Version préliminaire, incomplète
Commentaires très appréciés

NOTES DE COURS, DEA Cognition

Giuseppe Longo
CNRS et DI - Ecole Normale Supérieure

Ch.1

Propositions et Types

1. Introduction.

La logique mathématique, en tant que **métamathématique**, a pour *objet d'étude* les mathématiques, ses langages et ses méthodes déductives, comme la géométrie, pour prendre l'exemple d'une discipline proprement mathématique, a pour objet d'étude les figures et les structures de l'espace. On peut donc imaginer une stratification à trois niveaux: les structures géométrico-algébriques, les théories mathématiques qui les étudient (arithmétique, algèbre, géométrie...) et, enfin, les métathéories qui traitent des théories mathématiques (la théorie de la démonstration ou, plus généralement, la logique mathématique). En d'autres termes, du point de vue des calculs et des langages, l'algèbre linéaire et la géométrie analytique étudient (des expressions concernant) les propriétés des lignes et des surfaces du plan ou de l'espace; la Théorie de la Démonstration, étudie les démonstrations formelles[1]. Les développements récents de la Théorie de la Démonstration ont vu une revitalisation d'une théorie dont le nom et certains aspects logiques, datent de Russell: la Théorie des Types. Une théorie toutefois, contrairement à celle de Russell, qui

[1] Cette hiérarchie de niveaux n'est pas, toutefois, une hiérarchie d'abstraction. La métamathématique est une branche des mathématiques: ses méthodes et techniques de construction et preuve sont mathématiques; ses objets d'études, les preuves, comme constructions mentales, ne sont pas plus abstraites que maints objets des mathématiques. Dans un certain sens, c'est bien ce que démontrent les théorèmes de Gœdel, dont on parlera: les *règles du jeu* métamathématique ("finitaires") sont les mêmes que celles de cette théorie mathématique, l'Arithmétique, qui en est l'objet.

"organise" les fonctions, plutôt que les ensembles. La correspondance entre Logique Constructive et Théorie des Type est complète: les types correspondent aux propositions logiques et les propositions aux types. L'avantage est que les types "classifient" ou "hiérarchisent" des termes, des calculs formels en fait, qui représentent explicitement les démonstrations de la Logique.

Dans cet esprit on introduira le lambda-calcul, en tant que langage qui "manipule" des termes ou des expressions qui codifient des démonstrations. En fait, les expressions de ce langage représentent des démonstrations mathématiques abstraites et, donc, les calculs effectués sur celles-ci correspondent à des opérations formelles effectuées sur des démonstrations, plutôt que sur des lignes ou des surfaces. Le fait que le lambda-calcul soit programmable, et qu'il soit en particulier un langage de programmation paradigmatique, a aussi permis de décrire le passage de la théorie de la démonstration, en tant que théorie abstraite de logique mathématique, à la démonstration automatique et au calcul symbolique, comme méthode mathématique pour ordinateurs.

Quoique l'on parlera de la théorie de la démonstration en général, nous allons souligner ici l'approche "constructiviste", puisque la théorie de la démonstration constructive est celle qui présente le plus de résultats, par le fait même d'expliciter les *preuves* et leur syntaxe formelle (comme termes d'un calcul), plus que la théorie classique, et dont l'interprétation, sur des structures mathématiques (les *catégories*), est la plus claire et développée. En particulier, cette approche permettra aussi de mentionner le rôle de la *Théorie des Catégories* dans la *sémantique mathématique* de la déduction. Grâce à cette sémantique on peut en effet "revenir aux mathématiques" en donnant une signification "géométrique" ou structurelle aux preuves. On ferme ainsi un de ces "cercles vertueux" ou réflexifs qui sont au centre de la compréhension mathématique: le jeu entre syntaxe et sémantique. Voilà donc, en bref et en partie, les raisons "philosophiques" du choix de l'auteur de ces notes[2]. Le but de celles-ci est en particulier de donner quelques idées sur la relation triangulaire:

---

[2] «La preuve fait partie du sens du théorème démontré», comme dit Wittgenstein. En fait, il continue, la preuve «nous montre ce que nous croyons»; autrement dit, elle met en évidence le "principes de preuve" que nous utilisons. Ceci motive l'analyse des preuves. Mais la signification d'un théorème est aussi dans "l'unité des Mathématiques", pour paraphraser Lautman. Cette unité, toutefois, ne doit pas être conçue comme unité métaphysique, univers formel ou platonicien unique et figé, mais comme "réseau" dynamique de théories, "passages" d'une théorie à l'autre, traduction et enrichissement d'une méthode de preuve ou construction par un autre ... . On soulignera donc le rôle des preuves ainsi que leur signification (sémantique) par "transcription" dans des structures mathématiques construites par d'autres méthodes. En particulier, on comprendra des "principes de preuve" en termes de "principes de construction" (et viceversa).

$$\begin{tikzcd} \text{Propositions} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{Types} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \text{Categories} & \end{tikzcd}$$

Gentzen, Heyting, Church (années 30), Prawitz et Girard sont parmi les auteurs de référence pour les théories dont on parlera. La sémantique catégorielle, pour le peu que l'on en mentionnera, a son origine dans les travaux de Lawvere, Lambek, D. Scott (Hyland, Moggi et maints autres, dont l'auteur de ces notes, l'ont appliquée à la sémantique des définitions et théories d'ordre supérieur - imprédicatives - et leurs applications)

2. La Déduction Naturelle.

L'idée de base des systèmes de déduction naturelle, auxquels nous nous référons, est la formalisation de la notion de *règle* et de *dérivation logique*, entendue comme abstraction de la déduction mathématique. Le pas déductif minimum est donné par l'application d'une **règle d'inférence** qui décrit la déduction d'une conséquence, disons C, à partir de prémisses ou hypothèses données, par exemple $A_1, A_2 ...., A_n$:

$$\frac{A_1 \quad A_2 \qquad\quad A_n}{C}$$

Les règles peuvent être composées verticalement, c'est-à-dire, étant donné les règles

$$\frac{A \quad B}{D} \qquad\qquad \frac{C}{E} \qquad\qquad \frac{D \quad E}{C}$$

il est licite de les composer dans une déduction (ou **arbre déductif**) de E sous les hypothèses A, B, C, de la façon suivante :

$$\cfrac{\cfrac{A \quad B}{D} \qquad \cfrac{C}{E}}{\cfrac{C}{E}}$$

Des points de suspension verticaux sous-entendent une déduction formée de la composition verticale de plusieurs règles :

$$(1) \qquad \begin{array}{c} A_1 \quad A_2 \qquad\quad A_n \\ \vdots \\ B \\ \hline C \end{array}$$

Dans ce cas, on dira que C (la **conclusion**) est une **conséquence logique** de A_1, A_2, ... A_n (les **hypothèses**). Une déduction aussi peut être une hypothèse: on pourra donc écrire horizontalement les déductions et on représentera la déduction en hypothèse en (1) comme

$$A_1, A_2, \dots A_n \vdash B.$$

Avec un petit abus de langage, on pourra appeler toute déduction $\Gamma \vdash B$ **séquent** où Γ est un ensemble ou séquence non-ordonnée d'hypothèses. C'est-à-dire, on pourra "rassembler" une partie des hypothèses dans des séquences finies Γ, Δ .... Par exemple, si $\Gamma = A_1, A_2, \dots A_{n-1}$, on écrira (1) aussi comme

$$\frac{\Gamma, A_n \vdash B}{C}$$

(et on passera indifféremment de l'une à l'autre notation).

Une **démonstration** ou **preuve** est un arbre fait d'applications successives de règles d'inférence. La racine, qui est en bas, est le théorème démontré. Ce qui nous intéressera plus particulièrement ce sont les métathéorèmes, c'est-à-dire les propriétés du calcul déductif ou, plus exactement, du calcul des termes associés aux théorèmes.

Que peut-on prétendre, au minimum, de la notion de conséquence logique? Quelles sont les toutes premières règles à poser? Que la conséquence logique soit "identique" et qu'elle "se compose":

Règle d'identité

$$(\mathrm{Id}) \quad \Gamma, A \vdash A$$

Règle de composition

$$(\mathrm{Comp}) \quad \frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \vdash C}$$

On appelera aussi la règle de composition, règle de **coupure** (en B). Les hypothèses Γ et Δ peuvent être vides, évidemment.

Ce système très pauvre peut déjà nous permettre une première réflexion, au moins sur l'opération de composition logique. Ce sera un exercice sur les preuves en tant qu'objet d'étude: un cas très simple d'équivalence ou égalité de preuves. Considérons la composition des trois déductions suivantes:

$$A \vdash B \quad \text{et} \quad B \vdash C \quad \text{et} \quad C \vdash E.$$

On peut composer ces déductions dans cet ordre (les deux premières d'abord):

$$\frac{\dfrac{A \vdash B \qquad B \vdash C}{A \vdash C} \qquad C \vdash E}{A \vdash E}$$

ou dans l'ordre suivant (la deuxième et la troisième d'abord):

$$\dfrac{A \vdash B \qquad \dfrac{B \vdash C \qquad C \vdash E}{B \vdash E}}{A \vdash E}$$

Il est tout à fait raisonnable de supposer que ces deux preuves de la déduction ou séquent $A \vdash E$ soient "équivalentes". Essayons donc d'exprimer le concept d'équivalence de preuve, pour ces démonstrations évidentes. Ils s'agit évidemment de deux arbres: si on arrive à donner un "nom" à ces arbres de preuve, l'égalité de ces deux noms pourrait être un critère d'équivalence. Il faudra toutefois que ces noms soient formés en composant les noms pour les séquents de base, selon la structure de l'arbre de la preuve.

Pour abréger appelons f la déduction $A \vdash B$ ci-dessus, et g et h les deux autres. On dénote aussi par "$\circ$" la composition: donc $g \circ f$ est un nom pour $A \vdash C$. On a alors deux noms, ou notations métalinguistiques, pour les deux preuves ci-dessus de $A \vdash E$: la première est $h \circ (g \circ f)$, d'abord f et g, puis h, l'autre $(h \circ g) \circ f$, d'abord f, puis g et h.

Tout en restant dans le métalangage, l'équivalence de ces deux preuves est formalisée par

$$(= \text{Comp}) \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Si on appelle id_A la déduction $A \vdash A$, il est aussi raisonnable, pour toute déduction f, nom de $A \vdash B$, de supposer

$$(= \text{Id}) \quad f \circ id_A = f = id_B \circ f$$

On laisse au lecteur le soin de reconstruire les deux preuves dont l'équivalence est formalisée par l'axiome (=Id).

Appelons alors **calcul compositionnel**, le système de propositions et preuves dont les règles d'inférence sont (Id) et (Comp), pour les propositions, et les axiomes sont (=Id) et (=Comp), pour les (codes des) preuves.

Dans la suite, on définira un *langage objet*, dans lequel coder les preuves, et qui nous permettra, entre autres, de démontrer (= Comp) et (= Id) ou leur transcription linguistique.

L'implication linguistique

Pour l'instant, nous avons exprimé la déduction "$\vdash$", comme relation entre formules d'un langage objet simple, composé seulement d'une collection de formules. Cette relation est *métalinguistique*, en tant que regard "d'en haut" sur le système des formules.

Le **système implicatif minimal** a pour formules, en plus des formules atomiques, A, B, C..., les **implications** entre formules, $(A \to B)$, et rien d'autre. L'implication entre formules, "$\to$", à l'intérieur du langage donc, permet d'exprimer *dans le langage* la déduction métalinguistique. Pour l'introduire, quand les hypothèses sont elles mêmes des déductionss, comme dans le cas (1), on utilisera une notion fondamentale, celle *de déchargement*. On déchargera l'hypothèse A de laquelle dérive B, si une telle dérivation est une prémisse dans la déduction de la formule $A \to B$. En fait, la vérité de $A \to B$ ne dépend pas de celle de A: on observe que $A \to B$ peut être vraie, même lorsque A est faux. Supposons par exemple avoir déduit que s'il pleut, alors le temps est humide. Dans n'importe quel langage formel avec implication "$\to$" , cette déduction métalinguistique pourra être formalisée comme "il pleut" $\to$ "le temps est humide". Or, une telle implication est vraie, même si on est au milieu d'un désert et il ne pleut pas. On peut donc omettre ou décharger l'hypothèse "il pleut" dans la déduction de "il pleut" $\to$ "le temps est humide", étant donné que l'implication formelle subsiste dans tous les cas, indépendamment de l'hypothèse, et peut être affirmée en toute vérité, même en plein soleil.

Le système implicatif minimal est basé, en termes de déduction naturelle, seulement sur deux autres règles d'inférence: l'introduction de l'implication, $(\to I)$, où [A] indique que A est déchargée, et l'élimination de l'implication, $(\to E)$:

Règle d'introduction	**Règle d'élimination**
$(\to I) \quad \dfrac{\Gamma, [A] \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$	$(\to E) \quad \dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$

Dans $(\to I)$, A est déchargée, dans le sens que nous indiquions ci-dessus, c'est-à-dire que ce n'est pas une hypothèse nécessaire à la validité de $(A \to B)$. La règle $(\to I)$ transfère dans le *langage* des formules la déduction *métalinguistique* $A \vdash B$. C'est-à-dire, elle affirme que de la déduction (métalinguistique) de B à partir de A, on peut déduire la formule, du langage, $(A \to B)$. Le lecteur reconnaîtra dans $(\to E)$ le classique "modus ponens": si A et A implique B, alors B.

En tout premier exercice, voilà un métathéorème très simple qui dit que la règle de composition peut être dérivée à partir de $(\rightarrow I)$ et $(\rightarrow E)$ (les règles utilisées sont indiquées à côté de la ligne d'inférence).

2.1 Théorème *(Comp) est dérivable de $(\rightarrow I)$ et $(\rightarrow E)$.*
Preuve. En supposant $\Gamma, A \vdash B$ et $\Delta, B \vdash C$ on déduira $\Gamma, \Delta, A \vdash C$.

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \dfrac{\Delta, [B] \vdash C}{\Delta \vdash B \rightarrow C}\,(\rightarrow I)}{\Gamma, \Delta, A \vdash C}\,(\rightarrow E)$$

⊗

3. Démonstrations comme calculs, Propositions comme Types.

La signification constructive de ce système minimal, basé seulement sur l'implication, est mise en évidence par ce que l'on appelle **l'interprétation de Heyting-Kleene**: une démonstration de $(A \rightarrow B)$ est une procédure de calcul qui transforme toute démonstration de A en une démonstration de B. C'est là le passage clé à la Théorie des Types. Nous verrons que les termes du λ–calcul (λ–termes) formalisent cette interprétation, fournissant explicitement un calcul de preuves. En fait, $c : C$ signifiera que le (λ–terme) c est (le code de) une démonstration effective de la formule C. On trouve dans ces notions l'origine de la Théorie de la Démonstration constructive et de la Théorie de la Calculabilité, les deux nées dans les années 30.

Construisons donc un langage pour parler explicitement des preuves. Autrement dit, définissons les **λ–termes**, qui seront composés seulement de **variables** (x, y, ...) et de termes inductivement formés par

- **λ-abstraction** $(\lambda x{:}A.b)$ et
- **application** (ca).

Selon le projet de Church, ces termes auraient dû formaliser la notion générale de *fonction*. L'idée de Church était de proposer cette notion comme point de départ, fondation, des Mathématiques en alternative à la notion d'ensembles: notion primitive, celle de fonction, dont dériver le reste, y compris la notion d'ensemble. La première version, de 1932, se donna un résultat contradictoire (le paradoxe de Curry); une réduction de son expressivité et une compréhension différente de son rôle sera à l'origine au **λ-calcul sans types**, système très étudié ensuite. Nous introduirons ici une version, dûe aussi à Church, où on évite les contradictions en introduisant la notion de type.

Comme pour la Théorie de Russell, l'univers est organisé et stratifié, en **Types**: chaque terme a du langage appartient à ou, mieux, *possède* un type (syntactique; notation a : A). Donc, si c : C, C est le **type** de c, ou c a type C. En Mathématiques, en Analyse, par exemple, on dirait qu'une fonction réelle f à arguments réels et à valeurs réelles a type $f : R \to R$.

Les λ–termes définissent en effet des fonctions calculables, ou des processus effectifs ou, ce qui nous intéresse, formalisent les preuves en tant que transformations effectives: une déduction mathématique (formalisée) n'est qu'un passage, *construit pas par pas,* des hypothèses aux conclusions. Un pas est l'application d'une règle. En vue de cette analogie entre types et propositions, qui est notre but, on lira indifféremment c : C, comme c a type C ou c démontre C.

Voyons en détail les règles de formation des λ–termes: elle ne sont que la transcription, avec des termes insérés, des règles d'inférence du système de déduction naturelle que l'on vient de voir. En premier lieu, les variables x, y,... sont des termes. La signification des variables, comme preuves, est la suivante: x : A signifie que x, variable de type A, est une démonstration arbitraire, hypothétique, de A et que celle-ci peut être utilisée dans une hypothèse éventuellement déchargée; les hypothèses ultérieures Γ, Δ ... seront donc des séries finies de preuves "hypothétiques" ou d'affectations de types à des variables $\Gamma = x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n$. Supposons ensuite, que d'une preuve arbitraire x de A, c'est-à-dire x : A, on déduise une preuve b de B, c'est-à-dire, b : B. Alors, la règle (→I) donne $A \to B$: dans notre calcul, on notera λx:A.b le terme qui démontre $A \to B$, c'est-à-dire $(\lambda x{:}A.b) : A \to B$. Si enfin $c : A \to B$ et a : A, nous écrirons (ca) pour le terme qui dénote l'application de la preuve c de $A \to B$ à la preuve a de A; celle-ci, par (→E), comme nous l'avons dit plus haut, est une preuve de B, donc ca : B.

Les règles d'inférence définissent donc les λ–termes formellement comme étant

- des variables, x, y...
- des *λ–abstractions* (λx:A.b) d'un terme b par rapport à une variable x, preuve arbitraire de A,
- des *applications* (ca) d'un terme c à un terme a,

pourvu que tout λ–terme soit construit selon les règles. Nous omettrons les parenthèses en l'absence d'ambiguïté[3]. Nous pouvons alors réécrire les règles d'identité, d'introduction et d'élimination comme suit

(Id) $$\Gamma, x : A \;\vdash\; x : A$$

(→I) $$\frac{\Gamma, [x{:}A] \;\vdash\; b : B}{\Gamma \vdash \lambda x{:}A.b : A \to B}$$

(→E) $$\frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Delta \vdash c : A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash ca : B}$$

Les règles explicitent ou *donnent un nom* aux transformations qui font passer, grâce à (→E) par exemple, d'une démonstration a de A et $c \equiv \lambda x{:}A.b$ de $A \to B$, à la démonstration $(\lambda x{:}A.b)a$ de B. On observe enfin que "$\lambda x{:}A$" est une opération d'*abstraction* qui **lie** (par définition) dans $\lambda x{:}A.b$ la variable x, éventuellement libre dans b, c'est-à-dire qu'elle peut apparaître sans être déjà liée dans b. En fait, $\lambda x{:}...$ correspond à $\{x \mid ... \}$ dans la théorie des ensembles ou à l'intégrale $\int ...dx$ en analyse: la signification ou la valeur du terme, de l'ensemble ou de l'intégrale, ne dépend pas du nom de la variable liée, donc $\{x \mid P(x)\}$ est totalement équivalent à $\{y \mid P(y)\}$, $\int f(x)dx$ à $\int f(y)dy$, comme $\lambda x{:}A.b$ est identique à $\lambda y{:}A.b'$, pourvu que b' soit obtenu à partir de b *en substituant uniformément* y à x (nous écrirons: $b' \equiv [y/x]b$, et nous dirons également que x est *renommée* par y dans b).

Nous indiquerons par $\vdash a : A$ la prouvabilité de $a : A$ dans ce système minimal et on dira que a est une *preuve* du *théorème* A, qui ne dépend donc pas d'hypothèses. D'éventuelles hypothèses non effacées seront placées à gauche de "$\vdash$": par exemple, $x : A \vdash b : B$. Pour simplifier, nous pourrons omettre d'expliciter le type A dans le terme $(\lambda x{:}A.b) : (A \to B)$, en écrivant $\lambda x.b$. Un résultat, mentionné ci-dessous, sur la décidabilité de l'affectation d'une preuve à une proposition justifiera cette convention. On observe aussi que les variables libres dans un terme dépendent toujours d'une hypothèse non déchargée : $\lambda y.yz : (C \to D) \to D$, par exemple, s'écrira à la place de $(\lambda y{:}(C\to D).yz) : (C \to D) \to D$, sous l'hypothèse non déchargée $z : C$, c'est à dire

---

[3] **Conventions**: Association à gauche des parenthèses: $ab...d \equiv (...(ab) ... d)$; minimisation des lambda: $\lambda xyz.(...) \equiv \lambda x.\lambda y.\lambda z.(...)$ et des parenthèses $(\lambda x.(a)) \equiv \lambda x.a$.

$$z : C \vdash \lambda y.yz : (C \to D) \to D.$$

Le lecteur intéressé peut étudier et compléter les deux exemples qui suivent, en observant que ceux-ci développent les démonstrations de deux propositions du calcul propositionnel et, en même temps construisent les λ–termes qui en codent les preuves.

3.1 Exemples : $\vdash \lambda xyz.xz(yz) : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
$\vdash \lambda xy.x : A \to (B \to A)$.

Démonstration: (on sous-entend les hypothèses Γ, Δ $\vdash$ ... non utilisées)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[z : A] \qquad [x : A \to (B \to C)]}{xz : B \to C}(\to E) \qquad \dfrac{[z : A] \qquad [y : A \to B]}{yz : B}(\to E)}{xz(yz) : C}(\to E)}{\lambda z.xz(yz) : A \to C}(\to I)}{\lambda yz.xz(yz) : (A \to B) \to (A \to C)}(\to I)}{\lambda xyz.xz(yz) : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))}(\to I)$$

Donc $\vdash \lambda xyz.xz(yz) : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, sans hypothèse, car les hypothèses "ad hoc" sont toutes déchargées, et on a un théorème.

Nous laissons au lecteur la démonstration du deuxième théorème, plus simple. ⊗

Dans l'exemple traité, les hypothèses sont toutes déchargées dans les trois derniers pas déductifs; en particulier, l'antépénultième décharge deux occurrences de l'hypothèse $z : A$. Notons de plus que la structure du terme $\lambda xyz.xz(yz)$ code bi-univoquement l'arbre de la démonstration de la proposition

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

En fait, de façon tout à fait générale, l'ordre des applications et des λ–abstractions correspond exactement à l'ordre dans lequel ont été utilisées les règles (→E) et (→ I).

3.2. Note: Les axiomes "à la Hilbert". Le lecteur expérimenté en logique élémentaire se sera aperçu que les deux propositions démontrées dans l'exemple sont exactement les deux *axiomes* du calcul propositionnel (positif), dont les formules ne contiennent que l'implication et utilisent seulement la règle d'inférence "Modus Ponens", que nous appelons ($\rightarrow$ E). Donc, 3.1 démontre que, avec les deux seules règles ($\rightarrow$E) et ($\rightarrow$ I) (plus la règle (Id) évidemment) et sans axiomes, on peut déduire ces axiomes du calcul propositionnel ((Id) devient l'axiome $\lambda x.x : A \rightarrow A$, par ($\rightarrow$I)). Appelons alors $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ et $K \equiv \lambda xy.x$ les deux termes associés, dans notre système d'inférence, aux démonstrations des deux axiomes. Or, S et K sont les deux "combinateurs" de base, ou constantes (car ils "codent" des axiomes) qui, avec la seule application (a b), c'est-à-dire la règle ($\rightarrow$E), constituent la **Logique Combinatoire** de Curry (1930), version constructive avec codage de preuve, du calcul propositionnel positif (à la Hilbert: avec axiomes).

Réciproquement, un théorème du calcul propositionnel, le *théorème de déduction*, permet de déduire la règle ($\rightarrow$ I), démontrant ainsi l'équivalence logique entre le système de déduction naturelle introduit et ce calcul propositionnel. Puisque nous avons aussi le codage des preuves par des termes, cette équivalence se transfère aux preuves et décrit comment on peut traduire, l'un dans l'autre, le λ-calcul et la logique combinatoire.

4. Conjonction et Disjonction.

On peut facilement élargir le système minimal avec la **conjonction** ou produit logique et la **disjonction** ou somme logique. Il faut d'abord, comme déjà fait pour l'implication, faire une extension du langage en ajoutant, parmi les formules bien formées, aussi $A \times B$ et $A+B$, quand A et B sont des formules.

Les règles suivantes introduisent et éliminent le produit ("and"), en lui associant des termes qui dans ce cas sont formés également des couples $<...,...>$ et de la première et la deuxième projection, p_1 et p_2, en plus des applications et des λ– abstractions. Les règles marquées par un I introduisent des termes et des formules; celle marquées par E les éliminent.

$$(\times I) \qquad \frac{\Gamma \vdash a : A \qquad \Gamma \vdash b : B}{\Gamma \vdash \langle a,b \rangle : A \times B}$$

$$(\times E_1) \quad \frac{\Gamma \vdash c : A\times B}{\Gamma \vdash p_1(c) : A} \qquad\qquad (\times E_2) \quad \frac{\Gamma \vdash c : A\times B}{\Gamma \vdash p_2(c) : B}$$

Observons la signification constructive de l'introduction de la conjonction: la preuve de la conjonction de deux formules est construite à partir des preuves de chaque composante. En plus, si on a une preuve, c disons, d'une conjoncion, on obtient une preuve de chaque composante de la conjonction par les projections: $p_1(c)$ et $p_2(c)$.

La somme logique ("or") est introduite d'une façon dont la nature constructive paraîtra encore plus évidente dans la suite: on pourra déduire A+B si et seulement si on a une preuve de A *ou* de B. Plus précisément, il faut qu'existent des termes q_1 et q_2 qui transforment toute preuve de A ou B (respectivement), en une preuve de A+B.

$$(+I_1) \quad \frac{\Gamma \vdash c : A}{\Gamma \vdash q_1(c) : A+B} \qquad\qquad (+I_2) \quad \frac{\Gamma \vdash c : B}{\Gamma \vdash q_2(c) : A+B}$$

L'élimination de la somme a la signification suivante: si c est une preuve de A+B (sous certaines hypothèses Γ), a et b démontrent une consequence E de A et de B, alors il existe une preuve, que l'on appellerra [a,b]c, de E à partir de Γ.

$$(+E) \quad \frac{\Gamma \vdash c : A+B \qquad \Gamma \vdash a : A \to E \qquad \Gamma \vdash b : B \to E}{\Gamma \vdash [a,b]c : E.}$$

Prenez, pour mieux comprendre, $\Gamma = (x : A+B)$ et $c = x$; les hypothèses donnent alors comme conséquence $x : A+B \vdash [a,b]x : E$. C'est à dire, toute paire de preuves partant de A et B, respectivement, permet de construire une preuve, avec la même conséquence, E, à partir de A+B.

Évidemment l'extension de la Logique Constructive avec ces deux connecteurs, est facilement donnée en effaçant les termes de ces règles. On obtient ainsi un système intuitionniste, dont nous avons présenté ici la version détaillée avec termes comme codage des preuves. Encore une fois le sens constructif de la conjonction et de la disjonction devrait être évident, ainsi que la relation "forte" qui est ainsi établie entre théorie et métathéorie. En effet dans les deux cas on a:

- $\Gamma \vdash A \times B$ si et seulement si $\Gamma \vdash A$ *et* $\Gamma \vdash B$
- $\Gamma \vdash A+B$ si et seulement si $\Gamma \vdash A$ *ou* $\Gamma \vdash B$

On peut facilement remarquer la parfaite correspondance entre la conjonction et disjonction linguistiques et le "*et*", "*ou*" métalinguistiques. Dans le cas de la disjonction, cette correspondance est fausse pour les systèmes non intuitionnistes; dans ces systèmes, en complète asymétrie pour ce qui est le rapport langage/métalangage, on peut avoir, par exemple en présence de négation $\neg A$,

$$\Gamma \vdash A+(\neg A)$$

sans avoir ni une preuve de A ni une preuve de $\neg A$.

La Théorie des Catégories donnera une autre motivation, d'origine mathématique ou même géométrique, au traitement constructif de la disjonction.

Tableau Synoptique 1: Logique Constructive

(Id) $\Gamma, A \mid\!- A$

(Comp) $$\frac{\Gamma, A \mid\!- B \qquad \Delta, B \mid\!- C}{\Gamma, \Delta, A \mid\!- C}$$

($\to$I) $$\frac{\Gamma, [A] \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A \to B}$$

($\to$E) $$\frac{\Gamma \mid\!- A \qquad \Delta \mid\!- A \to B}{\Gamma, \Delta \mid\!- B}$$

($\times$I) $$\frac{\Gamma \mid\!- A \qquad \Gamma \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A \times B}$$

($\times E_1$) $$\frac{\Gamma \mid\!- A \times B}{\Gamma \mid\!- A}$$

($\times E_2$) $$\frac{\Gamma \mid\!- A \times B}{\Gamma \mid\!- B}$$

($+I_1$) $$\frac{\Gamma \mid\!- A}{\Gamma \mid\!- A+B}$$

($+I_2$) $$\frac{\Gamma \mid\!- B}{\Gamma \mid\!- A+B}$$

(+E) $$\frac{\Gamma \mid\!- A+B \qquad \Gamma, [A] \mid\!- E \qquad \Gamma, [B] \mid\!- E}{\Gamma \mid\!- E.}$$

Tableau Synoptique 2: Théorie des Types

(Id)
$$\Gamma, x : A \mid\!\!- x : A$$

(Comp)
$$\frac{x : A \mid\!\!- b : B \qquad y : B \mid\!\!- c : C}{x : A \mid\!\!- [b/y]c : C.}$$

($\rightarrow$I)
$$\frac{\Gamma, [x{:}A] \mid\!\!- b : B}{\Gamma \mid\!\!- \lambda x{:}A.b : A \rightarrow B}$$

($\rightarrow$E)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- a : A \qquad \Delta \mid\!\!- c : A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \mid\!\!- ca : B}$$

($\times$I)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- a : A \qquad \Gamma \mid\!\!- b : B}{\Gamma \mid\!\!- \langle a, b \rangle : A \times B}$$

($\times E_1$)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- c : A \times B}{\Gamma \mid\!\!- p_1(c) : A}$$

($\times E_2$)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- c : A \times B}{\Gamma \mid\!\!- p_2(c) : B}$$

($+I_1$)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- c : A}{\Gamma \mid\!\!- q_1(c) : A+B}$$

($+I_2$)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- c : B}{\Gamma \mid\!\!- q_2(c) : A+B}$$

(+E)
$$\frac{\Gamma \mid\!\!- c : A+B \qquad \Gamma \mid\!\!- a : A \rightarrow E \qquad \Gamma \mid\!\!- b : B \rightarrow E}{\Gamma \mid\!\!- [a,b]c : E.}$$