Version préliminaire, incomplète
Commentaires très appréciés
Chapitre IV

Giuseppe Longo
http://www.di.ens.fr/users/longo/

Le système des Types du second ordre et la cohérence de l'Arithmétique.

0. L'essentiel des chapitres précédents : la déduction minimale et le λ-calcul (voir §.0 du chapitre 3)

Les **λ-termes**, qui seront composés seulement de **variables** (x, y, ...) et de termes inductivement formés par les règles logiques (ou de typage) suivantes, minimales, implicatives, et par

- **λ-abstraction** (λx:A.b) et
- **application** (ca).

Règles de typage (ou de déduction : introduction et élimination de "→ ") :

$$\frac{\Delta, [x: B] \ \vdash \ c : C}{\Delta \vdash \lambda x.c : B \to C} \qquad (\to I)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \ b : B \qquad\qquad \Delta \vdash \lambda x.c : B \to C}{\Gamma, \Delta \vdash \ (\lambda x.c)b : C.} \qquad (\to E)$$

La théorie minimale des équivalences ou égalités entre preuves que l'on veut, impose l'égalité de ces deux preuves de C: celle "ad hoc", [b/x]c, et l'autre, (λx.c)b, obtenue par "voie" d'un lemme général, λx.c : B → C. Voilà donc l'axiome pour l'égalité entre preuves qu'il nous faut:

(β) $(\lambda x.c)b = [b/x]c$

dans l'hypothèse que ces deux termes soient bien typés, c'est à dire que b : B, λx.c : B → C (et donc x :B, c : C). L'axiome (β) représente ou codifie, dans le langage λ-calcul, l'équivalence logique, entre une preuve indirecte, via un lemme général, et une preuve spécifique : la déduction de C par une preuve [b/x]c : C, basée sur une preuve b de B (b : B).

Le système des types du second ordre

On passe maintenant à un système qui contient aussi des variables de formules ou de types ("types variables"). Il s'agit d'une extension du système du premier ordre que l'on traitera directement en Théorie des Types, donc avec aussi les termes qui codifient les preuves (par manque de temps nous n'avons pas explicité ces termes au premier ordre: on laisse au lecteur de les insérer dans les déductions de la section 6 par exercice). Le système étendu au second ordre est bien plus complexe, car il mélange variables individuelles, x, y, ... , et variables de types, X, Y, ... On présente donc d'abord la liste des expressions possibles des termes et des types. Les règles de déduction introduiront les termes bien formés (c'est à dire, les preuves admises ou bien formées).

Expressions des termes: $a := x \mid (aa) \mid (aA) \mid (\lambda x{:}A.a) \mid (\lambda X{:}Tp.a)$
Expressions des Types: $A := X \mid Atome \mid (\forall x{:}A.A) \mid (\forall X{:}Tp.A)$

Explicitons aussi la bonne formation des hypothèses, par des règles qui sont une extension de celles (implicites) des calculs précédents.

Hypothèses bien formées: $\Gamma(X : Tp)$, si $X \notin FV(\Gamma)$ (X n'est pas libre dans Γ)

On introduit ensuite les types et les égalités entre types. Le "défie" du système devrait être immédiatement clair au lecteur. Nous définirons la collection des Types, Tp, en introduisant un type, $(\forall X : Tp.B)$, dont la définition se base sur une quantification *sur la collection même*, Tp, que nous sommes en train de définir ... . Cette circularité de définition fut baptisée "imprédicativité" par Poincaré. Elle ne donne pas de contradiction, a priori, comme il souligna, mais certains logiciens en redoute le caractère dangereux, pour l'ordre publique ou mental. Les théorèmes que l'on citera placent cette définition sur un terrain aussi solide que le reste de la connaissance humaine.

Formation des Types et Égalité entre Types:

$$\frac{[X : Tp] \vdash B : Tp}{(\forall X : Tp . B) : Tp} \quad (*)$$

(*) Dans B il n'y a pas de variable libre dont le type dépends de X .

Remarque (le bien fondé des définitions imprédicatives)

Il ne fait pas de doute que la définition de $\forall X : Tp . B$ représente un "cercle vicieux". Revenons sur ses origines logiques. Russell lui attribua la responsabilité des paradoxes et, pour l'éviter, bâtit toute une Théorie des Types, dont le paradigme est resté dans l'histoire. Le choc des paradoxes du début du siècle ne fut pas seulement à l'origine de l'effort de Russell et Whitehead, mais aussi de quelques hésitations, de courte durée, de Hermann Weyl et d'autres, face au bien fondé de ces définitions. L'enjeu est important, car les définitions imprédicatives se présentent partout en mathématique: la définition même des nombres réels, à la Cantor-Dedekind, est imprédicative, la théorie de la mesure de Lebesgue (intégration généralisée) aussi ... . Il ne faut pas confondre l'effort, fait par certains logiciens, d'étudier des cadres prédicatifs pour ces théories, avec une philosophie des "certitudes", qui les inspire. Cet effort technique est louable, car souvent il nous donne des preuves basées, si possible, sur des principes plus faibles, ce qui est toujours une information importante (pour le moment, par contre, la mesure de Lebesgue n'admet pas d'approche prédicative). La philosophie qui parfois l'inspire est au moins douteuse, car la connaissance humaine elle même est "imprédicative" : les polarité sujet-objet, la co-constitution de tout élément de connaissance… Si les mathématiques veulent y contribuer, l'étude de l'imprédicativité en est un des enjeux que l'on doit affronter en regardant de près le sens logique et mathématique (catégorique, par exemple) des difficultés.

En particulier, le théorème de normalisation, que l'on citera plus bas, est un exemple majeur de défie intellectuel de ce cercle vicieux apparent (en effet, vertueux, comme toute forme de connaissance "réflexive" ou qui comprend la partie par le tout). Sa preuve est un petit chef d'oeuvre qui évite la circularité, tout en y allant tout près; en assurant l'existence de preuves directes pour tout théorème dans le système, elle en garantie la cohérence, ainsi que celle de l'Arithmétique. D'autres théorèmes récents donnent des informations sur les raisons pour les quelles ce théorème surprenant fonctionne et justifient ultérieurement la solidité conceptuelle des définitions imprédicatives (voir la remarque finale).

Toujours dans une quête d'une plus grande précision, bien nécessaire dans ce cas délicat, introduisons les types universels ainsi que les égalités entre les termes qui codifient leur introduction et élimination (les hypothèses non essentielles ne son pas explicitées). Ce système est une extension du premier ordre déjà vu, mais avec termes (donc en Théorie des Types)

Quantification Universelle *(introduction, élimination, égalité)*:

$$(\forall^2 I) \qquad \frac{[X : Tp] \ \vdash \ b : B}{(\lambda X : Tp\, .\, b) : (\forall X : Tp.\, B)}$$

$$(\forall^2 E) \qquad \frac{f : (\forall X : Tp\, .\, B) \qquad A : Tp}{(fA) : [A/X]B}$$

$$(\forall^2 \beta) \qquad \frac{[X : Tp] \ \vdash \ b : B \qquad A : Tp}{(\lambda X : Tp.b)A = [A/X]b \ : [A/X]B}$$

9.1 Définition: *PN_2 est le système déductif ainsi défini et λP_2 est le calcul de ses démonstrations (comme termes).*

L'invention du second ordre en Théorie des Types, appelé système *F*, est due à Girard, en 1971. Le système $\mathbf{PN_2}$ dessus est un fragment (revu) du "Calcul des Constructions" de Coquand et Huet ([Coquand&Huet,1985]), qui en est directement inspiré. Il s'agit de systèmes logiques intuitionnistes où les types sont les propositions.

9.2 Remarque: (i) - Quand $(\forall I)$ est utilisé dans une liste Γ d'hypothèses, X n'est pas libre dans des hypothèses non effacées, par la même raison qu'au premier ordre.
(ii) S'il n'y a pas de variables de termes, libres dans les types, λP_2 coïncide avec le système *F* de Girard, ou λ-calcul du second ordre, car $A \rightarrow B \equiv \forall x{:}A.B$.

Dans la logique du second ordre, il y a un fait qui est très élégant et témoigne sa grande expressivité: les connecteurs $\{\wedge, \vee, \exists\}$ et l'absurde $\perp$ sont dérivables, dans le fragment purement implicatif, $\mathbf{PN_2}$, basé seulement sur $\forall$ and $\rightarrow$.

9.3 Définition: $\perp \equiv \forall X : Tp.X$.

Il est correct de considérer $\perp$ "l'absurde" ou le prédicat constamment faux, grâce au théorème suivant. Il démontre que "ex falso quodlibet", ou que (1) est une règle dérivée, et que "si on peut démontrer n'importe quelle proposition (type), alors on peut démontrer le faux" (2).

9.4 Théorème ($\perp$-élimination et introduction).

$$(1)\quad \frac{\perp \qquad A : Tp}{A} \qquad\qquad (2)\quad \frac{X : Tp \ \vdash b : X}{(\lambda X : Tp.b) : \perp}$$

Pr. En effet, on peut même donner une version en Théorie des Types de (1), la règle de l'absurde de la Logique Intuitionniste, comme règle dérivée:

(1) Soit $a : (\forall X : \mathrm{Tp}.X) \equiv \perp$ et $A : \mathrm{Tp}$ un type quelconque:

$$\frac{a : (\forall X : \mathrm{Tp}.X) \qquad\qquad A : \mathrm{Tp}}{(aA) : A} \qquad (\forall^2 E)$$

(2) La deuxième inférence est une application immédiate de $(\forall^2 I)$. #

9.5 Définition:

$A \wedge B \equiv \forall Y : Tp.((A \rightarrow (B \rightarrow Y)) \rightarrow Y)$

$A \vee B \equiv \forall Y : Tp.((A \rightarrow Y) \wedge (B \rightarrow Y) \rightarrow Y)$.

Le théorème suivant démontre que le règles d'introduction et d'élimination de "$\wedge$ " sont dérivables.

9.6 Théorème ($\wedge$-introduction et d'élimination).

$$1)\quad \frac{a : A \qquad\qquad b : B}{\lambda X : Tp.\lambda p : (A \rightarrow (B \rightarrow X)).pab : (A \wedge B)} \quad ; \quad 2)\quad \frac{a : A \wedge B}{aAK_{\lambda} : A} \ .$$

Pr. (voir notes sect 9-10) #

Voila enfin la définition du quantificateur existentiel du second ordre.

9.7 Définition:

$$(\exists^2\mathrm{def}) \quad \exists X : Tp.A \equiv \forall Y : Tp.((\forall X : Tp.(A \rightarrow Y)) \rightarrow Y) \ .$$

On peut aussi dériver le quantificateur existentiel du premier ordre, en écrivant, pour B : Tp ,

$$(\exists\text{def}) \qquad \exists x : B.A \equiv \forall Y : Tp.((\forall x : B.(A \rightarrow Y)) \rightarrow Y) \ .$$

Dans les deux cas la signification intuitive de "∃" peut être comprise en instantiant Y par $\perp$. Très informellement, si $\neg A$ ($\equiv A \rightarrow \perp$) est la négation de A :

$$\exists X : K.A \ \cong \ \neg \ \forall X : K.\neg A$$

pour $K : Tp$ ou $K = Tp$. Toutefois, " ¬ ", "∃", si défini de cette façon, ne donneraient pas les résultats suivants, car on serait retombés dans un système classique, sans termes qui codent les preuves.

9.8 Définition (paire):

$$<a,b>_A \equiv \lambda Y : Tp.\lambda x : (\forall X : Tp.A \rightarrow Y).xab \ .$$

9.10 Théorème ($\exists^2$-introduction).

$$(\exists^2 I) \qquad \frac{B : Tp \qquad\qquad b : [B/X]A}{<B,b>_A : (\exists X : Tp.A)}$$

Pr. (voir notes sect 9-10) #

Aussi ($\exists^2$E) est une règle dérivée:

9.11 Théorème ($\exists^2$-élimination).

$$(\exists^2 E) \qquad \frac{a : \exists X : Tp.A \qquad\qquad [X : Tp \, , \, x : A] \vdash c : C}{aC(\lambda X : Tp.(\lambda x : A.c)) : C} \qquad f \ x,X \notin FV(C) \ .$$

Pr. (voir notes sect 9-10) #

9.13 Remarque. (Sur les règles (∃E), premier et second ordre).

(i) La règle dérivée ($\exists^2$E) n'a pas les projections au sens de (∃E) au premier ordre.

(ii) On peut dériver une règle du premier ordre

$$(w\exists E)\quad \frac{\langle b,a\rangle_A : (\exists x': B.A) \qquad [x': B, x : A] \vdash c : C}{(\langle b,a\rangle_A)C(\lambda x': B.(\lambda x : A.c)) : C} \quad \text{pour } x',x \notin FV(C)$$

qui admet donc la première projection (mais pas la deuxième).

Réduction et élimination des coupures.

Dans la §.5, nous avons introduit une notion de réduction pour les termes du λ–calcul, basé sur la possibilité de "simplifier", dans une preuve, une alternance de $(\rightarrow I)$ et $(\rightarrow E)$, qui se présente dans l'ordre:

$$\frac{\Gamma \vdash b : B \qquad \dfrac{\Delta, x: [B] \vdash c : C}{\Delta \vdash \lambda x.c : B \rightarrow C}(\rightarrow I)}{\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.c)b : C.}(\rightarrow E)$$

Le théorème 2.1, d'autre part, nous a montré que c'est justement cette alternance de $(\rightarrow I)$ et $(\rightarrow E)$ qui permet de déduire la règle (Comp), c'est à dire d'introduire des "coupures". $(\beta_>)$ représente, par des calculs sur termes, cette réduction des preuves:

$(\beta_>)$ $\quad (\lambda x.c)b > [b/x]c$

L'élimination de l'alternance correspondante, au second ordre, de $(\forall^2 I)$ et $(\forall^2 E)$ est décrite par:

$(\forall^2\beta_>)$ $\quad (\lambda X : Tp.b)A > [A/X]b$.

Ces réductions représentent la possibilité de simplifier les preuves codées par $(\lambda x.c)b$ et $(\lambda X : Tp.b)A$ à des preuves directes, sans coupures, $[b/x]c : C$ et $[A/X]b : [A/X]B$, respectivement.

9.14 Définition. *Un terme est en* ***forme normale*** *s'il ne contient pas de sous-termes aux quels puisse s'appliquer l'axiome* $(\beta_>)$.

Donc un terme est en forme normale, quand il ne contient pas des sous-termes qui représente des coupures, comme $(\lambda x.c)b$ ou $(\lambda X : Tp.b)A$. Donc, la preuve qu'il codifie est "sans coupures".

9.15 Théorème (Normalisation) *Tout terme en* $\lambda P2$ *se réduit à une forme normale.*

Ce théorème garantie que toute preuve peut être simplifié ou réduite à une structure "minimale": on ne pourra plus effectuer des réductions $(\beta_{>})$ ou $(\forall^2\beta_{>})$. Sa démonstration est extrêmement complexe, en particulier pour $\lambda P2$ où on démontre directement une forme forte (normalisation forte: pour tout terme, *tout* parcours de réduction conduit à une forme normale).

Remarques sur la preuve de normalization

Les enjeux de la preuve sont, en bref, les suivants. D'abord, une "forte charge inductive" (dans "l'hypothèse inductive", on suppose beaucoup plus que la normalisations des termes, pour la démontrer). Question sécondaire, mais intéressante, dans l'induction il y a une utilisation "essentielle" du lemme de Koenig. Ce lemme n'est pas constructif, dans le sens de l'intuitionnisme orthodoxe. Il dit: "tout arbre infini à branchement fini possède une branche infinie". Le problème est que, même si les noeuds de l'arbre sont étiquettés et l'arbre est "effectivement engendré" (il est construit par une fonction, un processus calculable), un ordinateur ne pourrait pas trouver la branche infinie (plus précisément: on ne peut pas donner une règle, écrire un programme, de génération de la branche infinie, car l'ordinateur devrait faire des allées retour exploratifs, en effaçant et reconstruisant sa mémoire d'une façon non effective).

Une question centrale, c'est que la preuve demande une utilisation pleine de "l'axiome de compréhension" du second ordre $\exists X.\forall x(x\in X \leftrightarrow A(x))$, qui permet de "construire" un type à partir d'une formule A arbitraire. La compréhension est utilisée pour collectionner dans un type, les « candidats de réductibilité » RED, des termes qui sont supposés posséder la forme normale, dans une hypothèse inductive extrêmement lourde. Cette opération est un plongement d'une opération métathéorique dans la théorie et casse par cela, dans la preuve, la distinction métathéorie vs. théorie. Ceci est déjà évident si on regarde la propriété qui caractérise les candidats de réductibilité des types flèches :

$$a\in RED_{A\to B} \quad \text{si et seulement si} \quad \forall x\,(x\in RED_A \rightarrow ax\in RED_B)$$

On ne peut donc pas caractériser a par une induction directe, car RED_A apparaît à gauche d'une flèche. Il est donc nié (sa complexité augmente) et un quantificateur universel apparaît. C’est-à-dire, on ne peut pas exprimer cette opération, $c \in RED_C$ qui collectionne les termes du type C dans RED_C, par un formule arithmétique en c et C.

Mais il y a pire : considérons a : $(\forall X : Tp.\ B)$. Alors a serait réductible ssi aA : $[A/X]B$ est réductible pour tout type A, y compris pour $A = (\forall X : Tp.\ B)$ lui-même (!), suite à l’imprédicativité de la définition de type. La forte charge inductive permet de limiter, de façon métatéorique la selections des candidats de réductibilité.

Soulignons encore une fois qu’une des raison pour ce détour est qu’il n’est pas possible de stratifier les types, car une variable de type, même dans un terme, peut-être instantiée par tout type, y compris le type du terme lui-même. A fortiori, on ne peut donc pas procéder par induction sur la longueur/structure des termes, car un terme peut contenir une variable de type. Toutefois, la dépendance des termes par rapport aux types est très “uniforme”, ce que l’on expliquera plus bas, en revenant sur l’imprédicativité (en nous référant au théorème de “généricité”). Cela permet de négliger la *valeur spécifique* d’un type présent dans un terme (les types sont “fonctionnellement génériques”, on expliquera – bref, leur valeur spécifique n’a pas d’effet sur les calculs du terme, où ils apparaissent, si on considère le terme comme une fonction ayant des types comme arguments).

La preuve utilise alors, pour procéder également de façon inductive, une induction combinée sur les types (au second ordre) et, simultanément, sur les opérateurs sur les types (troisième ordre). Plus précisement, on démontre, dans l’arithmétique du troisième ordre PA_3 (si on veut tout formaliser),

$$PA_3 \vdash \forall x \exists y.Norm(x,y)$$

par une double induction combinée au deuxième et au troisième ordre, non pas par induction sur x, une variable du premier ordre. Bien évidemment, alors, si PA_3 est cohérente (plus précisément 1-cohérente), alors $\forall x \exists y.Norm(x,y)$ est vrai dans le modèle standard, et le terme codé par x, possède une forme normale, codée par y.

Observons maintenant que, si $\forall x \exists y.Norm(x,y)$ est vrai sur les entiers, alors

$$\text{pour tout } n,\ PA \vdash \exists y.Norm(n,y)$$

(par inspection des entiers l’un après l’autre : $\exists y.Norm(n,y)$ est un énoncé existentiel).

Bref, sur la base de tout ce qu’on a dit, la "compréhension imprédicative" ne permettent pas de donner cette preuve par induction sur x dans l'Arithmétique (du premier ordre ; voir [Girard&al.1989] et [Coquand&Huet,1985] pour les détails). Mais ce sera le deuxième théorème d'Incomplétude garantie formellement ce fait, car le théorème de normalisation implique la cohérence de l'Arithmétique. Plus précisément, la cohérence est impliquée par le corollaire suivant du théorème de normalisation:

9.16 Théorème (la propriété de la sous-formule) *Dans une preuve sans coupures, toute formule est une sous-formule de la thèse ou d'une des hypothèses non- déchargées.*

Pr. Seulement les formules qui sont "coupées" par des règles de coupure introduisent des formules pas inscrites dans les hypothèses ou la thèse. #

10. Normalisation et Cohérence.

Le théorème de normalisation que nous venons de voir permet, en effet, de démontrer la cohérence de l'Arithmétique du second ordre. C'est à dire de l'extension HA_2 du système HA que nous avons vu dans la §.?*. Cette extension est considéré comme une formalisation de l'Analyse Mathématique: celle-ci étudie, en premier lieu, les nombres réels, qui sont des ensembles de nombres entiers, donc une notion du second ordre.

Pour obtenir HA_2 il faut ajouter à l'Arithmétique du premier ordre, une règle d'introduction des propositions (ou types) du second ordre, comme plus haut

$$\frac{[X : Prop] \vdash B : Prop}{(\forall X : Prop.\ B) : Prop^{(*)}}$$

(*) Dans B il n'y a pas de variable libre dont le type dépends de X,

ainsi qu'une règle d'élimination, correspondante à ($\forall^2$E).

L'idée, c'est de traduire HA_2 dans $\lambda P2$ de façon que si un théorème est démontrable dans HA_2, il le soit aussi dans $\lambda P2$. Donc, si HA_2 démontre une contradiction, $\perp$, aussi $\lambda P2$ la démontrerait. Mais ceci est impossible, par le théorème de normalisation et la propriété de la sous-formule.

La traduction de HA_2 dans $\lambda P2$ est simple (voir [Girard&al.1989], pour les détails). Tout en suivant l'analogie "proposition comme types" qui a guidé cet exposé, il suffit d'associer à chaque formule de HA_2 un type de $\lambda P2$. En bref,

HA_2	$\lambda P2$
Égalité entre termes	Êgalité entre termes
X, Y, ... $A \to B$, $A \times B$, $A+B$	X, Y, ... $A \to B$, $A \wedge B$, $A \vee B$
$\forall x : A.B$, $\exists x : A.B$	$\forall x : A.B$, $\exists x : A.B$
$\forall X : Prop.A$, $\exists X : Prop.A$	$\forall X : Tp.A$, $\exists X : Tp.A$

$\lambda P2$ est suffisamment puissant pour que l'on puisse y représenter l'axiome d'induction. Plus précisément, dans $HA2$, on peut s'en passer de l'axiome d'induction du premier ordre, car la quantification du second ordre en permet d'en dériver une forme assez forte. En particulier, la quantification imprédicative permet de définir les entiers, dans la théorie:

$$\mathrm{Nat}(y) \equiv \forall X{:}\ \mathrm{Prop}.(0\in X \rightarrow (\forall x.(x\in X \rightarrow Sx\in X) \rightarrow y\in X))$$

Dont l'induction, si relativisée à Nat:

$$\textbf{(Ind.)}\quad [0/x]A \rightarrow \forall y.(\mathrm{Nat}(y) \rightarrow ([y/x]A \rightarrow [Sy/x]A)) \rightarrow \forall x.(\mathrm{Nat}(x) \rightarrow A)$$

La traduction plus haut transcrit dans $\lambda P2$ toutes les propositions de $HA2$, y compris Nat et **(Ind.)**.

Remarque (encore sur le bien fondé des définitions imprédicatives)

(i) Dans les premières sections nous avons vu comme les principes de preuves de la logique intuitionniste correspondent exactement à des principes de construction géométriques ou, plus généralement, catégoriques. En particulier, la conjonction "×" *est le* produit catégorique, l'efficace généralisation du produit cartésien de la géométrie. Observez maintenant que la quantification universelle aussi est une conjonction. Si, par exemple le domaine de quantification est A et on fixe informellement $A = \{a_1,a_2,a_3\ ...\}$, si possible infini, la signification intuitive de $\forall x : A.B$ est celle d'une conjonction infinie: $B(a_1)\times B(a_2)\times B(a_3)\ ...$. Donc, elle est un produit infini ou indexé sur un ensemble, un objet, a priori quelconque: on pourra écrire, par un abus de langage qui mélange entre autres la syntaxe et la sémantique mathématique, $\prod_{a\in A}B(a)$. La Théorie des Catégories donne des notions très précises qui correspondent, avec rigueur, à cette intuition de produit infini, dans le cas du premier ordre, depuis les travaux de Lawvere, ainsi qu'au second ordre (voir [Lambek&Scott,1989; Asperti&Longo,1991]).

En bref, on avait appelé cartésienne une catégorie fermée par produit finis, c'est à dire, telle que pour toute paire (collection finie) d'objets on peut construire, dans la catégorie, leur produit catégorique ou la catégorie est fermé par produit finis. L'existence du produit n'est donc qu'une propriété de *fermeture* de certaines catégories. Au premier ordre, si $\prod_{a\in A}B(a)$ est un produit indexé sur un objet A d'une catégorie (notation très informelle), il faut que ce produit soit un objet de la catégorie elle même.

Dans le cas du second ordre, le défi de l'imprédicativité se présente de la façon suivante. Si on peut "voir" une catégorie **C** comme un objet C d'une catégorie "ambiante" **D**, dont elle est aussi une sous-catégorie, $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{D}$, il faudra d'abord que $\prod_{a \in C} B(a)$ soit un objet en **D**, mais aussi que $\prod_{a \in C} B(a)$ soit en **C**, voir [Longo, Moggi, 1991]. En bref, que C soit "fermée par des produits indexés sur elle même": voila la circularité de l'imprédicativité. Encore une fois, une propriété de fermeture mathématique donne un sens très solide à une notion logique, les définitions imprédicatives de la Théorie des Types. On peut construire plusieurs catégories avec cette propriété de fermeture (voir [Asperti&Longo,1991]).

(ii) Carnap, dans un article de 1931 sue Erkenntnis, défend contre Russell l'utilisation en Mathématiques des définitions imprédicatives. Son argument, en bref, est le suivant. L'enjeu d'une propriété mathématique est dans la possibilité de la démontrer (ou de pouvoir l'utiliser dans une preuve). Mais, comment prouvons-nous, en mathématiques, une propriété donnée sous forme imprédicative, disons $\forall X: Prop.A$?

Normalement, on ne va pas "inspecter" tous les cas possibles, c'est à dire on ne démontre pas $[B/X]A$ pour tout B, ce qui inclurait le cas $B \equiv \forall X: Prop.A$, en odeur de circularité. Plutôt, on démontre $[B/X]A$ pour B *arbitraire* ou *générique*. Par exemple, on démontre une propriété $P(x)$ des nombres réels, en prouvant $P(r)$ pour r arbitraire; le point essentiel, étant que l'on n'utilise dans la preuve que le "type" de r et aucune autre proprité (spécifique) de r.

En Théorie des Types l'analyse des preuves est suffisamment fine pour nous permettre de mieux définir ce que c'est qu'une preuve "générique" et un résultat récent rend aussi solide que le béton les définitions imprédicatives à son intérieur. Dans le système $\lambda P2$, la preuve de $[B/X]A$ est un terme $a : [B/X]A$. On dira que B est **générique**, s'il existe $a': A$ tel que $[B/X]a' = a : [B/X]A$. Par l'axiome (β), cela nous permet d'abstraire une preuve de l'énoncé général:

$$\lambda X : Tp.a' : (\forall X : Tp.A).$$

Dans la terminologie de Herbrandd, on dira alors que a' est une preuve prototyte de $[B/X]A$. Est-que la définition de généricité et de preuve prototype est une bonne définition? Est-ce qu'elle donne d'un façon "canonique" une preuve de $\forall X: Tp.A$? Pour une simple extension de la théorie de l'égalité entre termes de $\lambda P2$ on a le résultat suivant:

Théorème (Généricité). *Si* $a', a'' : \forall X : Tp.A$, *alors*

si pour un type B , $[B/X]a' = [B/X]a''$, *on a en effet* $a' = a''$.

La démonstration est extrêmement complexe (voir [Longo&al.,1993]). Elle assure que, si, sur un seul type B, a' et a'' coïncident, alors il sont égaux partout. Donc, dès que l'on sait que a est une preuve générique, on a une preuve et une seule de la proposition (le type) universel (le théorème n'est évidemment pas vrai pour la quantification au premier ordre). En conclusion, au moins pour ce qui en est à la Théorie des Types, la méthode mathématique "des preuves génériques" est bien licite et solide, même (et surtout) dans le cas imprédicatif.

Bibliographie : fichier à part, téléchargeable.