La rationalité mathématique et les formes de la connaissance : esquisse d'un projet entre mathématiques et cognition[1]

Giuseppe Longo

CNRS, Ecole Normale Supérieure,
et CREA, Ecole Polytechnique
45, Rue D'Ulm
75005 Paris (France)
http://www.di.ens.fr/users/longo

Résumé

Dans ce texte, on essayera de mettre en évidence quelques uns des nouveaux défis que les sciences de la cognition posent aux mathématiques. Au delà des succès de méthodes mathématiques bien établies, largement utilisées dans ces disciplines, on soulignera l'importance de la recherche de méthodes nouvelles que les nouveaux enjeux demandent. Ma thèse est que les mathématiques sont extrêmement « plastiques » (presque autant que notre cerveau) et, donc, qu'elles peuvent et sauront se « constituer » autour des nouveaux problèmes posés. La rationalité des mathématiques est dynamique dans l'histoire, quoiqu'elle soit loin d'être arbitraire : en fait, ses racines cognitives la placent au coeur de notre rapport actif de compréhension/structuration du monde.

De plus, le rôle paradigmatique des mathématiques parmi nos formes de connaissance permet l'analyse de certains aspects de la cognition humaine, par « analogie » avec les analyses fondationelles en mathématiques. Ceci est bien le point principal que l'on développera : une analyse de ce que l'imaginerie cérébrale ou la connaissance des activités neuronales ponctuelles peut nous dire, analyse conduite en parallèle à une réflexion sur le rôle du « signe formel » dans les fondements des mathématiques.

---

[1] Per il volume "Geometria, intuizione, esperienza", Centro Enriques, Plus Edizioni, Livorno, 2010.

Introduction : méthodes physico-mathématiques

Le rôle des mathématiques en sciences est bien connu. Elles constituent le langage privilégié des sciences « dures » pour différentes raisons, dont quelques unes peuvent être brièvement résumées de la façon suivante.

Les mathématiques organisent et constituent les « objets » mêmes de nombreux savoirs. En physique, microphysique ou astrophysique en particulier, quelques « indices » sont rassemblés, quelques signaux sont émis par un instrument de mesure, un événement est observé une fois dans l'espace et... les mathématiques permettent de construire des théories explicatives d'extrême puissance, des modèles qui englobent tous ces symptômes éparpillés dans un cadre unitaire. Dans ces disciplines, le modèle mathématique est habituellement *énormément plus riche* que les phénomènes observés. De plus, il « constitue » les objets de la connaissance : les électrons, les muons, les quarks... ne sont pas « déjà là », mais ils sont le résultat d'un « découpage » mathématique du champ phénoménal. Grâce aux mathématiques, on isole des phénomènes et, en même temps, on leur donne un sens, en proposant des entités individuelles (des invariants) et une organisation globale.

La situation est différente dans les sciences du vivant. L'individu vivant, de la cellule au mammifère, s'impose par sont unité, sa « visibilité », la richesse de ses fonctions. Tout modèle mathématique ne saisit que quelques aspects de cette unité : normalement, il est *nettement plus pauvre* que l'objet d'étude ; tout découpage mathématique casse l'unité de l'individu et de l'écosystème.

Ceci n'empêche que nombreux résultats dans l'interface entre sciences du vivant et mathématiques aient été obtenus, des retombés remarquables de ce langage cohérent et expressif, même au delà de son champ de constitution le plus important, la physique.

Une des méthodes habituelles, dans le cas du vivant, a été l'analyse mathématique de « fonctions ». Indépendamment de l'analyse de la structure propre à « l'objet » vivant, on a souvent, et avec succès, isolé une ou plusieurs fonctions, sans référence au « matériel » réalisant cette fonction.

Cette idée a longtemps guidé les analyses fonctionnalistes en sciences cognitives : indépendamment du cerveau et de son habitat préféré - le crâne d'un homme vivant dans l'histoire, on isole sa fonction, le « raisonnement » et ses lois logiques. Celles-ci, une fois décrites en un nombre fini de règles formelles, auraient dû pouvoir être transférées sur une machine de Turing, ou ses modernes avatars, les ordinateurs digitaux. La logique mathématique, les remarquables mathématiques de la calculabilité et de la simulation numérique feront le reste. Or, pour ce qui en est l'analyse scientifque de la cognition humaine, il n'en est rien ou tout du moins très peu : pas un seul des résultats 'importants', et ils sont très nombreux, de la Logique Mathématique (c'est-à-dire, de l'une des 'grandes théories mathématiques' des fonctions récursives, des modèles, des ensembles, de la preuve…) n'a eu un rôle en Sciences Cognitives, sauf, peut-être, les résultats… 'négatifs' ou d'incomplétude (*on ne peut pas* formaliser ceci ou cela, voir § 4.1 dessous)[1].

Fort heureusement, bien d'autres outils ont été empruntés pour déployer la puissance des mathématiques en sciences cognitives. Il serait impossible d'en faire la liste. Au cœur de différentes approches il y a, toutefois, un aspect commun : le regard rapproché à la structure du vivant. On va donc de l'analyse fine du mouvement et de ses régularités pour développer une robotique s'approchant de la ductilité animale [J.-J. Slotine, http], à la conception de réseaux formels dynamiques pour simuler la plasticité cérébrale [Hertz et al., 1991]. Des techniques et des résultats mathématiques remarquables sont alors utilisés : équations différentielles et leur méthodes numériques pour décrire et reproduire la complexité de l'action et du mouvement, la physique statistique et les systèmes dynamiques pour simuler les réseaux de neurones etc.. Tout cela a été un apport massif de compétences qui n'a fait qu'enrichir l'interface mathématiques/sciences du vivant, dans un but si intéressant : l'analyse de la cognition. Ces savoirs mathématiques, pour la plupart développés en physique, sont une valeur ajoutée de grand intérêt : leur développement doit être au coeur de tout projet scientifique dans le domaine. Nous pensons toutefois que, en parallèle, aussi d'autres directions de travail doivent être développées, qui questionnent nos propres outils mathématiques et leurs fondements.

1. La dynamicité du savoir mathématique

Au delà donc de ce transfer souhaitable d'une science à l'autre, il y a aussi un autre aspect des développements et de la constitution du savoir mathématique à prendre en considération. Les mathématiques se sont souvent trouvées au centre de vrais tournants scientifiques et ont ressenti ou contribué à des changements de vision philosophique. En même temps, elles ont été dessinées autour de leurs champs d'application.

Prenons quelques exemples. Quand Newton et Leibniz inventent le calcul infinitésimal, on est au « moment haut » d'un parcours historique qui, à travers mille épisodes différents (théologie, peinture - géométrie projective…) a permis de « pratiquer » l'infini actuel, au cours des siècles (jusqu'aux remarques très profondes sur l'infini mathématique de Galilée et Cavalieri).

Les deux philosophes/mathématiciens utiliseront ces expériences conceptuelles pour en faire des notions mathématiques et analyser le mouvement, dans le fini, autour de nous, grâce à des notions « limites », infinitaires (la vitesse, l'accélération). Les monades infinitésimales de Leibniz sont en effet un riche mélange de métaphysique de l'infini et de mathématiques, conçu pour la physique. Newton, pour sa part, prend la sécante à une courbe, la pousse à la limite (la tangente) et donne à ce geste un sens physique : la vitesse. Il « lisse », redessine mathématiquement, ces trajectoires physiques, dont il comprend l'unité, tout en développant une idée de Galilée : la trajectoire du projectile (ou... de la pomme) et celles des astres sont gouvernées par les mêmes lois mathématiques. Les mathématiques unifient alors deux phénomènes apparemment si différents.

Ce passage est extraordinaire, car, à l'époque, les projectiles et les astres étaient considérés des « ontologies » essentiellement différentes : le sub-lunaire et le supra-lunaire. Toutefois, l'unité est atteinte « par le haut » : on ne transfert pas les calculs pour les trajectoires balistiques, déjà bien développés par les ingénieurs, sur une analyse des orbites planétaires. Par exemple, en même temps que le calcul infinitésimal, Newton propose une loi symétrique de la force de gravitation (proportionnelle à m_1m_2/d^2, le produit des masses modulo le carré de la distance), qui n'a pas de sens pour l'analyse de la trajectoire d'un projectile de canon par rapport à la terre.

On invente donc des mathématiques entièrement nouvelles, une vraie coupure par rapport à la science des figures finies, la géométrie grecque (ou, tout au plus, de l'infini potentiel, de quelques courbes qui tendent vers l' « apeiron », l'indéfini), mais aussi par rapport à l'algèbre finitaire des arabes. Ces mathématiques sont dessinées autour d'une nouvelle physique, grâce à une « vision philosophique ».

Au XIXe siècle, Gauss et Riemann se « voient » bouger sur des surfaces courbes : ils développent une géométrie des espaces à courbure non-nulle, non pas immergés dans des espaces euclidiens, mais « en soi » (intrinsèque). Le projet de Riemann est explicite et extraordinaire : il veut unifier, grâce à la structure de l'espace (qui, pour lui, coïncide avec l'éther), les différentes formes de propagation à distance (chaleur, lumière et... gravitation). La variation locale de la courbure (et de la métrique) sera à relier aux « forces cohésives de la matière » [Riemann, 1854].

Encore une fois, de nouvelles mathématiques sont conçues autour de la physique, “ad hoc” pour la physique, des mathématiques qui vont constituer la nouvelle physique, la théorie de la relativité, une vraie géométrisation de cette science. Mais elles posent aussi le problème d'un nouveau fondement de la connaissance physico-mathématique. Riemann, en particulier, esquisse, à coté et en parallèle à sa « philosophie naturelle », une analyse fondationnelle des mathématiques de très grand intérêt. Avec lui, c'est la « rationalité mathématique de l'espace physique » qui change.

Je crois que dans les rapports avec les sciences de la cognition, nous sommes face à (la possibilité de) un tournant comparable. Les enjeux sont si importants et originaux, surtout grâce à l'apport des sciences du vivant, qu'ils faut s'attendre à des changements de paradigme de grande envergure, si l'on pense que les mathématiques aient encore du nouveau à dire. On ne peut pas se contenter de transférer les outils bien établis de la physique-mathématique et les appliquer tels quels à la cognition : cet entreprise, à suivre à tout prix, n'est qu'un aspect de tout projet possible. Il faut en même temps développer une réflexion qui permette de questionner les outils mathématiques qui sont utilisés, de mettre en discussion les acquis de l'analyse fondationnelle habituelle, dans le but d'enraciner les mathématiques dans les autres formes de connaissance. Il faut élargir la rationalité même des mathématiques, bien au delà des monomanies fondationnelles du logicisme et du formalisme (« mathematics is logic in disguise » ou « mathematics is finite combinatorics » et, parfois, ... seulement un à la fois - voir [Longo, 2005] pour une approche au moins « tridimensionelle » au fondement des mathématiques : logique, formalisme et analyse de l'espace).

Comme dans ces deux grands moments du passé que j'ai brièvement cité, il faut utiliser la « plasticité » même des mathématiques pour les redessiner ou en dessiner des parties nouvelles, autour des nouveaux enjeux. Le projet ne devrait toutefois pas se limiter à la seule proposition de nouvelles structures mathématiques pour ces nouveaux buts (proposition qui, d'autre part, est bien rare - les travaux de R. Thom en constituent un exemple, voir [Thom, 1972]), mais même à mettre en question les *structures conceptuelles* des mathématiques.

En fait, en mathématiques, il y a des « concepts » qui précèdent la structuration rigoureuse : le concept d'infini (potentiel et actuel), de temps, d'espace physique, de vitesse et accélération... même de preuve (plus une pratique du « voir pour comprendre » que la notion formelle courante, démontrablement incomplète) sont restés longtemps (en fait, ils se sont constitués et enrichis!) dans le « flou conceptuel » du débat philosophique avant de devenir des idées mathématiques précises. Ce passage a été, est essentiel : il n'y a pas de rigueur formelle sans « concepts signifiants » sous-jacent, signifiant pour leur histoire, leur parcours constitutif ; l'axiome, la règle est précédé par une formation de sens, il en est le point d'arrivé (voir [Longo, 2001c] ; le chef d'oeuvre qui inspire cette vision est [Husserl, 1936]). Ou plutôt, sans cette formation de sens et son analyse, il n'y a que le « rigor mortis » qui remplace la rigueur mathématique chez les ordinateurs.

Le pari est qu'une nouvelle réflexion fondationnelle, tout en prenant comme point de départ le travail extraordinaire fait dans les fondements des mathématiques au cours du XX^{e} siècle (grâce à l'effort acharné et profond fait en logique et dans les systèmes formelles), puisse revitaliser les rapports des mathématiques à la structuration du monde, à partir de l'organisation des concepts clés de mathématiques. En particulier, à l'analyse des principes de preuves logiques et formels, il faut ajouter une analyse des fondements de l'intelligibilité mathématique de l'espace et du temps physiques aussi bein que du vivant.

2. Vers des méthodes nouvelles

On voit déjà quelques indices discrets de ce travail de renouveau. Quand J.-M. Morel abandonne l'analyse traditionnelle du signal, pour passer, dans son travail en vision, aux « gestalt » visuelles, il cherche à transférer des analyses philosophiques sur la structuration de l'image vécue, vers une mathématique de la vision, [Morel, http]. En fait, nous choisissons d'interpoler une image incomplète, de la structurer en une « gestalt » qui n'est pas là, en tant que sujets cognitifs actifs. Mais l'unité de la gestalt pose des problèmes difficiles à toute saisie mathématique du problème : les analyses traditionnelles décomposent l'image dans ce prétendu continu mathématique qui devrait tout approcher. Quelle est la nature mathématisable, mais pas encore mathématisée de cette « unité » de l'image vue ? Quel nouveau concept mathématique faut il proposer dans ce cas ?

On pourrait aussi citer les tentatives, reprises par J. Petitot, d'analyse mathématique de la structure fine du cortex visuel, [Petitot, http]. Tout en abandonnant l'idée que le cerveau est une « base de données digitale » ou parfaitement simulable par ce biais, on essaye d'apprécier de près sa structuration géométrique. Des résultats surprenants suggèrent une structure de « local glueing », comme dans les variétés différentielles : les contours sont reconstruits, dans le cortex V1, par collage de « segments tangents » (les neurones activés réagissent à des « directions »). Dans ce cas, il est vrai que l'on « importe du Riemann » en cognition, c'est vrai, mais l'analyse structurelle proposée vise aussi à trouver dans cette organisation du cortex les raisons du sens, pour nous, de ces concepts mathématiques. C'est à dire, on essaye à trouver dans leur enracinement dans le vivant, les origines cognitives de l'organisation géométrique que nous avons proposé pour l'espace physique. La démarche est audacieuse, car on essaye de relier directement des structures mathématiques très complexes (les régularités sous-jacent les variétés riemanniennes) à des formes biologiques (le cortex visuel).

Tout en appréciant énormément cette direction de travail, qui est double (outil mathématique pour la vision et réflexion fondationnelle, en... sens inverse : de la structure cognitive aux mathématiques), je pense qu'il faudrait aussi procéder à partir de structures plus élémentaires : le nombre, l'appréciation de trajectoires, la notion de parallélisme ou de « transport parallèle »... [Longo, 1999].

Considérons brièvement le temps chez le vivant. L'espace et le temps du vivant ne paraissent pas être ceux de la physique. Comment façonner, dans le dialogue avec le biologiste, le physiologiste, des nouveaux concepts qui puissent, un jour, devenir une (nouvelle) structure mathématique ?

On peut pas se contenter de leur proposer seulement l'espace cartésien ou riemannien, avec leur continu à la Cantor-Dedekind, et encore moins l'espace et le temps saccadés et séquentiels des machines de Turing…. L'espace et le temps phénoménal sont autre chose chez le vivant ; le continu des points en tant que nombres réels peut seulement donner des (excellentes) approximations, empruntées à la physique-mathématique. La séquentialité hors du monde des formalismes pour la calculabilité, leur absence de spatialité, n'a rien à voir avec les problèmes de l'interaction et de la synchronisation dans l'écosystème, propres au temps de l'action du vivant.

En fait, les rythmes du vivant semblent mieux s'apprécier en terme d'un discret temporel, mais en même temps, sa temporalité s'apparente à celle des systèmes dynamiques de la physique, si bien décrit en termes du continu : l'ecosystème a une dynamique physique ainsi que biologique où des actracteurs peuvent décrire les situations de stabilité ; des ruptures de l'équilibre ressemblent à des ruptures de symétrie….

Or, le temps physique est donné par les bifurcations qui se créent à tout instant dans ses systèmes dynamiques et qui en marquent l'irréversibilité. Autrement dit, si l'on considère le temps phénoménal comme épiphénomène des systèmes physiques, le temps est alors (marqué par) l'évolution des systèmes irreversibles. Mais ces bifurcations ne dependent, en physique, que de l'état présent (voir passé) des systèmes. Il n'en est pas ainsi chez le vivant, dont l'intentionalité préconsciente et consciente contribue à determiner les situations de bifurcation (je reprend ici, en termes différents, une idée esquissée par A. Lovejoy (voir [Pauri,1999]). En bref, l'intentionalité, par laquelle j'entend içi seulement ce « tendre vers », ce finalisme contingent propre à la vie (la simple nécessité de survie, de garder ou améliorer son métabolisme), entre dans la costitution du temps du vivant. Certaines bifurcations sont des « choix », qui sont faits sur la base aussi d'une « attente », d'un « tendre vers » quelque chose qui n'est pas encore là, que l'on cherche. Avec un abus d'expression bien fort, j'oserais dire le temps du vivant « dépend aussi du futur », en fait de son attente.

Que peuvent dire en cela les mathématiques ? Les « boucles », les circularités, les imprédicativités, y sont bien analysées du point de vue logique, en général : il faudra les adapter à saisir ce nouveau sens, en inventer de plus pertinantes à ces nouveaux enjeux.

En mon opinion, pour aller plus loin dans la construction conceptuelle des outils mathématiques pour ces nouveaux problèmes, il faut commencer par retrouver les fondements même de ces notions dans « notre être vivant dans le monde et dans l'histoire » ; dans l'histoire, car on n'atteint pas la complexité des structures mathématiques, même la plus simple, sans considérer la construction qui est faite dans l'intersubjectivité, dans le langage et dans la mémoire commune.

Voilà quelques exemples dans cette direction ultérieure de travail, de ce que sont les rapports entre mathématiques et cognition. Le point central est que, aujourd'hui, le dialogue doit être dans les deux directions et il faut qu'il soit très profond. On ne peut pas se limiter à transférer, vers les sciences du vivant et de la cognition, nos « logiques », nos outils mathématiques d'analyses, tels qu'il sont ; il faut aussi apprécier ce *sens du vivant*, qui est propre au biologiste. Il faut saisir la nouveauté des méthodes propres aux scientifiques qui travaillent avec la contingence et l'unité du vivant, avec sa réactivité et son « finalisme de l'action », dont on parlait - en fin de compte, un finalisme de la survie ; une composante si forte de la connaissance du vivant et qui n'a absolument rien d'analogue en physique. Et qui devrait bouleverser nos méthodes d'analyse mathématique.

3. Les fondements cognitifs des mathématiques

Un élément essentiel de ce projet est le questionnement interne aux mathématiques, qui propose de les faire sortir de leur isolement, de toute vision d' « a priori » logique, indépendant de notre rapport actif au monde ; ce rapport est au contraire co-costituant du monde et des mathématiques, en même temps. L'idée est que les régularités que nous voyons dans le monde et sur lesquelles nous bâtissons les mathématiques sont en correspondance tout d'abord avec nos structures d'êtres vivants : on isole, on voit des régularités, des invariants par rapport à des transformations, des regards différents que nous posons sur le monde. On construit alors, grâce au langage, des concepts qui seront ensuite autonomes, car notre corps en « porte les traces », il s'est constitué aussi autour des régularités qui se trouvent « derrière » ces concepts. Le vivant, notre propre « je », se façonne dans le monde, pendant qu'il enrichi de sa propre unité toute interprétation du monde. Il ne copie pas à l'identique les régularités physiques : comme dans les gestalt visuelles, il projette une structuration sur le monde, qui n'est pas « déjà là ». Cette présence active est peut être à l'origine même de nos « inventions » mathématiques, elle en est leur fondement cognitif. L'interpolation/complètement d'une figure par une ligne « qui n'est pas là » (comme dans les expériences de la Gestalt) est le premier geste de la construction mathématique, un geste pre-conscient dans lequel la mémoire joue un rôle constituant et donne sens à la construction conceptuelle, [Longo, 1999].

Mais quelles régularités du monde deviennent constitutives de notre savoir mathématiques ?

J'ai un ami jupitérien qui a cinq jambes, trois yeux et demi et aucune, absolument aucune symétrie dans son corps. Il ne voit pas ou il ne donne pas d'importance à ces symétries de la lumière qui sont sous nos yeux, sous *ses* yeux : ses structures mathématiques ne sont pas imprégnées de symétries comme les nôtres (ces dualités et adjonctions si bien décrite en Théorie des Catégories). Elles sont plutot construites autour des « zurabs », une régularité essentielle pour lui, mais que nous ne voyons pas ou que nous négligéons. Il en est ainsi aussi pour les couleurs : lui, il voit une bande au delà du violet, où on y trouve, en fait, des couleurs formidables. Il ne peut donc pas apprécier cette construction humaine fantastique, riche d'histoire, que nous appellons « peinture » : Titien c'est du rien pour lui. Tout comme nous ne voyons pas ses chefs d'oeuvres, aux si belles couleurs ultraviolets.

Les deux constructions ne sont pas arbitraires, les longueurs d'ondes existent, elles sont là, tout comme les symétries des cristaux ou de la lumière, mais notre présence active intéragit avec ces éléments du réel, pour en choisir, en souligner, en corréler certains, mais pas d'autres. De plus, notre action interpole les lignes manquantes, propose des liens par analogie, dérivées d'autres expériences ; elle intègre une variété d'actes d'expérience pour produire une nouvelle structure, un réseau inexistant entre « les choses » du monde.

Cerner, parmi les régularités du monde et ces actes fondateurs de toute forme de connaissance, ceux qui sont à l'origine des mathématiques, est une des tâches de l'analyse des fondements cognitifs des mathématiques.

Mais cette analyse devrait être aussi bien un des outils grâce auxquels il sera possible d'agir sur la plasticité conceptuelle des mathématiques, leur extraordinaire dynamique interne ; elle est un parcours scientifique possible pour arriver à proposer des concepts et, ensuite, des structures, dérivées de (et pas seulement imposés à) ces nouveaux enjeux scientifiques, ceux des sciences de la cognition. Pour cela, à partir et bien au-delà des tentatives courageuses de pionniers comme Poincaré ou Enriques (tentatives basées sur l'introspection), il faudra aussi former des mathématiciens qui aient un « sens du vivant » (et de l'histoire), comme Galilée, Newton et Riemann avaient un « sens de la physique » et de son espace ; des mathématiciens qui visent en particulier une « intelligibilité mathématique » de l'espace du vivant (et de l'entendement), comme on a su rendre intelligible l'espace physique grâce à la géométrie. Dans ce but, l'introspection du sujet mathématicien doit être remplacé par l'assimilation des méthodes scientifiques du biologiste, l'appréciation des régularités qui comptent pour lui (qui sont parfois si différentes de celles du physicien) et, encore plus, de sa sensibilité pour la « singularité » de l'individu vivant, de sa façon de proposer une « théorie », dont la nature est bien différente de celle des théories physiques.

En fait, en biologie on constitue des « réseaux d'exemples », plus que des théories ; on reconnaît et on relie des régularités par analogies phylogénétiques ou ontogénétiques très particulières (certaines formes ou l'homologie des organes). Pour cela, les « théories » biologiques sont particulièrement « ouvertes » et s'enrichissent à tout instant de nouveaux contextes d'expérience. Pour en approcher un savoir mathématique nouveau, il faut tout d'abord sortir de la caricature formaliste et logiciste, ces approches newtoniennes aux fondements des mathématiques (mais Newton était « un grand », à son époque), qui proposent des espaces logiques absolus où tout est déjà établi, des cadres de référence hors de l'homme, des lois logiques de la « pensée en soi », des règles déjà toutes énumérées par La Théorie des Ensembles, à partir desquelles tout dériver (de façon automatique, rèvent certains formalistes), y compris les mathématiques présentes et futures.

4. Les concepts mathématiques et leur constitution transcendantale

Au cours du XX^e siècle, l'analyse des fondements des mathématiques s'est concentrée sur l'analyse de la preuve. L'enjeu, après Frege, a été celui d'expliciter les règles de la déduction (et du raisonnement). Pour les logicistes comme Frege et Russell, elles devaient être riches de signification logique ; pour Hilbert et son école, au contraire, elles était « certaines » si maniées indépendamment de toute signification, y compris logique. Il fallait expliciter des axiomes et des règles formelles, potentiellement mécanisables, principes de preuve qui donnent la certitude absolue (« unshakable certainties») à la déduction.

Il est inutile d'énumérer l'infinité de percées techniques et l'apport donné à la rigueur mathématique, à l'analyse de la généralité des théories… ainsi que la retombé principale de ces visions universalistes et/ou mécanicistes de la déduction : la naissance, au cours des années '30 des mathématiques de la calculabilité et, ensuite, de l'informatique, science des machines digitales universelles. Il s'est ainsi formé un espace de recherche, entre logique mathématique et informatique, aux milles défis scientifiques et retombées pratiques (et qui, je dois dire, m'a permis de gagner ma vie et très bien… , voir [Longo, web page]).

Toutefois, les mathématiques ne sont pas seulement « des preuves » et leur fondement demande aussi une analyse de la constitution des concepts et des structures. Le problème *épistémologique* des fondements, explicitement écarté par Frege, se pose en terme d'analyse d'une genèse conceptuelle : comment arrivons nous a proposer ces concepts, ces structures qui organisent le monde, quel est-ce le « knowledge process» ?

Ce problème est un des enjeux de la philosophie de la nature, et de son impact sur les mathématiques, esquissé par Riemann, Helmholtz, Poincaré, Enriques et H. Weyl (voir [Boi, 1995], [Bottazzini, Tazzioli, 1995]), [Tazzioli, 2000] et les maintes références dans ces textes) ; il a été totalment écarté dans les analyses logicistes et formalistes : Frege et Hilbert étaient parfaitement conscients de ce choix et ces grands géomètres étaient parmi leurs pires ennemis philosophiques.

Les succès fondationnels et techniques (l'informatique!) de la logique et des formalismes rendent difficile la reprise d'un discours largement abandonné. Dans [Longo, 2001c] et [Longo, 1999] on essaye de décrire un parcours possible de la constitution cognitive et historique de certains concepts et structures mathématiques (les nombres entiers, les trajectoires, l'infini mathématique... voir aussi [Longo, 1999i]). Des « histoires possibles », comme on y explique, car elles sont des tentatives scientifiques, en dehors de tout « cadre absolu », de toute « unshakable certainty ».

Mais les mathématiques peuvent aussi servir comme « paradigme » pour l'analyse de la cognition : leur relative « simplicité conceptuelle », même quand elles sont profondes, leur capacité à mettre en évidence des points essentiels d'un processus de connaissance, peuvent nous aider à comprendre d'autres formes de connaissance, parfois plus « complexes ».

On essayera ci-dessous de discuter brièvement le rôle des concepts par rapport aux *signes*, en tant que lieux de la mécanisabilité prétendue des mathématiques, mais aussi en tant que « traces » ou reflets des concepts dans nos réseaux neuronaux, dans le cerveau. En particulier, on essayera de comprendre le rôle d'un outil important en cognition, l'imaginérie cérébrale, par une analogie avec le rapport entre signe et concept en mathématiques.

4.1 Le concept et le signe dans la preuve

Il devrait être bien évident à tout un chacun que le nombre, en tant que concept, est autre chose qu'une collection d'objet ; Frege clarifie ce point d'une façon magistrale [Frege, 1884]. Par exemple, il est bien vrai que, il y a un milliard d'années, si deux pierres se trouvaient au pied d'un volcan et si trois autres y étaient crachées par ce volcan, il y avait alors 5 pierres. Mais ceux qui n'était pas là c'est le *concept de nombre* ou, si l'on préfère, les nombres 2 ou 3 ou 5 en tant que *concepts*. En fait, il n'y a pas de concept sans concepteur, quoique le concept puisse ne pas dépendre du parcours constitutif spécifique qui inclue les concepteurs et leur histoire. Le concept mathématique, ainsi que la structure mathématique, sont justement les *invariants constitués* grâce à une pluralité d'expériences cognitives et historiques, de parcours possibles, ainsi que de notations et de marquages.

L'invariance du concept de nombre, par rapport à toute expérience physique et à toute notation (mais il en est de même pour d'autres concepts mathématiques) est au coeur de mathématiques, en tant que praxis de connaissance : c'est ainsi qu'elle fournissent ces descriptions « universelles » des objets en tant qu'invariants, des descriptions caractéristiques de sciences physico-mathématiques. Ces sciences demandent cette stabilité conceptuelle maximale, parmi nos tentatives de rendre le monde intelligible, qui est propre aux mathématiques ; une stabilité qui, en fait, pourrait *les définir* par rapport aux autres formes de connaissance (voir [Longo, 2001c]).

Le concept est donc autre chose que le signe, le symbol formel qui y fait référence. Le concept demande l'intersubjectivité : il est le résultat du dialogue dans l'histoire à l'intérieur de notre « communauté communicante », dirait Husserl. C'est la comparaison à l'expérience d'autrui, la recherche de ce qui est commun, l'expérience historique d'une pluralité de signes, de notations différentes qui nous mène jusqu'à l'invariant, le nombre par exemple, notion mathématique que l'on donne par le signe et qui ne se réduit pas à son signe.

Le concept et la structure mathématiques sont des constitués transcendantaux, résultats d'une praxis intersubjective, dans l'histoire. Ils sont les invariants atteints dans le dialogue entre la pluralité d'actes d'expérience que l'homme a menés pour rendre le monde intelligible. Ils ne sont pas arbitraires, car ils sont encrés sur des régularités qui sont là, comme des pivots sur lesquels nous appuyons cette structuration du monde, que sont nos formes de connaissance.

La théorie de la preuve formaliste a essayé de réduire le rôle des concepts et des structures mathématiques au signe formel : des machines manipulant des suites de 0 et 1 auraient dû devenir le lieu de la certitude, en fait de la déduction et de la construction mathématique, en dehors de l'homme. La rationalité humaine toute aurait dû être transférée ou transférable dans la machine. Projet erroné, mais fort et précis, qui nous a donnés ces ordinateurs, « symbol pushers » infatigables, qui complimentent et remplacent l'homme dans mille tâches (et proposent des lieux nouveaux pour le traitement de l'information et des outils irremplaçables pour la connaissance).

Or, les théorèmes d'incomplétude récents (non pas celui de Gödel, jeu diagonal formidable, mais qui produit « seulement » une proposition indécidable, équivalente à la cohérence formelle des mathématiques, et rien ne dit sur la *preuve* de ces deux énoncés) montrent que dans les démonstrations, même à l'intérieur de la plus « mécanisable » de nos théories, la théorie des nombres, il peut être nécessaire d'impliquer des concepts ou des structures mais aussi que la notation finitaire et sa manipulation mécanique sont insuffisantes à la preuve. En bref, le concept d'infini ou la structure géométrique du « bon ordre » des nombres entrent dans la preuve d'une façon inéliminable ; ils ne peuvent pas être remplacés par des notations finitaires pour l'infini ou pour le bon ordre (en bref, car il est compliqué de l'expliquer en détail, l'induction arithmétique, formelle, est incomplète par rapport à la structure ordonné des nombres entiers, voir les articles de Simpson et Smorinsky dans [Harrington et al., 1985], par exemple, et [Longo, 1999i] pour une réflexion et des autres références).

La théorie de la preuve nous a donc démontré que le concept et la structure mathématiques, en tant que constitués transcendantaux, invariants proposés dans l'intersubjectivité, sont essentiels à la preuve : un des grands, immenses résultats auto-limitatifs que la logique mathématique, inventée par les logicistes et les formalistes, a su nous donner au cours du XX^{e} siècle.

Le signe formel, dépourvu de son rapport au concept, à la signification, est donc insuffisant, même à la preuve dans la plus formalisables des branches des mathématiques, la théorie des nombres.

4.2 Le concept et la trace dans le cerveau

Essayons maintenant d'étendre notre analyse à l'activité cérébrale que l'on détecte en présence de l'évocation d'un concept ou au cours d'une activité mentale. Un livre très intéressant [Dehaene, 1997] et un revue, Mathematical Cognition, sont presque entièrement dédiés à l'examen des activité neuronales liées aux activités arithmétiques (mais ils contiennent aussi des analyses psychologiques et psycho-physique de grand intérêt). Changeux, dans [Changeux-Connes, 1989] par exemple, développe aussi ce thème, dont l'impulsion est largement due aux extraordinaires techniques d'imaginérie cérébrale possibles de nos jours : on « voit » cette partie ci ou celle là du cerveau s'activer, certaines couches de neurones réagir face à certaines tâches intellectuelles, et non d'autres et ainsi de suite.

Tout d'abord, je trouve l'apport de ces analyses, avec leur accompagnement technologique (et leur potentialité diagnostique des lésions cérébrales) absolument passionnant. Quand on nous explique que les tables des multiplications sont mémorisées assez ponctuellement et près de « l'Ave Maria » (Dehaenne), mais que dans les comparaisons entre nombres nous utilisons des parties du cerveau normalement impliquées dans des tâches « géométriques », on comprend la richesse de notre regard sur les nombres. D'un coté, nous paraissons effectivement posséder, ou avoir construit, des modules algorithmiques pour le calcul, quand l'autorité du maître d'école nous a forcé à apprendre par coeur ces opération à exécuter sans reférence au sens (en même temps que des prières autant vides de contenu... que veut dire « gratia plena » pour un enfant ?). De l'autre, les comparaisons signifiantes entre grandeurs impliquent aussi des évaluations analogiques, spatiales, faites le long de cette « ligne numérique », ce bon ordre des nombres, que nous tous voyons dans nos espaces mentaux (Dehaene invite à fermer les yeux : ne voyez vous pas une « ligne numérique », qui ne se termine pas, en principe allant, pour nous, de gauche à droite, représentation géométrique des nombres entiers ?).

En effet, le comptage et le calcul, même arithmétiques, sont loin d'être localisé en un seul endroit : on utilise des algorithmes mécaniques appris par coeur, mais aussi des comparaisons et des actions mentales sur cette ligne numérique (ajout, soustraction de segments, juxtapositions de longueurs...). En cas de pathologie, en particulier, on peut mettre en évidence une pluralité de « parcours cérébraux » que nous utilisons pour manier les nombres, ainsi que le rôle de la signification, de l'évocation que nous attachons même à la pratique arithmétique la plus élémentaire.

Mais ces travaux en neurophysiologie fournissent aussi des percées cognitives formidables quand, par exemple, ils nous informent que l'évocation consciente d'une image, en mémoire, active le cortex visuel primaire ; c'est à dire, que le souvenir actif est tout proche de l'image « vraie » pour notre cerveau, car le cortex primaire est la première étape de toute image en provenance de la rétine (le corps genouillé est seulement une sorte de relais pour les nerfs optiques). Dans le cas du souvenir, l'homme normal est bien conscient que la rétine et le corps génouillé ne sont pas impliqués. Ce qui est surprenant est que nos constructions/reconstructions mentales, enracinées dans la mémoire, nos illusions visuelles, impliquent le cerveau dès le début du parcours cérébral qui est habituel pour une image en provenance de l'extérieur. L'illusion, le rêve est donc extrêmement proche de la réalité, pour le cerveau.

Un autre exemple extraordinaire et désormais classique a été donné par [Rizzolati et al., 1990] : certains neurones du singe s'activent quand celui-ci fait un certain geste (la saisi d'une banane) *et* quand il voit un autre singe ou un homme faire ce même geste (neurones miroir). Le monde parait reconstruit, simulé en permanence : l'imagination ou la vision précède ou remplace le geste.

Ces analyses des activités neuronales nous expriment donc « ce qu'elles disent » et rien de plus (ce qui est déjà beaucoup) : elles suggèrent des liens entre activités différentes, par la localisation ; elles confirment la pluralité des activités impliquées dans chaque tâche, la richesse de l'intégration faite par le cerveau, qui utilise plusieurs parcours possibles pour interpréter et reconstruire le monde, son rôle actif dans toute perception (les nombres sont « calcul » et « espace », quantité et qualité ou analogie ; l'imagination, qui projette et re-interprète sur la base aussi des souvenirs, est si proche du réel ; le cerveau intègre vision et action...).

Toutefois, si ces neurones-ci ou ceux-là sont activés quand on évoque ce concept-ci ou celui-là, ces activations ne sont pas *le concept* tel que l'on entend dans le langage : ils en sont le signe cérébral, la correspondance pour nous évocatrice de façon ultime du concept. Mais les concepts ou les structures de nombre, d'ordre spatial... d'infini (je n'ai encore rien lu au sujet des activités cérébrales reliées à la maîtrise conceptuelle de l'infini mathématique) ont un sens accompli seulement dans l'intersubjectivité ; ils sont constitués dans la richesse de nos échanges, ils ne dépendent pas des notations spécifiques aussi bien que de leur implémentation cérébrale. Et une fois constitués, ils en sont indépendants, dans le sens qu'ils acquièrent une autonomie « transcendantale ». Mais ils *ne transcendent aucunement* nos activités humaines, car ils en sont *le résultats*. Leur sens *est* dans le contexte de l'échange dans lequel ils se sont déterminés.

Même si un jour on aura peut-être (et je le crois) un plan parfait de l'activité électro-bio-chimique du cerveau d'un homme, en regardant les neurones qui s'activent ci et là dans ce cerveau, on ne pourra pas comprendre ce que cet homme *signifie*, le contenu de ses pensés. Seulement la référence à ces contextes intersubjectifs et historiques qui ont constitués nos espaces de signification, nos langues humaines, nos concepts abstraits, comme ceux des mathématiques, donnent la signification. La sens est dans le jeu entre activité cérébrale et contexte de signification, en tant que correspondance entre réaction neuronale et écosystème (y compris langue et histoire), avec ses invariants constitués et indépendants de chaque cerveau spécifique (de plus, bien rarement deux cerveaux différents développent exactement la même activité biochimique face à une tâche donnée). Il faut voir le neurone s'activer et, en même temps, apprécier un vaste contexte de vie, pour « comprendre » ce que cette trace neurologique, ce signe vivant, veut dire. Ceci n'est pas impossible, c'est au contraire un des défis des sciences de la cognition en tant qu'entreprise interdisciplinaire, la raison d'être de leur interdisciplinarité. *Le neurobiologiste qui pense pouvoir réduire toute construction conceptuelle à son signe dans le cerveau fait la même erreur que le formaliste qui croyait pouvoir réduire les constructions mathématiques à l'analyse et la manipulation mécanique de signes sans signification*, voici ma thèse principale sur ce thème, l'analogie explicative que je propose à partir de l'expérience de l'incomplétude des formalismes, en logique mathématique (voir § 4.1 plus haut).

L'erreur est de dire que la « pensé humaine est dans le cerveau comme la confiture dans un pot » (pour reprendre une critique de Gilles Chatelet) ; dans un cerveau isolé de ses interactions avec le monde et, surtout, avec les autres ; presque comme il l'était de croire que la machine de Turing isolée, sans espace, sans temps ni histoire aurait pu dériver toutes les mathématiques présentes et futures. Seulement les contextes donnent signification au signal cérébral, malgré sa richesse, bien plus grande que celle du signe formel sur le papier ou sur la puce électronique (le neurone réagit bien rarement tout seul : notre cerveau est toujours impliqué si non dans son entièreté au moins par des réseaux très vastes ; il intègre toujours une grande variété d'activités, car il est tout d'abord un « intégrateur », une machine à établir liens et analogies, dans le but de l'action, plus que de la représentation passive).

Peut-être l'activité d'un neurone isolé de l'aplysie, mollusque au système nerveux avec une centaine de neurones (nous en avons environ 100 milliards), peut nous dire tout sur les réactions, toujours les mêmes, de son porteur face à un stimulus. Il parait que ce petit être n'apprenne pratiquement rien au cours de sa vie, que sa plasticité cérébrale soit négligeable (la notion même de « individu » est douteuse dans ce cas, [Prochiantz, 1997]). Son intersubjectivité est inexistante, son rapport au monde est parfaitement figé, on nous dit. Alors la correspondance entre stimulus et activation neuronale peut être entièrement explicative : cette activation là « signifie » ou représente exactement cela.... Il n'en est pas ainsi quand le concept ou la structure abstraite émergent d'une praxis partagée, propre à une communauté communiquante et en permanente évolution. Il y a certainement un continuum évolutif entre l'aplysie et nous, qui couvre l'espace de quelques centaines de millions d'années. Mais continu, en mathématiques, ne veut pas dire différentiable : il y a eu des point critiques au cours de l'évolution, des singularités, comme l'émergence des langues animales, qui communiquent surtout, mais pas seulement, la peur, la rage, la menace, la sexualité..., ou l'émergence des langues humaines qui décrivent aussi « ce qui n'est pas là », qui constituent des objets, les isolent du monde, jusqu'à en détacher des concepts ou... à proposer les structures de la géométrie pour organiser l'espace physique.

Encore une fois, l'évocation d'un concept sera pour nous signifiante *à travers* et grâce à l'activation, plus ou moins localisée, d'une partie de notre cerveau (mais aussi par l'implication de notre corps, de nos mains, dans le geste). Cette activation est *évocatrice de contextes vécus* dans lesquels on re-projette le stimulus. La réimmersion dans ces contextes de mémoire, individuelle et collective, reconstruit la signification, l'accroche au monde autour de nous. Le signe/activation cérébral est un élément essentiel à la signification, qui n'a pas lieu sans la réactivité d'un cerveau vivant, dans son unité. Il est pour cela énormément plus riche de tout signe formel, comme l'on disait déjà ; toutefois, le signe cérébral isolé *n'est pas signifiant en soi.*

Pour résumer, j'ai essayé de comprendre le rôle très important, aisni que les limites des analyses que nous donne l'imaginerie cérébrale, par rapport aux activités cognitives. Je l'ai fait par analogie aux succès et aux faillites du formalisme dans l'analyse fondationnelle des mathématiques. Plus exactement, l'expérience dans l'analyse du raisonnement mathématique permet de proposer, en mon opinion, une interprétation possible du rapport, dans les activités cognitives, entre signe cérébral et contexte de signification (le lieu de la constitution du concept).

Il doit être bien clair toutefois que l'activation cérébrale est énormément plus « signifiante » que tout signe sur le papier ou activation électrique d'une puce digitale : le premier est la réaction du vivant, dans toute son unité et son intentionnalité, face à un stimulus. Il est subjectivement signifiant par rapport aux buts de ce vivant, voir [Longo, 2005]. Il évoque dans le sujet actif un sens bien fort : les limites de son analyse sont seulement dans sa « de-contextualisation » éventuelle, dans la tentative de réduire la constitution intersubjective des concepts et structures de l'entendement à l'activité isolé du neurone ou du réseau de neurones. Le but justement des analyses cognitives, dans une perspective matérialiste, mais qui ne se perde pas dans le « matériel », c'est d'établir des rélations entre ces activités du cerveau vivant et l'activité de son porteur, en tant que « agent historique de pensée ».

Bibliographia (aggiornata nel maggio 2009)

(Des versions préliminaires ou revues des articles de Longo sont « downloadable » de http ://www.di.ens.fr/users/longo).

ASPERTI A., LONGO G. **Categories, Types and Structures**, M.I.T. Press, 1991.

BAILLY F. **L'anneau des disciplines**, n. spécial de la **Revue Internationale de systémique**, vol. 5, n. 3, 1991.

BAILLY F., LONGO G., Mathématiques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant. Hermann, Paris, 2006.

BERTHOZ A. **Le sens du mouvement**, Od. Jacob (english transl., Harvard U.P.), 1997.

BOTTAZZINI U., TAZZIOLI R., « Naturphilosophie and its role in Riemann's mathematics », **Revue d'Histoire des Mathématiques** n. 1, 3-38, 1995.

BOI L. **Le problème mathématique de l'espace**, Springer, 1995.

CHANGEUX J.-P., CONNES A. **Matière à penser**, Odile Jacob, 1989.

DEHAENE S., **La bosse des Maths**, Odile Jacob, 1997.

FREGE G. **The Foundations of Arithmetic**, 1884 (english transl. Evanston, 1980.)

GIRARD J.-Y., « Locus Solum », **Mathematical Structures in Computer Science**, vol. 11, n. 3, 2001.

HARRINGTON L. et al. (eds) **H. Friedman's Research on the Foundations of Mathematics**, North-Holland, 1985.

HERTZ J., KROGH A. and PALMER R. **Introduction to the Theory of Neural Computation**, 1991.

HUSSERL E. **L'origine de la Géométrie**, 1936 (trad. fran., PUF, 1962).

JACOB F. **La logique du vivant**, Gallimard, 1970.

LAMBEK J., SCOTT P.J. **Introduction to higher order Categorical Logic**, Cambridge University Press, 1986.

LONGO G. « Mathematical Intelligence, Infinity and Machines : beyond the Gödelitis » **Journal of Consciousness Studies**, special issue on Cognition, vol. 6, 11-12, 1999.

LONGO G. « Mémoire et Objectvité en Mathématiques », *in* **Le Réel en Mathématique**, (colloque de Cérisy, septembre 1999), Presses Rue d'Ulm (Cartier et Charaud eds.), 2003.

LONGO G. « The Constructed Objectivity of Mathematics and the Cognitive Subject », *in* **Proposals in Epistemology. On Quantum Mechanics, Mathematics and Cognition** (M. Mugur-Schachter ed.), Kluwer, 2001c.

LONGO G. « The reasonable effectiveness of Mathematics and its Cognitive roots », *in* **New Interactions of Mathematics with Natural Sciences** (L. Boi ed.), World Scientific, 2005.

LONGO G. « From exact sciences to life phenomena: following Schrödinger and Turing on Programs, Life and Causality ». *Concluding lecture at* "From Type Theory to Morphological Complexity: A Colloquium in Honor of Giuseppe Longo," *to appear in* **Information and Computation**, special issue, 2009.

MOREL J.-M. Plusieurs articles, voir http ://www.dptmaths.ens-cachan.fr/

PAURI M. « I rivelatori del tempo », preprint, Dip. di Fisica, Univ. di Parma, 1999.

PETITOT J. Plusieurs articles, dont un pre-print avec Tondut, voir http ://www.ehess.fr/centres/cams/person/petitot.html

PROCHIANTZ A. **Les anatomies de la pensee**, Odile Jacob, 1997. Review/article in http ://www.dmi.ens.fr/users/longo.

RIEMANN B. « On the hypothesis which lie at the basis of geometry », 1854 (english transl. by W. Clifford, **Nature**, 1873 ; trad. italiana di R. Pettoello, Boringhieri, 1999).

RIZZOLATI et al., « Neurons related to reach-grasping arm movements in the rostral part of area 6 (area 6a) », **Experimental Brain Search**, vol. 82, 1990.

SLOTINE J.-J. Plusieurs articles, voir http ://me.mit.edu/research/jjs.html .

TAZZIOLI R. **Riemann**, Le Scienze, Aprile 2000.

THOM R. **Stabilité structurelle et Morphogénèse**, Benjamin, Paris, 1972.

WEYL H. **Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences**, 1927 (english transl., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1949).

---

[1] Dans la tentative d'analyser le raisonnement humain, si peu formel, des systèmes de 'paralogiques', ont été inventés, souvent par des psychologues : logiques non-monotones, pseudo-consistantes... . A ce sujet tout est dit dans le Dictionnaire de [Girard, 2001], où l'on exprime un point de vue certainement 'fort' mais mathématiquement justifié : les mathématiques sont sévères, elles demandent de la profondeur pour être justifiées, des liens significatifs avec d'autres branches. La Logique Mathématique en est très riche : voir, par exemple, la remarquable correspondance Types-Proposition-Catégories (géométriques) en Logique Intuitionniste et ses théorèmes de grandes profondeurs, qui ont leur origine dans les travaux de Kleene, Curry-Howard, Grothendiek, Lawvere... (voir [Lambek, Scott, 1986 ; Asperti, Longo, 1991], pour des introductions). Rien de comparable dans les 'paralogiques'. Le fait est que, sans doute, nous sommes 'non-monotones', 'incohérents'... dans le raisonnement et les pratiques quotidiens, mais ceci n'est que le *symptôme* de l'enracinement des phénomènes cognitifs dans le sens et dans les contextes de nos formes de vie, comme on essayera de souligner. L'analyse symptomatique de la cognition n'a mené aucune part, pour le moment, même pas vers des mathématiques nouvelles ou profondes.