teoria della Calcolabilità e, quindi, ai lavori di Church, Kleene, Turing ... degli anni '30. Questi a loro volta porranno le basi, con Turing soprattutto, all'Informatica moderna, a partire, si badi bene, da problemi interamente logico-matematici: la definizione di numero reale calcolabile (in quanto effettivamente generabile da un algoritmo) e dalla questione dell'indecidibilità. È interessante osservare come Gödel e, cinque anni dopo, anche Turing, inventino la nozione rigorosa di calcolabile od effettivamente decidibile, nel quadro di linguaggi e sistemi formali, stabilizzando così e definitivamente anche la nozione di sistema formale hilbertiano (la "macchina a salsicce" di cui aveva parlato Poincaré), con lo scopo di dimostrare che si possono dare proposizioni o processi non decidibili, non calcolabili (non generabili automaticamente, come salsicce, senza usare ipotesi aggiuntive). Per dire no, bisogna definire esattamente il quadro a cui si dice no. E renderlo quindi, se interessante, ancora meglio utilizzabile, al punto da inventare la Macchina digitale (aritmetica o di Turing) che sta cambiando il mondo.

E così, come con il Teorema dei Tre Corpi di Poincaré, il risultato negativo è lo slancio verso una nuova scienza, per il suo contenuto e per i metodi che propone. Va detto che, nel '31, la portata dell'analisi della calcolabilità proposta da Gödel non era evidente. Cosciente di questo, Gödel, alla fine dell'articolo, scrive che il suo risultato non contraddice necessariamente il punto di vista formalista di Hilbert. Potrebbero infatti esistere diverse formalizzazioni della nozione informale di deduzione finitista effettiva, non necessariamente codificabili con le sue funzioni ricorsive. Solo grazie ai risultati di equivalenza di tutti i

¹⁰ La questione, per il lettore un po' stordito dal calembour, sta nella differenza, si ricordi, fra l'ipotesi metateorica di coerenza e *Coer*, l'ipotesi teorica di coerenza, la quale, in AP, consente di derivare *G*.

sistemi formali per la calcolabilità, provati da Turing e Kleene nel '35-'37, si avrà la prova della generalità del metodo di Gödel. La Tesi di Church proporrà l'invarianza matematica di tutte le nozioni di calcolabilità e con essa della nozione di deduzione finitisticamente accettabile od effettiva. Così, in una nota aggiuntiva del '63, Gödel riconoscerà la piena generalità del suo teorema: esso si basa su una nozione « sicura, precisa ed adeguata » di sistema formale, osserva, e contraddice la decidibilità, la completezza e la (formalmente) dimostrabile coerenza « di ogni sistema formale coerente che contenga una teoria dei numeri finitaria sufficientemente espressiva ». E la ricerca di teorie che siano estensioni proprie (e consistenti) dell'Aritmetica e della Teoria degli Insiemi formali marcherà gli sviluppi della logica dei decenni successivi¹¹.

5. Poincaré vs. Gödel.

Si è cercato di spiegare in che senso il Teorema dei Tre Corpi possa essere visto come un "precedente filosofico" del teorema di Gödel. L'impredittibilità ha un sapore di indecidibilità, nel tempo e nello spazio; inoltre, tutta la filosofia di Poincaré è un costante apprezzare le questioni insolubili, i « risultati negativi ». Non c'è modo tuttavia, si diceva, di correlare tecnicamente i due teoremi, in modo diretto, se non altro perché la predittibilità laplaciana è un problema di interfaccia sistema matematico / processo fisico e non una pura questione matematica, come la decidibilità hilbertiana. Si può tuttavia stabilire una correlazione matematica fra alcune *conseguenze* di questi due grandi teoremi.

La geometria dei sistemi dinamici estende la determinazione fisico-matematica e cattura in essa l'aleatorio, contro la distinzione di Laplace. L'aleatorio classico, si è detto più volte, è determinismo impredittibile. Ora, questo aleatorio può essere dato anche per via puramente matematica, senza riferimento a processi fisici. Una definizione è stata proposta da Birkhoff, negli anni '30, come conseguenza di un suo importante risultato. Molto informalmente, fissato un osservabile in una dinamica data (la velocità, l'accelerazione ... in ogni punto, ad esempio), si dice che un punto è *aleatorio* quando l'evoluzione temporale media di tale osservabile per quel punto, al limite infinito, coincide con il valore medio di quell'osservabile su tutto lo spazio (la media temporale coincide, asintoticamente, con la media spaziale). Pensate ad una particella in un volume isolato di un gas perfetto: la sua velocità media, nel tempo, sarà uguale alla velocità media di tutte le particelle del gas considerato. Portato al limite asintotico, lontano dall'ispirazione fisica, questo è un modo matematico per definire un moto aleatorio, nonché un *punto aleatorio* (l'origine della traiettoria).

Più precisamente, sia (D, T, μ) , un sistema dinamico, ovvero una trasformazione (una

¹¹ Si accennerà all'analisi ordinale di Gentzen (1935). L'infinito, come ordine oltre gli interi o come cardinalità oltre il numerabile, fornirà strumenti di analisi delle prove tesi a colmare l'incompletezza sia dell'Aritmetica, sia della Teoria degli Insiemi, incapace, nella sua versione formale (ZF od NBG), di rispondere alle domande per cui era nata: la validità dell'Assioma di Scelta e dell'Ipotesi del Continuo. I relativi risultati di indipendenza hanno gettato ulteriore luce sull'espressività ed i limiti dei sistemi formali (Kunen, 1980).

dinamica) T di uno spazio D in se stesso e μ una misura su D . Un punto x di D è (Birkhoff) *aleatorio* (o “generico”, in senso ergodico) se, per ogni osservabile f (funzione da D a valori reali), si ha:

$$\lim_n 1/n (f(x) + f(T(x)) + \dots + f(T^n(x))) = \int_D f d\mu$$

T , ovviamente, determina la dinamica e tutto ciò ha senso in sistemi deterministici caotici (anche debolmente caotici: mescolanti, si dice, ma tralasciamo i dettagli). Ecco quindi una nozione di aleatorio deterministico, alla Poincaré, resa puramente matematica, v. (Petersen, 1983).

Torniamo ora a Gödel. Negli anni '60, P. Martin-Löf ha dato una nozione di aleatorio per sequenze infinite di numeri (di 0 e di 1, per dire) interamente basata sulle ricorsività alla Gödel. L'idea, proposta nell'ambito di una tesi di dottorato in parte diretta da Kolmogorof, è stata poi ampiamente sviluppata da molti, fra cui G. Chaitin e C. Calude. In breve, si definisce una nozione di “test effettivo di aleatorietà”, in termini di funzioni ricorsive; ovvero di controllo di possibili regolarità o segmenti calcolabili in una sequenza: una sequenza aleatoria non deve avere alcuna regolarità effettivamente riconoscibile, che si iteri indefinitivamente. Si enumerano allora tutti i possibili test effettivi e si definisce (*ML-aleatoria*) una sequenza infinita che « passa tutti i test effettivi ».

Più precisamente, si consideri lo spazio 2^ω delle sequenze infinite di 0 ed 1; un aperto U_s in tale spazio è un “ventaglio” descritto da una sequenza iniziale finita comune: $U_s = \{x / s \text{ è sequenza iniziale di } x\}$. Si dia allora una misura calcolabile μ su tale spazio topologico, ovvero una funzione σ -additiva e calcolabile dagli aperti ai numeri reali calcolabili (effettivamente generabili). Un *test di Martin-Löf* è una successione effettivamente generata (ricorsivamente enumerabile) di aperti $\{U_{s_n}\}_{n \in \omega}$ tale che $\mu(U_{s_n}) < 2^{-n}$. Un elemento x in 2^ω non passa il test $\{U_{s_n}\}_{n \in \omega}$ se x è un elemento di $\bigcap_n U_{s_n}$. Quindi, x è *ML-aleatorio* se passa ogni test di Martin-Löf (ovvero non viene “asintoticamente catturato” da alcuna sequenza effettiva e convergente di aperti), v. (Martin-Löf, 1966; Calude, 2002). Una sequenza infinita di 0 ed 1 può essere anche interpretata come (bigettivamente associata ad) un numero reale o, più in generale, ad un punto di uno spazio metrico.

E' facile dimostrare che una sequenza ML-aleatoria è (fortemente) indecidibile, nel senso di Gödel: non solo non è decidibile, nè effettivamente generabile (semi-decidibile), ma, addirittura, non possiede alcuna sotto-sequenza infinita effettivamente generabile. La congettura, di chi scrive e dimostrata di recente grazie al lavoro di due tesi di dottorato co-dirette dallo stesso e da S. Galatolo, era che i due aleatori, dinamico e “gödeliano” (algoritmico), dovessero essere equivalenti. In effetti, dando una struttura di effettività ad un'ampia ed interessante classe di dinamiche fisico-matematiche (D, T, μ) , non solo sul semplice 2^ω (basta che (D, T, μ) sia debolmente caotico o mescolante), si riesce a dimostrare che l'aleatorio alla Poincaré-Birkhoff e quello alla Gödel-MartinLöf, generalizzato a questi spazi, coincidono (articoli in stampa).

Dal teorema di Poincaré non si deriva, sia chiaro, quello di Gödel (né viceversa!). Tuttavia, abbiam detto, nelle teorie matematiche proposte dall'uno e dall'altro e, più specificatamente

rafforzando i loro risultati negativi, si danno nozioni limite, puramente matematiche, di aleatorio dinamico e di aleatorio algoritmico. E queste coincidono. Si osservi che l'inserimento dell'aleatorio classico in un quadro deterministico, ovvero il capirlo come determinazione imprevedibile, è un aspetto di grande rilievo della svolta proposta da Poincaré per l'intelligibilità dei sistemi dinamici, come l'indecidibilità è al cuore del teorema di Gödel (e l'aleatorio algoritmico ne è una estensione). Si noti infine che il dimostrare l'equivalenza, al limite infinito, dell'aleatorio delle dinamiche fisiche e di quello algoritmico non dice affatto che "l'Universo è un (grande?) algoritmo". Al contrario, si è in effetti dimostrato che, in un quadro determinista, l'aleatorio od imprevedibilità dinamica, sotto certe ipotesi, coincide con l'aleatorio algoritmico, ovvero con una forte forma di indecidibilità. Quindi, negando per contrapposizione (la regola Contrap più in alto) i due termini dell'equivalenza, una procedura algoritmica, un metodo di semi-decisione o una funzione calcolabile (ricorsiva) generano solo processi deterministici prevedibili. Ora, non solo un dado, ovviamente, ma anche il sistema solare (o tre soli corpi celesti) e quasi tutto quel che ci circonda è in un tessuto di correlazioni, cosituisce appunto un "sistema", e questo rende i processi fisici quasi sempre imprevedibili e, quindi, non calcolabili (si ricordi il ruolo della misura fisica, sempre un intervallo, e della sensibilità alle condizioni iniziali). Più in generale, l'intelligibilità fornita dalle matematiche del continuo e da quelle del discreto è diversa: il mondo non è una somma di quadratini o piccoli punti come i quadri di Seurat, cui l'accesso (la cui misura) è esatto. E questo Turing, negli ultimi anni della sua breve vita, lo colse benissimo.

5.1 Turing: dai sistemi formali alle dinamiche continue.

« La Macchina a Stati Discreti », scrive Turing nel 1950, in riferimento alla Macchina Logica da lui inventata nel 1936, il prototipo del computer digitale, è « laplaciana »: l'imprevedibilità semmai è pratica, insiste (un programma troppo lungo e complicato), non di principio, come nella Fisica dei « sistemi continui ». Definisce infatti così i sistemi dinamici che studierà in un fondamentale articolo del '52 sulla morfogenesi (dinamiche continue di forme). Nei sistemi continui non-lineari di azione/reazione/diffusione del '52, l'evoluzione delle forme, i colori ad esempio sulla pelliccia di animali, è sensibile alle condizioni iniziali (è soggetta all'« deriva esponenziale » o « instabilità catastrofica », dice Turing): cambiamenti al di sotto della misura fisica, e quindi di ogni discretizzazione, possono causare grandi differenze, nel tempo. Turing, cambiando radicalmente dominio di ricerca e punto di vista, lavora sul solco di Poincaré. Dinamiche continue rimpiazzano il succedersi degli stati discreti della sua prima Macchina. Non più basato sulla fondamentale distinzione fra hardware e software, ben discreti, da lui inventata, il calcolo è piuttosto un susseguirsi di deformazioni, una *genesis continua* di forme, solo materiali.

Cerchiamo di capire, molto rapidamente, il senso della riflessione di Turing ed, assumendo così un altro punto di vista, il motivo per cui il risultato di correlazione fra aleatori dinamici e algoritmici contribuisca anche ed a sua volta a negare formalmente il mito di un universo computazionale. L'approssimazione computazionale trasferisce le determinazioni equazionali su basi di dati discreti, dove l'accesso ai dati è *esatto*, contrariamente alla misura fisica che è sempre un intervallo. Inoltre, per iterati arrotondamenti, le orbite di dinamiche caotiche, calcolate da una macchina, differiscono rapidamente dalle orbite fisiche, descritte nel

continuo spazio-temporale. Ovvero, la sensibilità alle condizioni iniziali può venir nascosta in una teoria degli algoritmi, necessariamente aritmetica, e la discretizzazione impone evoluzioni diverse da quelle che sappiamo descrivere nel continuo matematico. Prendete la migliore delle simulazioni computazionali di un doppio pendolo (due equazioni, è ben facile: se ne trovano sul web). Lanciatela e rilanciatela sugli stessi valori numerici discreti iniziali: l'algoritmo farà percorrere esattamente la stessa traiettoria al pendolo simulato, mille, diecimila volte. Questo non ha senso fisico, poiché l'evoluzione imprevedibile (aleatoria) di questo semplicissimo processo fisico deterministico è caratterizzata esattamente dal fatto che, iterato nelle stesse condizioni iniziali (nel mondo fisico, dove la misura non è esatta e, per principio, è un intervallo), non ripercorre, in generale, la stessa traiettoria: per sensibilità alle condizioni iniziali, dopo poche oscillazioni ed a partire dallo stesso intervallo della miglior misura iniziale possibile, segue orbite molto diverse. La matematica del continuo ce lo dice, a priori. E per certuni, un processo fisico classico si dice aleatorio proprio quando, iterato nelle "stesse" condizioni iniziali (nel senso della Fisica), non percorre la stessa evoluzione. Cio' è estraneo alla teoria degli algoritmi, e solo artificialmente, chi ha capito, può imitare il fenomeno fisico: aggiungendo ad esempio, al momento di ogni riavvio dell'algoritmo, lo spostamento di un digit a destra o sinistra grazie all'aleatorio preso dal web (sono in numero pari o dispari gli utenti di Skype in questo momento?). Ma questo è una "imitazione", non una "modellizzazione", del processo fisico. Turing a riguardo, infatti, fa una finissima distinzione fra *imitazione*, il gioco descritto nell'articolo del 1950, e *modello* (1952): quest'ultimo non mira ad ingannare l'osservatore, come l'imitazione, ma a rendere intelligibile il processo fisico esaminato, proporre una struttura della determinazione. La sensibilità del doppio pendolo alla fluttuazione termica, ad esempio, non è resa intelligibile, dal punto di vista della "causalità", dall'uso di un qualche aleatorio di rete in una macchina a stati discreti, ma ne è ben imitata. Le equazioni differenziali del suo moto, un modello matematico, ne forniscono invece una determinazione formale, evidenziano le forze in gioco, permettono di analizzarne la divergenza delle traiettorie (la "deriva esponenziale", i cosiddetti coefficienti di Lyapounov).

Attenzione, non stiamo dicendo con questo che il mondo è continuo piuttosto che discreto. Esso è quello che è. Diciamo solo che la Matematica del continuo, sin dai tempi di Newton, permette di capire proprietà delle dinamiche fisiche che sfuggono a quella del discreto: l'inevitabile intervallo della misura fisica classica, con la possibile fluttuazione/ perturbazione al suo interno, è meglio colto nel continuo. In una teoria del digitale, al di sotto della discretizzazione proposta, non può succedere nulla, per principio... ed anche in pratica: l'iterazione funziona, guai se il file riaperto mille volte mancasse di una virgola! Ma la Matematica del discreto, a sua volta, implementata in macchine straordinariamente potenti, permette di analizzare processi che la trattazione matematico-concettuale non può assolutamente farci vedere, fornendoci quindi un altro tipo di intelligibilità, pure importantissima.

In breve, dal punto di vista fisico, una teoria degli algoritmi non parla, in modo fedele, del mondo, ma di un piccolo frammento di sistemi deterministici, quelli prevedibili, che, una volta trasferiti sul discreto, diventano tali anche se sono l'implementazione di equazioni o funzioni

non-lineari. Si può iterare in modo perfetto, contro la Fisica, anche la più selvaggia delle turbolenze. E non è vero che il discreto è una approssimazione del continuo. Gli analisti numerici sanno bene che ci vogliono teoremi difficili di “inseguimento” (shadowing, v. (Pilyugin, 1999)) per dimostrare che, nell’implementazione digitale di certe dinamiche caotiche, le traiettorie continue “inseguono” quelle discrete (e non viceversa). *Il discreto non è, in generale, una approssimazione del continuo, semmai, in questi casi, il contrario: una traiettoria data nel discreto può essere approssimata da una nel continuo.* Ed allora le immagini sullo schermo di una evoluzione caotica danno informazioni qualitativamente rilevanti delle traiettorie continue: forniscono imitazioni utilissime ed oggi indispensabili in scienza e nelle sue applicazioni. E la ricchezza della scienza e delle tecnologie, la varietà della storia, vuole che, da Lorentz in poi (soprattutto a partire dagli anni ’70), sugli schermi delle macchine digitali si apprezzi il caos come in nessun altro contesto. Il meteorologo può vedere e rivedere, iterandole se vuole in modo identico, simulazioni di turbolenze ed uragani. Gli è possibile così coglierne meglio gli aspetti che lo interessano e, sulla base della sua esperienza, fare previsioni sempre più attendibili.

In un senso ben preciso, quindi, ogni teoria algoritmica dell’Universo fisico è matematicamente “incompleta”, rispetto a descrizioni continue. Ed i teoremi citati più in alto, che correlano aleatorio classico ed algoritmico, lo dimostrano ulteriormente, per dualità (o contrapposizione, si diceva). Quindi, mentre il teorema di Gödel pone un limite ad ogni tentativo di riduzione meccanicista della deduzione matematica, le sue conseguenze (ne vedremo altre) sconfiggono anche le piatte visioni algoritmiche dell’universo dell’inerte; per non dire dello stato vivente della materia, cui appartiene il cervello ad esempio, dato che ci fanno capire che ci sono problemi persino nella... simulazione algoritmica di un doppio pendolo. Proprio per questo, quel teorema ha aperto la via a far meglio, dalla Teoria della Prova alla simulazione computazionale; e quest’ultima è, oggi, strumento principe per far scienza. Quanto al gioco continuo/discreto, persino all’interno dell’Informatica, le analisi delle reti di computers richiedono oggi un difficile uso di strumenti geometrici, nel continuo: sono infatti immerse nello spazio-tempo, anche di tipo relativistico, che capiamo meglio con l’uso del continuo (v., ad esempio, (Goubault, 2000) per un uso non banale della teoria dell’omotopia in teoria della concorrenza – reti di computers). Quanto al discreto della Meccanica Quantistica, che alcuni potrebbero invocare come discretizzazione ultima del mondo, i fenomeni di intricazione e non-separabilità sono l’opposto della separazione topologica propria alle basi di dati discrete, ove ogni punto è isolato, o ben separabile da tutti gli altri. Parliamone.

6. Einstein e la tesi dell’incompletezza della Meccanica Quantistica.

Einstein non era di certo estraneo al dibattito sui fondamenti della Matematica. In primo luogo, per la sua attiva collaborazione con Weyl a Zurigo. Questi, nel 1917-18, pubblica un libro sui fondamenti della Matematica (Il continuo) ed un altro, un vero pilastro, sui fondamenti matematici della Relatività (Tempo, Spazio, Materia). Quindi, le frequentazioni in Germania di Weyl, di nuovo, e di Hilbert ed il suo osservare, a distanza, la battaglia dei

fondamenti fra Hilbert e Brouwer; una battaglia che arrivò all'espulsione del secondo dal comitato di redazione della prestigiosissima rivista di Matematica diretta dal primo, esito ridicolo che indignò Einstein (una « batrachomiomachia » osservo, ricordando la commedia greca). Infine, le discussioni a Princeton con von Neumann, anche lui esule all'Institute for Advanced Studies dalla Germania nazista, come sarà Weyl dal 1933. Ed a von Neumann era ben noto il teorema di Gödel. Si dice anzi che, quando il 24enne Gödel presentò nel 1930 il suo risultato ad un convegno, von Neumann fosse l'unico fra i presenti a capirne la portata. E ne rimase sconvolto: formalista convinto, aveva lavorato al programma di Hilbert, come Ackermann e tanti altri, persuaso anche lui, ma per breve tempo, di aver ottenuto una prova finitisticamente accettabile della coerenza e della completezza dell'aritmetica. Matematico grande e rapidissimo, sentito il I teorema, derivò per suo conto la prova puramente formale del II. Ma quando ne informò Gödel, l'articolo di quest'ultimo, con entrambi i teoremi, era già in stampa. Von Neumann, quindi, non solo conosceva, ma aveva persino lavorato ai risultati di Gödel, al punto che, in uno dei suoi primi seminari, nell'autunno 1931, li presentò ai matematici e fisici di Princeton, v. (Sieg, 1994); fu poi seguito da Gödel stesso, temporaneamente all'Institute nel 1933-34¹². Negli anni seguenti, Von Neumann sviluppò il suo approccio iper-formale in diversi ambiti, dalle assiomatizzazioni della Meccanica Quantistica a quelle del Calcolo delle Probabilità e della Teoria dei Giochi, giochi formali di economia e di guerra.

Nel 1935, Einstein scrive con Podolski e Rosen, un articolo noto come EPR (le iniziali degli autori) in cui si pongono il problema della « correttezza » e « completezza » della Meccanica Quantistica (MQ). Questi termini sono propri alla Logica Matematica (li abbiamo usati) e non del tutto usuali in Fisica, soprattutto il secondo. E' più che plausibile quindi che gli autori non usino fortuitamente il termine di « non completezza » per parlare delle descrizioni della realtà fisica proposte dai formalismi quantistici: pensavano molto probabilmente di iterare il colpo alla Gödel contro Hilbert. Il paradigma gödeliano sarà comunque strumento di intelligibilità: per loro quasi sicuramente, per noi di certo. Si parla infine del “paradosso EPR”, evocando così l'uso del ragionamento per assurdo in Gödel, nonché la “paradossalità” della MQ (teoria che, in effetti, si pone spesso e veramente contro la “doxa”).

EPR inizia enunciando, con grande chiarezza, il presupposto ontologico di tutta la riflessione: anche in microfisica, deve esistere una realtà fisica indipendente della misura e dalla teoria. La prima, al più, può « disturbare » la quantità fisica misurata. Quanto alla teoria, l'esigenza di *correttezza* è evidente: una teoria « soddisfacente » deve derivare solo asserti veri. Perché poi sia *completa* « ogni elemento della realtà fisica deve avere una controparte nella teoria fisica », ovvero deve essere descritto o dedotto dalla teoria. Si riconosce una esigenza di correttezza e completezza “semantica”, dicevamo in Logica, nonché una lettura ontologizzante di tali proprietà. L'interpretazione semantica classica del teorema di Gödel dice appunto che l'asserto vero, G, è già lì, nella struttura, insieme a tutti gli altri asserti veri, ma che la teoria formale, AP si ricordi, non consente di dedurlo. EPR aspira ad una teoria completa rispetto ad una realtà fisica che, anche in microfisica, deve “esser già lì”, ben

¹² Gödel vi si trasferirà definitivamente nel 1939, dopo una rocambolesca fuga dall'Austria invasa.

separata dal soggetto conoscente. E dimostra, nell'ipotesi ontologica fatta, che l'attuale MQ non lo è. Gli argomenti addotti da EPR riguardano diversi aspetti fondamentali della MQ, fra cui quelli noti come "indeterminazione" e "intricazione".

L'*indeterminazione* quantistica può essere descritta in termini di non-commutatività della misura della posizione e del momento di una particella. Secondo la teoria, i valori ottenuti *dipendono dall'ordine* in cui vengono fatte tali misure, quindi « non si può parlare della quantità fisica A [o B] che assume un particolare valore », scrive EPR. Ovvero, « se A e B non commutano, cioè se $AB \neq BA$, allora la conoscenza precisa dell'una preclude questa conoscenza per l'altra¹³ ». Quindi, continua EPR, le due quantità fisiche, posizione e momento, « non possono avere una realtà simultanea » ed almeno un elemento di realtà non è descritto dalla teoria: « se la funzione d'onda fornisse una tale descrizione completa della realtà, conterrebbe questi valori; essi sarebbero allora predittibili ».

Quanto all'*intricazione*, EPR la deriva da una osservazione che risulterà fondamentale. Dal formalismo quantistico (l'equazione di Schrödinger, in particolare) si deduce che se due sistemi hanno interagito ad un istante $t = 0$ e risultano poi separati, senza più alcuna interazione fra loro all'istante $t = T > 0$, si può, misurando solo uno di essi, conoscere con certezza il valore di una stessa misura sull'altro, all'istante T. Due particelle "intricate", si dirà poi, permettono una conoscenza istantanea del valore di una misura fatta sull'una grazie alla misura fatta sull'altra. Se la prima ha lo spin "up", per dire, si è certi, che lo spin dell'altra è "down", *se misurato*. Iterando lo stesso identico processo, si può ottenere spin "down" per la prima: allora la seconda avrà spin "up". Propagazione di informazione istantanea, supra-luminosa? Questo è impossibile, sarebbe contro la Relatività. La spiegazione teorica è incompleta, dice EPR.

In sintesi, EPR rimprovera, come incompletezza, una proprietà fondamentale propria al gioco fra teoria e misura in MQ: *quel che si calcola*, con la funzione d'onda (l'equazione di Schrödinger), *non è quel che si misura*. In fisica classica e relativistica si fanno calcoli su numeri reali, che risultano da misure, calcoli che producono a loro volta numeri reali, da verificare con nuove misure. In MQ, si calcola su numeri complessi, in spazi di Hilbert molto astratti, anche di infinite dimensioni, fuori quindi dallo spazio-tempo usuale, per poi produrre dei numeri reali, come proiezioni (valori assoluti) dei numeri complessi ottenuti con il calcolo. Tali valori sono la probabilità di ottenere certi risultati nel processo di misura e, nel verificarli con la misura, da una parte risultano dipendere dall'ordine della stessa (non commutatività), dall'altra possono essere correlati se relativi a particelle intricate (o in uno "stato EPR", dicono ancor oggi i fisici).

Ancora di recente le teorie "a variabili nascoste" hanno cercato di colmare (completare) le presunte lacune della MQ, ovvero la sua incompletezza. Prevale tuttavia la "interpretazione standard" che sottolinea l'originalità della costruzione di conoscenza in MQ. La misura è co-constitutiva dell'oggetto fisico: non c'è già una particella che viaggia con le sue proprietà e stati "già dati" e che, al più, si disturba con la misura. Se si lancia un "fotone" contro una

¹³ La differenza fra AB e BA è data dalla costante h di Planck.

doppia fessura e se ne misura con un interferometro l'effetto su un muro al di là delle fessure, si osserva una interferenza, ovvero un tipico comportamento ondulatorio. Se invece si pone un contatore di particelle dietro ciascuna delle due fessure, si "osserverà" una particella che passa il 50% delle volte da una parte e il 50% dall'altra. L'azione della misura, conseguenza di tutto un quadro teorico, dà la specificazione dell'oggetto. Il *concetto scientifico* di fotone *isola* un frammento di Universo che si specifica nell'atto teorico e pratico della *sua stessa produzione* e delle *misura*: un'onda od una particella.

Così, l'equazione di Schrödinger permette di calcolare l'evoluzione di un sistema di particelle intricate e fornisce dei valori "correlati" di probabilità, per eventuali misure. In breve, se si lanciano due monete classiche in aria e queste interagiscono (si toccano, per dire) per poi separarsi definitivamente, le analisi probabilistiche dei valori testa-croce assunti dalle due monete sono del tutto indipendenti. Le equazioni di Bell (1964) e le esperienze di Aspect (1982) hanno dimostrato, invece, che le misure (valori di probabilità) di due quanta intricati (che abbiano cioè interagito) sono correlate, non indipendenti. Conoscendo una misura si conosce l'altra, anche effettuata ad enormi distanze. Non passa "informazione" fra i due eventi distanti: bisogna telefonarsi il risultato per controllare che le due misure sono in effetti intricate. Ma lo sono sempre. Questo fatto, di certo straordinario (paradossale) ed ormai verificato empiricamente decine di volte, è all'origine di riflessioni teoriche molto interessanti e che potranno avere una importante conseguenza pratica, il Quantum Computing. Tale "calcolo" potrebbe rivoluzionare tutto il calcolo automatico: quanto meno, problemi intrattabili per complessità, diverrebbero trattabilissimi, poiché l'intricazione è una (originalissima) forma di "calcolo parallelo". Ma calcolo di cosa? non di informazione digitale come comunemente intesa, bensì l'evoluzione di un sistema che è globale: le due particelle sono non-separabili, dalla misura, ed una variabile associata all'oggetto sarebbe non-locale (non dipenderebbe dall'evoluzione di "un solo punto"). Assurdità, per la fisica classica e relativistica, che EPR deriva dalla teoria e che, poi, sono state empiricamente verificate. Come si diceva, il mondo non è fatto di quadratini o puntini, bits e bytes classici, ben separabili fra loro dall'unica forma di accesso che abbiamo ad esso: quell'attività costitutiva di oggetti ed oggettività scientifica, nella frizione fra noi ed il mondo, che è la misura (sensoriale, strumentale).

Si osservi, infine, che qui non si è detto che la MQ è completa, ma solo che la prova fornita da EPR dalla sua incompletezza non è teoricamente valida né empiricamente corroborata: si basa su premesse ontologizzanti inadeguate alla microfisica e indica come impossibile una situazione sperimentalmente dimostrata poi possibile (e molto interessante). Einstein aveva torto, ma con l'osservare, in particolare, che "la MQ è incompleta, poiché dal suo assetto teorico-matematico si deduce l'intricazione" ha aperto la via a ricerche ed esperienze, prima, ed a possibili macchine, poi, di grande rilievo¹⁴.

¹⁴ La deduzione in EPR ricorda indirettamente una di Aristotele: « il vuoto è impossibile, poiché in esso i corpi cadrebbero tutti alla stessa velocità » (Fisica, vol. 4, cap. 8; osservazione e comunicazione personale di Imre Toth). Questi grandissimi, anche quando sbagliano, possono proporre idee molto interessanti.

7. L'incompletezza matematica delle teorie formali.

Dopo il grande teorema di Gödel, la contrapposizione fra le diverse scuole di fondamenti della Matematica si andò accentuando. E Federigo Enriques, nel '35, a Parigi, lo disse con lucidità: « ... se ci si guarda dalla Scilla dell'ontologismo, si cade nella Cariddi del nominalismo: un sistema di segni vuoto e tautologico potrebbe soddisfare la nostra ragione scientifica? Da entrambe le parti vedo sorgere davanti a noi lo spettro di una nuova scolastica » in (Enriques, 1983). Da una parte l'invocazione dell'eterna e pre-esistente "verità", certa perché assoluta, che « il matematico scopre guardando sopra la spalla di Dio » (Barrow). Dall'altra l'insistenza sulla certezza matematica basata nell'assenza delle ambiguità del senso, sulla meccanicità della deduzione e ... perché no? del ragionamento tutto, e dell'umanità nostra quindi, del tutto trasportabile su una adeguata Macchina Logico-Aritmetica, fino ai famosi cervelloni della Intelligenza Artificiale degli anni '60 e '70. In effetti, diranno i formalisti (i nominalisti) per decenni, il teorema di Gödel dimostra l'indipendenza di un asserto del tutto artificioso. Paradosso astuto, tirato per i capelli, non ha rilievo per la deduzione matematica interessante, ancor meno per il ragionamento umano. Invece il teorema di Gödel è solo l'inizio di una valanga di asserti formali indimostrabili, alcuni dei quali molto interessanti. Ovvero, asserti *del'Aritmetica* con significato e di interesse matematico e dimostrabili solo con ragionamenti più potenti del finitismo formalista. In essi, si cercherà ora di spiegare, ad un certo punto, per passare da una linea ad un'altra dalle prova, bisogna invocare il tanto temuto "senso".

Per rimanere prima nella Logica, ricordiamo che ben presto Gentzen (1935) darà una prova di coerenza dell'aritmetica usando l'induzione transfinita; risultato che inaugurerà la Teoria della Dimostrazione moderna, nella sua forma di "analisi ordinale". In breve, dimostrerà la coerenza di AP per induzione transfinita su una classe ristretta di formule (grossolatamente: un'induzione con un'infinità di ipotesi, fino all'ordinale ε_0 , un "piccolo" infinito, ma abbastanza grande da risolvere l'equazione $x = \omega^x$, dove ω è l'infinito dei numeri interi). La restrizione a certe formule ed il rigore della prova, in un quadro originale, detto di "deduzione naturale", renderà convincente l'argomento, ovviamente non formalizzabile in AP. Nel 1958, Gödel stesso darà una prova della coerenza di AP, in un sistema "stratificato" (numeri, poi funzioni sui numeri ecc..., il λ -calcolo con i tipi). Notiamo solo che tale prova verrà estesa, in modo non ovvio, da J.-Y. Girard (1970) ad un calcolo dei tipi impredicativo, basato su una quantificazione (il dire "per ogni...") del second'ordine, ovvero una quantificazione su insiemi (AP è del prim'ordine: si quantifica solo su variabili di numeri), (Girard et al., 1990); calcolo di gran successo in ... Informatica dove è usato per introdurre una forte forma di modularità in programmazione. Ovviamente, anche in questo caso, l'effettività del calcolo convive con l'indimostrabilità formale della sua coerenza, la cui prova è formalizzabile solo in Aritmetica del terzo ordine (insiemi di insiemi) ed implica quella di AP. Con Gentzen inizia l'uso di ordinali (infiniti) sempre più grandi per dar prove infinitarie di coerenza di teorie sempre più espressive; con Gödel e Girard si passa ad ordini superiori, in quanto quantificazione su insiemi o tipi infiniti.

Per salvare quindi la teoria paradigmatica del finito, AP, è necessario ricorrere a qualche forma di infinito; questo è un concetto difficile, ma onnipresente in Matematica. Si pensi alla nascita del calcolo infinitesimale ed alle nozioni associate di velocità ed accelerazione

istantanee, essenziali alla Fisica post-newtoniana ed ottenute come limite infinito di approssimazioni finite. Od alla geometria proiettiva, nata nel '400 pittorico italiano, nelle Annunciazioni in particolare, dove l'infinito divino, il punto prospettico, laggiù, in fondo al quadro, rende più umano lo spazio al finito. *Con l'infinito, in Matematica, si capisce meglio il finito*. E la Teoria degli Insiemi lo dimostra: per formalizzare il concetto di "finito", bisogna dare un assioma d'esistenza dell'infinito (in AP, è impossibile isolare formalmente i numeri standard, finiti, ovvero definire "finito"). Insomma, con buona pace dei formalisti finitisti, il finito e l'infinito, come concetti matematici, sono formalmente "intricati", inseparabili: se si vuole catturare formalmente il finito, bisogna maneggiare il concetto di infinito.

Nel 1978, Paris ed Harrington pubblicano un asserto combinatorio, sempre ispirato dalla Logica, ma non artificiale, ovvero un enunciato matematicamente "sensato" (G di Gödel, dicono tanti, non lo è), formalizzabile in AP e senza apparenti correlazioni con la coerenza, formalizzata come $Coer \equiv \neg Theor(0=1)$ nel §.4. Da tale enunciato si può derivare *Coer*, in AP, ed è quindi indimostrabile in AP. Ma se ne può dare una prova, al di fuori di AP, con l'induzione transfinita alla Gentzen. Il parlare di un altro risultato, analogo, ma ancora più interessante, consentirà in realtà, implicitamente, di dire qualcosa anche sulla prova dell'asserto di Paris ed Harrington, che non è dissimile.

In una nota mai pubblicata, H. Friedman, nel 1981, dà una versione finita, formalizzabile in aritmetica, di un noto teorema sugli alberi finiti. Gli alberi, che in Matematica crescono all'ingiù, sono strutture ben familiari ed utili, dalle mille applicazioni. In particolare, il teorema di Kruskal (1960), che Friedman "miniaturizza", dimostra una proprietà molto utilizzata, in informatica matematica in particolare (problemi di terminazione in sistemi di calcolo formale o "riscrittura").

Accenniamo in breve ai due enunciati. L'*immersione* fra due alberi, $T_1 \leq T_2$, è definita in modo ovvio: una funzione iniettiva che preservi l'ordine dei nodi (un albero è un ordine parziale fra i nodi, con un minimo o radice). Allora il teorema in (Kruskal, 1960) si enuncia:

"Per ogni sequenza infinita $\{T_n\}_{n \in \omega}$ di alberi finiti, esistono i e k tali che $i < k$ e $T_i \leq T_k$ ".

Attenzione, il fatto non è ovvio: si può pensare di dare una sequenza infinita di alberi in modo così astuto che mai uno sia "estensione" di un albero precedentemente messo nella sequenza. Il teorema dice che ciò è impossibile: le sequenze infinite di alberi non possono essere del tutto disordinate (tutti gli alberi incomparabili), né possono contenere sequenze discendenti infinite (e questo consente di dare i risultati di terminazione menzionati). La Forma Finita di Friedman (*FFF*), è allora:

"Per ogni n , esiste un m tale che per ogni sequenza finita di alberi finiti T_0, T_1, \dots, T_m tale che, per ogni $j \leq m$, T_j abbia al più $n(j+1)$ nodi, esistono i e k tali che $i < k \leq m$ e $T_i \leq T_k$ ".

In un certo senso, *FFF* "rende al finito" l'enunciato infinitario di Kruskal (che parla di sequenze infinite di alberi finiti): *FFF* dà, per ogni n , la lunghezza m della sequenza finita entro cui si trovano due alberi comparabili. Il lettore può capire facilmente che *FFF* è

formalizzabile in AP: un “per ogni n , esiste m tale che (...)” dove “(...)” è una proprietà codificabile in AP (gli alberi finiti sono facilmente gödelizzabili) e decidibile (fissati n ed m). Ora, la funzione, che ad n associa m , è calcolabile, ma cresce così rapidamente da superare definitivamente ogni funzione ricorsiva dimostrabilmente totale in AP (ed anche in sue forti estensioni). Questo è uno dei modi per dimostrarne l’indimostrabilità di FFF in AP. Friedman, immergendo gli alberi negli ordinali transfiniti e, grazie all’assenza di sequenze infinite discendenti (v. sopra, per induzione transfinita quindi), dimostra che FFF implica $Coer$, in AP, ed è quindi formalmente indimostrabile, per il II teorema di incompletezza di Gödel (l’indimostrabilità di $Coer$). Con l’una o l’altra tecnica, la prova dell’indimostrabilità è un sorprendente tour-de-force logico-matematico, cui, poco dopo la diffusione della nota di Friedman, è stato dedicato un intero libro (Harrington et al., 1985), v. anche (Gallier, 1991).

La prima osservazione da fare è che molte delle applicazioni del teorema di Kruskal seguono pure dalla versione aritmetica di Friedman. Essa è quindi ben lungi dall’essere un calembour artificioso: è vera Matematica. Eppure sia FFF sia la sua negazione sono formalmente indimostrabili: per questo abbiamo intitolato la sezione alla *incompletezza matematica* dei formalismi, cosa illecita se si pensa al solo asserto “logico-antinomico” G di Gödel, molto poco “matematico”. Così, per dimostrare l’indimostrabilità della negazione, non si può che dimostrare qualcosa di più forte, il suo esser vera sui numeri interi: è Matematica appunto, non solo Logica. Come si dimostra che FFF vale su tale struttura? Ovviamente, non si può fare per induzione formale finita, ovvero per induzione in AP, a causa della sua indimostrabilità. Le prove date da Friedman e nel volume menzionato, usano l’induzione in un modo del tutto usuale per i matematici che non si occupano di fondamenti.

7.1 Verso i fondamenti cognitivi dell’induzione.

Per spiegare e, forse, giustificare, tale uso, assumeremo qui una posizione epistemologicamente forte, che sviluppa il riferimento di Riemann ai fondamenti della Matematica come « genealogia di concetti », le riflessioni di Poincaré sul ruolo dell’azione nello spazio per la costituzione dei concetti matematici, quelle non lontane ed altrettanto stimolanti di Enriques sulle diverse forme di accesso sensoriale allo spazio, l’unità del pensiero di Weyl riguardo le simmetrie come principi di costruzione concettuale, in Fisica ed in Matematica. Questi grandi geometri, oppositori del formalismo, hanno aperto, in modo molto preliminare ed incompiuto, piste di riflessione fondazionale di natura prettamente epistemologica, che oggi alcuni riprendono in termini cognitivi, relativamente generali e scientifici, al di là cioè dell’introspezione, solo strumento di indagine all’epoca (si vedano i libri di Berthoz e Dehaene, del 1997, e le riflessioni successive di chi scrive). Si potrà allora capire l’incompletezza dei formalismi come insufficienza dei “principi di prova” (di cui l’induzione formale è il paradigma) a catturare i “principi di costruzione” (buon ordine e simmetrie, in primis), questi ultimi per di più condivisi con la costruzione teorica in Fisica - a differenza dei principi di prova che differiscono nelle due discipline, v. (Bailly et al., 2006).

Dice e scrive il matematico ogni giorno: se tale insieme di numeri interi, comunque io l’abbia definito, è non vuoto, allora ha un più piccolo elemento. Il lettore vede, speriamo, la sequenza

dei numeri interi, ben ordinati, da sinistra a destra (per noi che scriviamo in questa direzione; per gli arabi è il contrario). La guardi attentamente, in testa, crescere senza fine verso l'orizzonte, più che sul foglio: 1, 2, 3, 4 Se in essa isola concettualmente un insieme non vuoto, che contenga cioè almeno un elemento, osserverà che di certo tale insieme ne contiene uno minimo, male che vada lo 0 (la sequenza è discreta e senza sequenze discendenti infinite – *ben ordinata*, si dice tecnicamente). Pratica comune dell'intuizione numerica, vietata al formalista poiché geometrica ed evocatrice di “senso”. Il senso come atto del contare qualcosa, che è un gesto ricco di significato, dell'ordinare, dello scrivere, del movimento iterato verso l'orizzonte; il senso del fluire discreto del tempo (Brouwer). Origine delle pratiche umane, e pre-umane per quanto riguarda i piccoli numeri (Dehaene, 1997), del mettere insieme quantità numerabili. Senso radicato in gesti antichissimi e, per questo, solidissimi. Ad essi il linguaggio e la scrittura han dato l'oggettività della intersoggettività, la stabilità della notazione comune, l'indipendenza dagli oggetti numerati. Ovvero, il numero ed il suo ordine sono invarianti concettuali che han senso per la loro indipendenza costruita rispetto una pluralità di pratiche. Iterando nello spazio, grazie anche al linguaggio ed alla scrittura, si costruisce quella sequenza discreta e crescente cui il matematico applica senza problemi il principio astratto del “buon ordine”, perchè ricco di significato geometrico: un insieme non vuoto di numeri interi ha un più piccolo elemento. Il matematico fa riferimento a tale struttura significativa, evocatrice d'ordine nello spazio, ogni giorno, magari anche per costruire un'assiomatica formale, come Peano od Hilbert, come ultimo passo di una costruzione di invarianza, di indipendenza. Ma quest'ultimo passo, la formalizzazione, non permette un completo distacco della dimostrazione dal senso, *dello spazio e nello spazio*, costituito in quella genealogia di concetti che è dietro tutta la costruzione matematica¹⁵. Questo è il significato dell'incompletezza *matematica* dei sistemi formali: i principi di prova (formali) non hanno l'espressività dei principi di costruzione (ordine e simmetrie), che han prodotto le strutture concettuali della matematica¹⁶.

Così, anche matematici filosoficamente immersi o prossimi al formalismo, nel volume del 1985 e dopo, dimostrano la validità dell'enunciato di Friedman, invocando, in modo iterato, ma ben individuabile, il principio del “buon ordine”: con tranquilla certezza passano, ad un certo punto del ragionamento, da una riga ad un'altra, osservando che un certo insieme di interi, non vuoto, definito nella dimostrazione, possiede un più piccolo elemento. E queste prove sono perfettamente rigorose, fondate su una pratica cognitiva delle più solide: l'invarianza e stabilità concettuale del buon ordine proprio alla gestalt discreta della successione dei numeri interi. E, contrariamente a tante formalizzazioni, non generano contraddizioni. Poi, certo, altri hanno fatto un'analisi fine della prova, dato che non è formalizzabile in AP. Ed han dimostrato che l'insieme usato nel buon ordine sfugge alla formalizzazione finitista, perché fa un uso implicito di una quantificazione infinita (su

¹⁵ « L'evidenza originaria non può essere scambiata con l'evidenza degli assiomi, poiché gli assiomi sono già il risultato di una formazione di senso ed hanno sempre questa formazione di senso dietro di loro» (Husserl, 1933).

¹⁶ Per dettagli tecnici sull'ordine e le simmetrie nelle dimostrazioni qui evocate, v. (Longo, 2002).

insiemi, \sum_1^1 tecnicamente, v. (Rathjen et al., 1993)). Provano quindi l'enunciato di Friedman usando una induzione su un ordinale transfinito immenso, molto più grande di quello proposto da Gentzen e definibile con una costruzione di grande difficoltà. Alcuni giustificano l'audacia infinitaria, osservando che quell'insieme che si dice non vuoto, lo è solo come ipotesi di una prova per assurdo. Poi, scomparirà, perché, appunto, generatore di un assurdo, ovvero... risulterà vuoto. Eppure, questa deviazione per l'infinito è essenziale, dato che l'asserto è dimostrabilmente indimostrabile in modo finitario.

Ma allora, tutta questa fatica è stata inutile? Alla coerenza dell'aritmetica potevano credere pure i greci che "vedevano" la sequenza potenziamente infinita e ben ordinata dei numeri, fra cui, sparsi, i numeri primi; il teorema di Gödel è un calembour senza senso matematico; gli enunciati matematicamente sensati e formalmente indecidibili, si dimostrano con insiemi presunti infiniti e non definibili in AP, che poi si buttan via perché vuoti Oh, no, questo percorso è stato richissimo in sé e per le sue ricadute. Solo per quel che riguarda il gioco fra finito ed infinito dei numeri, dello spazio, esso percorre tutta la Matematica. Comincia con l'uso dell'infinito potenziale in Euclide, in quanto apeiron (senza-limite). Passa per la chiarificazione di Aristotele, specificata meglio dalla scuola tomista, solita a maneggiare il difficile e controverso infinito del Dio cristiano: con essa, si distingue con chiarezza l'infinito in potenza da quello in atto, proprio a Dio. E la geometria proiettiva, si diceva, prima conseguenza matematica della pratica dell'infinito in atto, seguita dal calcolo infinitesimale, regno dell'infinito, entrambi con immensi sviluppi ed applicazioni. Bisognava chiarire allora *come* si fan dimostrazioni, in particolare quando si usa questo concetto limite, in particolare dopo il marasma geniale della Matematica dell'800; *come* si danno definizioni con rigore, dopo un secolo di tanta Matematica, spesso molto poco rigorosa. I sistemi formali sono incompleti, ma sono lunghi dall'essere inutili: ci hanno insegnato a dare buone definizioni, a generalizzare con rigore, ad unificare metodi e prove grazie al metodo assiomatico L'errore semmai era nel pensare di poter fare a meno del senso, per esser perfettamente, meccanicamente, rigorosi; di poter evitare ogni riferimento all'azione nello spazio e nel tempo, luoghi costitutivi della Matematica, anche quella dei numeri interi. Ma così, abbiamo detto, per dimostrare che ci sono enunciati indecidibili, si è dovuto specificare cosa si intende per decidibile o calcolabile in modo meccanicamente certo, e porre le basi matematiche, con Gödel e Turing, dell'Informatica. Ed alla fine, si è ricondotti, ma con un grande bagaglio, a quel senso dello spazio e dell'azione in esso, alla sua « ... geometria, generata nel nostro spazio di umanità a partire da una attività umana» (Husserl, 1933)¹⁷.

¹⁷ La data a cui si ascrive il manoscritto di Husserl ricorda che quasi tutta la vicenda che abbiamo raccontato si svolge nel primo drammatico scorcio di secolo, con il 1933 anno di svolta: l'avvento del nazismo e la partenza dalla Germania di tanti dei personaggi incontrati. In quell'anno, al 74enne Husserl fu vietato pubblicare e persino l'accesso alla biblioteca dell'Università. Ed il ritrovare più volte alcuni illustri nomi, fa venire in mente un'altra grande/piccola storia accademica/politica. Nel 1923, Einstein, che aveva da poco tempo avuto il premio Nobel, era interessato a tornare in Italia anche per un lungo periodo, dopo un breve soggiorno a Bologna. Conosceva bene i risultati di Levi-Civita ed era in contatto con molti colleghi, fra cui Volterra ed Enriques. Quest'ultimo, solito da molti anni ai corridoi ministeriali, riuscì a farsi ricevere dal capo del governo, Benito Mussolini: sperava di

8. L'informazione e le codifiche nella cellula.

« Paragonando le strutture delle fibre cromosomiche al testo di un codice, si vuol significare che la mente universale, di cui parla Laplace, potrebbe dire dalla loro struttura se dall'uovo si svilupperà un gallo nero od una gallina maculata, una mosca od una pianta di granoturco...» scrive Schrödinger, nel 1944, nell'esilio i

compongono il DNA, inteso come « programma del computer comportamentale di ogni individuo» (E. Mayr, 1961; Mayr per altro si oppose tutta la vita al preteso ruolo centrale dei geni nell'evoluzione). O, quando si dice che il DNA « contiene tutta l'informazione necessaria per la riproduzione della cellula» e dell'intero organismo (Crick, 1966).

Così, l'ipotesi « un gene – una proteina » (Beadle et al., 1941) e, poi, il « dogma centrale della biologia molecolare » (l'informazione passa sequenzialmente e unidirezionalmente dal DNA all'RNA alle proteine e, quindi struttura l'organismo, (Crick, 1958)), sono di tipo laplaciano, per la struttura della determinazione che suggeriscono: il DNA è causalmente completo, c'è tutto in esso, e l'informazione si propaga, in modo lineare ed unidirezionale, a partire da esso (un “gene – una proteina” ed il “dogma”). La prima ipotesi, ritenuta valida per oltre cinquant'anni, è stata poi dimostrata falsa, il secondo impregna ancora la ricerca in biologia molecolare, benché, da pochi anni, sia negato dai più, siapud sottovoce. Non è qui il caso di andar oltre questi cenni, che vogliono solo aprire un confronto con pratiche scientifiche in discipline giovani e di grandissimo rilievo, quali la biologia molecolare, v. ad esempio (Fox Keller, 2000). Osserviamo solo che, quelle ipotesi e dogmi così a lungo portanti di tanto lavoro e che pretendono essere “fisicaliste”, “materialiste”, sembrano non tener conto di quanto è avvenuto in Fisica, (Longo et al., 2007). Da Poincaré abbiamo capito che, in presenza di semplici interazioni (solo tre corpi celesti!), la situazione iniziale misurabile non contiene “tutta l'informazione” (per usare una espressione altamente impropria) sulle traiettorie future, se con esse si intende, come sembra, la “completa determinazione” sull'evoluzione del *sistema*. E rimane laplaciana una concezione che aggiunge alla “necessità” qualche frammento di “caso”, ben distinto dalla prima, come fa Monod nel 1973 (Poincaré aveva integrato i due). Una necessità, che, proprio in quanto laplaciana, risulta programmabile (la teoria del « programma genetico »). Od ancora, si sembra trascurare, in ipotesi e dogmi sulle cascate molecolari sequenziali, che la Fisica del '900, dopo la Relatività, vede l'Universo come un tessuto di interazioni: *se si modificano le interazioni, si deforma il tessuto ed il suo spazio, se si agisce sullo spazio e sul suo tessuto, si modificano le interazioni*. Il dogma centrale è estraneo a tale visione delle interazioni costitutive di una unità, propria alla fisica contemporanea, e questo per parlare, si noti, di molecole all'interno di una struttura, la cellula, l'organismo, ove quasi tutto è correlato a quasi tutto.

Il DNA è di certo la componente più importante della cellula, ma le analisi del vivente che si basano solo su di esso e le cascate molecolari che ne seguono, sono incomplete, in un senso che non si può certo precisare in un teorema, ma che la Fisica stessa ci suggerisce. Quando lo si vede descritto come “il libro in cui è scritta l'essenza della vita”, si realizza che il mito alfabetico governa ancora parte della scienza: mito nel senso greco, positivo, di costruttore forte di conoscenza, ma che richiede revisioni continue ed una messa in evidenza dei suoi limiti. Da Democrito che suddivide il mondo in atomi, associandoli a lettere dell'alfabeto, a Descartes per cui la certezza si ottiene scomponendo il ragionamento in componenti elementari e semplici, a Laplace ed Hilbert, si diceva, l'intelligibilità certa deve far sempre riferimento all'elementare e semplice, atomico, alfabetico. Il modello della ricostruzione alfabetica, discreta ed elementare, del canto continuo del linguaggio presiede da millenni, con

straordinaria produttività, alla nostra scienza: vogliamo capire tutto in questo modo. Così, pensiamo da millenni, come il linguaggio con la scrittura alfabetica, anche nella conoscenza tutta noi possiamo ricostruire il mondo proiettando in esso le lettere, strutture materiali della determinazione completa, fisica, logica, biologica (atomi, sequenze di segni di un formalismo, lettere delle basi del DNA). Ovvero, segni discreti e lettere permettono di esprimere tutto il dicibile, *quindi* tutto il pensabile: allora, anche in Matematica, Fisica e Biologia, segni e loro sequenze discrete (codifiche formali) contengono la determinazione completa delle evoluzioni, ad ogni livello di fenomeni.

Ora, van messi invece in evidenza la forza ed i limiti, l'incompletezza a dir poco, di questa visione della conoscenza, da confrontare ad esempio, per un mutuo arricchimento, alle tendenze olistiche delle culture ideogrammatiche. Perché anche l'immagine che si propone in questo modo del linguaggio, come strumento di comunicazione umana, è ben incompleta. Si dimentica infatti che il "compilatore" od "interprete" del linguaggio umano è il suono, composizione di fonemi: il senso è nel parlato-cantato e nella sua espressività. Bisogna leggere, producendo un suono, magari in silenzio, in testa, per ritrovare il senso, proprio come il musicista *sente* la musica, la "interpreta", leggendo lo spartito, altra scrittura alfabetica di un continuo musicale (scrittura però bidimensionale ed arricchita di grafie e segni di continuità). Così il contesto, anche linguistico e scritto, poi il tono, il gesto, il disegno, contribuiscono in modo essenziale all'espressione ed alla comprensione, cioè al significato. Inoltre, una smorfia, un sorriso, una carezza, un pugno, il fare all'amore, permettono di dire altro, contribuiscono all'espressività umana, al pensabile, in modo essenziale, *oltre e con* le sequenze di segni alfabetici. E persino il senso nello spazio del buon ordine dei numeri fa parte della prova matematica e, diciamo noi fermamente anti-formalisti, del suo fondamento, in senso epistemologico, *con*, ma *oltre* i sistemi formali, dimostrabilmente incompleti.

E così, per tornare alla Biologia, si sta gradualmente uscendo dal mito alfabetico, purtroppo ancora finanziato in priorità, che la stabilità e l'organizzazione del DNA e delle cascate molecolari che ne seguono determinano completamente la stabilità e l'organizzazione della cellula e dell'organismo. Questo mito è falso, poiché la stabilità e l'organizzazione, fisica e biologica, della cellula e dell'organismo contribuiscono causalmente alla stabilità ed all'organizzazione del DNA e delle cascate molecolari che ne seguono. Una circolarità? Siamo abituati a questa sfida: si ricordi quel che Gödel ha fatto con una circolarità finissima, lontano dai timori dei logicisti. Il problema del "come ha iniziato", dell'origine della vita, rimane enorme comunque: senza membrana, senza cellula, nessun ciclo metabolico di rilievo si costituisce ed ancor meno si mantiene nel tempo. Come l'incompletezza gödeliana ci ha fatto capire per la Matematica rispetto ai sistemi formali, estensioni proprie (e consistenti) delle teorie molecolari sembrano necessarie per dire qualcosa in più sulla singolarità fisica dello stato vivente della materia (Buiatti, 2000; Longo, 2009).

Concludiamo questa trattazione ponendoci delle domande, evidenziando delle sfide generali. Ma perché mai il fondamentale dovrebbe essere sempre "l'elementare"? Le teorie della gravitazione e dell'inerzia di Galileo non dicono nulla sugli atomi di Democrito che componevano pure i sui gravi, eppure sono teorie fondamentali. Einstein, unificando inerzia e gravitazione ha proposto un'altra teoria, il campo relativistico, pure fondamentale, senza dir

nulla dei quanta. Certo, il problema dell'unificazione con il campo quantistico si pone. Ma, attenzione, *unificazione* dicono i fisici, non riduzione: si tratta di mettere in prospettiva teorie fondamentali, modificandole entrambe, verso una sintesi da inventare. Forse i progressi maggiori sono oggi fatti ricostruendo, a partire dalla misura quantistica, la geometria dello spazio e del tempo (la "geometria non-commutativa" di A. Connes).

Ed infine, perché mai l'elementare dovrebbe sempre essere semplice, trasponendo nei fenomeni il metodo cartesiano? Due frontiere del sapere contemporaneo, la microfisica e le analisi del vivente, sembrano aver bisogno di uno sguardo diverso: le loro componenti elementari, i quanta e la cellula (che è elementare, atomica, perché se tagliata, non è più viva), sono molto complesse. La loro intelligibilità richiede sguardi "non-locali", per riprendere la terminologia quantistica, od analisi sistemiche, si dice sempre più oggi in Biologia, ben oltre la pretesa completezza causale del DNA ed i miti, dalla Matematica e la Fisica alle analisi della cognizione umana, della completezza dei formalismi alfabetici.

Riferimenti

(altri testi, un corso *video registrato*, tenuto all'ENS dall'autore nel 2010 e di cui questo testo è una introduzione, nonché dispense ed ulteriori riferimenti in: <http://www.di.ens.fr/users/longo>)

Aspect A., Grangier P. and Roger G., "Experimental Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities", **Phys. Rev. Let.** **49**, p. 91, 1982.

Beadle G. W., Tatum E. L., "Genetic Control of Developmental Reactions", **American Naturalist**, **75**, 107-116, 1941.

Bailly F., Longo G., **Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant**, Hermann, Paris, 2006. (*Versione inglese in stampa*, Imperial College Press/World Scientific, 2010)

Bailly F., Longo G. "Biological Organization and Anti-Entropy", **J. Biological Systems**, Vol. 17, No. 1, 2009.

Barrow-Green J. **Poincaré and the three body Problem**, AMS, 1997.

Bell J.S., "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox", **Physics** **1**, p.195, 1964.

Beguin F. "Le mémoire de Poincaré pour le prix du Roi Oscar", in **L'héritage scientifique de Poincaré**, Charpentier et al. eds, Belin, Paris, 2006.

Berthoz A. **Le sens du mouvement**, Odile Jacob, Paris, 1997 (trad. italiana McGraw-Hill, 1998).

Bottazzini U., **Poincaré**, Le Scienze, 1999.

Buiatti M. **Lo stato vivente della materia. Le frontiere della nuova biologia**, UTET, 2000.

Calude C. **Information and randomness**. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2002.

Charpentier E., Ghys E., Lesne A. (eds.) **L'héritage scientifique de Poincaré**, Belin, Paris, 2006.

Crick F. H. C., "Central Dogma of Molecular Biology", **Nature**, 227, pp. 561-3, 1958.

Crick F. H. C. **Of Molecules and Man**. Seattle, USA, Washington Univ. Press, 99 pp., 1966.

- Dehaene S., **La bosse des Maths**, Odile Jacob, 1997 (trad. italiana, Mondadori, 2001).
- Editors, "Bibliometrics and the Curators of Orthodoxy", *Note of the Editorial Board*, **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge U.P., vol.19, n. 1, 2009.
- Einstein A., Podolsky B. and Rosen N., "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered complete ? " **Phys. Rev.** **41**, p.777, 1935.
- Enriques F., "Filosofia scientifica" in **La filosofia scientifica a congresso, Parigi, 1935**, a cura di G. Polizzi, in **Dimensioni VII**, p. 50, 1983.
- Faracovi O., Speranza F., **Federigo Enriques. Filosofia e storia del pensiero scientifico**, Belforte, Livorno, 1998.
- Frege G. **The Foundations of Arithmetic**, 1884 (english transl. Evanston, 1980).
- Fox Keller E., **The century of the gene**, Harvard U. P., 2000.
- Gallier J., "What is so special about Kruskal's theorem and the ordinal Γ_0 ?" **Annals Pure Appl. Logic**, 53, 1991.
- Gentzen G. **The collected papers of Gerard Gentzen**, M. E. Szabo ed., North Holland, Amsterdam, 1969.
- Girard J.Y., Lafont Y., Taylor P. **Proofs and Types**, Cambridge U. Press, 1990.
- Gödel K. **Collected Works**, S. Feferman e al. eds., 5 volumi, Claredon Press Oxford, 1986-2003.
- Goubault E. (ed.) **Geometry in Concurrency**, *Special issue*, **Mathematical Structures in Computer Science**, Cambridge U.P., vol.10, n. 4, 2000.
- Harrington L. et al. (eds) **H. Friedman's Research on the Foundations of Mathematics**, North-Holland, 1985.
- Hilbert D., **Fondamenti della geometria**, 1899 (trad. italiana, Milano, 1970).
- Husserl E. **Sull'origine della geometria**, 1933 (pubblicato come "Appendice III" in **La crisi delle scienze europee e la fenomenologia trascendentale**, Il Saggiatore, Milano, 1997).
- Kunen K. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs**, North-Holland, 1980.
- Kruskal J. "Well-quasi-ordering and the tree theorem" **Trans. Amer. Math. Soc.** 95, 1960.
- Laskar J., "A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System", **Nature**, 338, 237-238, 1989.
- Laskar J., "Large scale chaos in the Solar System", **Astron. Astrophysics**, 287, L9 L12, 1994.
- Lighthill J. "The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics" **Proc. R. Soc. Lond.** A 407, 35-50, 1986.
- Longo G. "Reflections on Incompleteness, or on the proofs of some formally unprovable propositions and Prototype Proofs in Type Theory" in **Types for Proofs and Programs**, Durham, (GB), Dec. 2000; **Lecture Notes in Computer Science**, vol 2277 (Callaghan et al. eds), pp. 160 - 180, Springer, 2002.
- Longo G., Tendero P.-E. "The differential method and the causal incompleteness of Programming Theory in Molecular Biology", **Foundations of Science**, n. 12, pp. 337-366, 2007.

- Longo G. "From exact sciences to life phenomena: following Schrödinger and Turing on Programs, Life and Causality", in "From Type Theory to Morphological Complexity: A Colloquium in Honor of Giuseppe Longo's 60th birthday", special issue of **Information and Computation**, 207, 5: 543-670, 2009.
- Mayr E., "Cause and Effect in Biology", **Nature**, 10, 1961.
- Martin-Löf, P. "The definition of random sequences". **Information and Control** 9: 602–619, 1966.
- Monod J. **Le Hasard et la Nécessité**, PUF, 1973 (trad. italiana, Mondadori, 1975).
- Paris J., Harrington L., "A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic", in **Handbook of Mathematical Logic**, Barwise ed., North-Holland, 1133 – 1143, 1978.
- Petersen K. **Ergodic Theory**. Cambridge Univ. Press, 1983.
- Poincaré H., **Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste**, Paris, 1892.
- Poincaré H., **La Science et l'Hypothèse**, Flammarion, Paris, 1902.
- Poincaré H., "Les mathématiques et la logique", **Revue de Métaphys. et Morale**, 14, 1906.
- Poincaré H. **Science et Méthode**, Flammarion, Paris, 1908.
- Pilyugin S. Yu. **Shadowing in dynamical systems**, Springer, 1999.
- Rathjen M., Weiermann A. "Proof-theoretic investigations on Kruskal's theorem." **Annals Pure Appl. Logic**, 60, 49--88, 1993.
- Ruelle D., Takens F. "On the nature of turbulence." **Commun. Math. Phys.** 20, 167-192(1971) and 23, 343-344, 1971.
- Sieg W. "Mechanical procedures and mathematical experience", in **Mathematics and Mind**, A. George ed., Oxford University Press, 71-117, 1994.
- Smoryński C. "The incompleteness theorems", in **Handbook of Mathematical Logic**, J. Barwise, ed., North-Holland, 821-866, 1977.
- Turing A. M. "Computing Machines and Intelligence", **Mind**, LIX, 1950.
- Turing A. M. "The Chemical Basis of Morphogenesis" **Philo. Trans. Royal Soc.**, B237, 37-72, 1952.
- Weyl H. **Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences**, 1927 (english transl., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1949).
- Weyl H. **Symmetry**, Princeton University Press, 1952.
- Wittgenstein L., **Philosophical Remarks**, Ascombe ed., 1968.