

Da Giuseppe Longo ad Alan Turing<sup>1</sup>

Ventotene, 23 luglio 2015

Caro Alan,

ho accettato con grande gioia l'invito a scriverti una lettera personale: la tua presenza, come persona, e' fortissima anche nei tuoi scritti scientifici, in modo inusuale per un matematico. Le tracce della tua vita personale, i tuoi drammi, hanno superato i limiti della tua vicenda per riguardarci tutti, in primis per via del tuo impegno nella seconda guerra mondiale, ma anche per le sofferenze di giovane uomo libero, di omosessuale in un contesto totalmente ostile. Cerchero' di proporti la mia comprensione di alcuni dei tuoi testi fondamentali, in relazione ad altri altrettanto rivoluzionari, e poi di discutere con te alcuni dei problemi che si pongono a noi, più di mezzo secolo dopo, anche sulla scia delle tue invenzioni. Il far scienza, oggi, ha ben altra natura di quella che hai sperimentato tu, presenta altre sfide. Accanto alle tante possibilità che ci sono offerte, alle potenzialità (ed attualità) di una interazione globale, di reti di moderne ... *Macchine di Turing*, che ci connettono tutti, di un dibattito di tutti con tutti sulla faccia della terra, di una memoria dell'umanità a disposizione dell'umanità, ti racconterò come forme nuove di tecno-scienza deformano, svuotano, il "senso" dell'oggetto di analisi, rendono difficile una inventività di pensiero scientifico come quella che tu hai saputo così bene esprimere.

### **Saper essere nei fenomeni**

Innanzitutto, tu hai saputo immergerti nei fenomeni, nell'oggetto scientifico, dargli "senso": farti prima macchina (1936), vivere poi la tua domanda drammatica sull'esser uomo-donna-macchina (1950), farci vedere e quasi toccare con mano le deformazioni continue e la generazione di forme in un "hardware" senza "software" (1952).

### **1 - La Macchina**

Il tuo primo articolo mi ha ricordato Archimede che si vede corpo nell'acqua e propone così il principio delle spinte simmetriche; od Einstein che si vede fotone che "surf" su di un'onda luminosa per cogliere la sconvolgente invarianza della velocità della luce – proprio come, surfando su di un'onda, le onde intorno sono viste come relativamente immobili. Così, tu ti vedi come "a man in the process of computing a real number": la Logical Computing Machine che inventi è in effetti un "human computer". "Computing is normally done by writing certain symbols on paper. We may suppose this paper is divided into squares like a child's arithmetic book". "The behaviour of the computer at any moment is determined by the symbols which *he* is observing. and *his* "state of mind" at that moment" (mie sottolineature). Così la sua azione è perfettamente "desultory", macchinale, insensata, ma ... umana: leggi 0 od 1 sul nastro-quaderno, scrivi 1 o 0 spostandoti a destra o sinistra, secondo lo stato interno ("of mind") fra un numero possibile di stati,  $q_0, \dots, q_n$ . Non è una macchina che si fa umana, ma un uomo che si fa macchina. Hilbert voleva la certezza

1 Apparsa in inglese: G. Longo. [Letter to Alan Turing](https://www.di.ens.fr/users/longo/files/Letter-to-Turing.pdf). *Invited*, in **Theory, Culture and Society**, Posthumanities Special Issue, 2018: <https://www.di.ens.fr/users/longo/files/Letter-to-Turing.pdf> (auf Deutsch, "Inhalt" Internationales Jahrbuch für Medienphilosophie, De Gruyter, vol. 6, no. 1, 2020, pp. V-VIII).

assoluta della deduzione nella “potenziale meccanizzabilità della matematica”, pretendeva la completezza deduttiva dei sistemi per il calcolo formale? Ebbene, ecco un uomo che si riduce a macchina per effettuare la deduzione logico-formale: tu, matematico, ti fai macchina deduttiva formale. E così definisci una funzione non calcolabile, che sfugge quindi alla meccanica deduttiva: come Gödel, distruggi dall'interno il programma formalista. Dai poi, scopo dichiarato del tuo articolo, la prima definizione di numero reale (non) calcolabile. Cercherò di ricostruire più da vicino le idee più significative del tuo scritto.

Per mostrare i limiti del sistema formale, che calcola senza senso, non ricorri al “senso”, alla necessità di capire quel che si fa, ma definisci una macchina che implementa/codifica il calcolo formale e mostri che la macchina è incapace di calcolare una funzione definita con un semplicissimo procedimento diagonale, puramente formale. Imiti in questo Gödel che aveva già dimostrato l'incompletezza dei calcoli logico-formali, ma non segui la tecnica inventata da Gödel, bensì proponi il tuo sistema meccanico-formale, molto più semplice ed umano, troppo umano per esser macchina, eppure *meccanico*. Ed accompagni l'invenzione con lunghi discorsi esplicativi, guidi il lettore passo passo verso la tua intuizione, sei umanamente presente nella costruzione della tua Macchina Logica per Calcolare, pur così formale. L'opposto di Gödel, il cui articolo del 1931 è un capolavoro di perfetto rigore e chiusura formali, anche nella scrittura, assolutamente disumana, totalmente “self-contained”, senza una sbavatura discorsiva, una evocazione del senso, del gesto matematico proprio alla costruzione effettuata, salvo poche righe nell'introduzione. L'articolo di Gödel è un diamante formale intoccabile: in alcun modo se ne può semplificare la prova, prender scorciatoie, al più riscrivere le pesantissime notazioni - è essenziale e perfetto. Il tuo articolo invece è una chiaccherata amichevole, che accompagna il lettore per mano, ci discute, ci ragiona insieme. Sei presente con la tua umanità, come sempre sarà anche dopo. Oggi, descriviamo in poche righe la tua macchina, ma si perde così l'originalità del tuo percorso inventivo, l'audacia del tuo farti macchina. Per questo ti scrivo così volentieri: ti si conosce come persona, leggendo i tuoi articoli matematici. Forse è un po' come leggere “Récoltes et Semailles” di Alexander Grothendieck, il grandissimo matematico apatride, educato e vissuto in Francia, ovunque fuori luogo, come lo eri tu, per il tuo carattere e la tua omosessualità. Alexander inizierà la sua attività alla tua morte e, come te, farà matematica per solo 20 anni, scegliendo poi il suicidio scientifico, se non quello fisico: tornerò su questo parallelo.

Il tuo è un risultato negativo, come era stato quello di Poincaré (1892) e quello di Gödel (1931) che hanno aperto nuove vie dicendo “no”, non è così: questo o quel programma e modo di vedere le cose, all'epoca dominante, non va. Poincaré dimostra la possibile incompletezza predittiva dei sistemi di equazioni non-lineari: si può anche determinare perfettamente un processo fisico, con un sistema di equazioni, ma la sua dinamica può essere non prevedibile (“et nous avons des phénomènes aléatoires”, dirà Poincaré nel 1902). Gödel, all'interno di un qualsiasi sistema che contenga l'aritmetica, costruisce un asserto formale indecidibile (primo teorema di incompletezza) e che, per di più, consente di dimostrare l'indimostrabilità formale delle coerenza (della non contraddittorietà dell'aritmetica, secondo teorema). La tua prova non consente quest'ultimo virtuosismo, il finissimo calambour del secondo teorema di Gödel, ma, in compenso, è molto più semplice e, come negli altri due casi, apre la via ad una nuova costruzione scientifica. Parallelamente a Kleene ed altri, dimostrerai poi che la tua Macchina Logica è altrettanto espressiva (definisce la stessa classe di funzioni) dei sistemi formali di Gödel, di Kleene, di Post, del lambda-calcolo di Church, tutti degli anni '30. Tutti sistemi logico-matematici molto diversi: le vostre prove di equivalenza, fra il '36 ed il '40, dimostreranno quindi che avete inventato un invariante matematico fondamentale, la classe delle funzioni formalmente calcolabili. Un invariante dei sistemi di scrittura e riscrittura hilbertiani, ovvero di sistemi di trasformazione di segni in segni: un qualsiasi sistema formale alla Hilbert definisce (al più) tale classe. I mistici, come sempre,

prenderanno tale invariante per un assoluto.

Il lambda-calcolo, un elegantissimo paradigma per i sistemi di (ri-)scrittura, sarà il “tramite” delle tue (difficili) prove di equivalenza. Esso è il sistema più ricco di “teoremi propri”, fornirà la base di logiche con e senza Tipi, da Church (1932, 1940) e Gödel (1958) a Girard (1971) e Martin-Löf (1980), di grande espressività matematica, al cuore della Logica Matematica e di molti degli stili di programmazione che hanno fatto l'informatica moderna. Negli anni '70 - '90, risultati di molti permetteranno di immergere il lambda-calcolo ed i suoi Tipi in strutture matematiche derivate anche da una nozione centrale in Grothendieck, quella di “topos” (categorie di grande ricchezza strutturale e logica), dando un senso “geometrico”, nel continuo, ai vostri linguaggi alfa-numeriche costruiti nel discreto (che onore, per me, vedere la mia foto nella riedizione del 1984 dell'ormai classico libro di Henk Barendregt sul lambda-calcolo, qualche capitolo dopo la tua). Così, ancora nel 2008, nuove categorie e topoi ispirati dal lambda-calcolo di Church e dai lavori di alcuni di noi, fra 1984 e 1990, verranno giustamente chiamate “[Turing categories](#)”, in un bell'articolo di Cockett e Hofstra. Da una parte, infatti, la tua Macchina Logica, per la sua semplicità e per la separazione fra istruzioni e struttura fisica, ha ispirato, dopo la guerra, la distinzione pratica fra software ed hardware nonché la costruzione dei sistemi operativi e dei compilatori - non sono altro che l'implementazione della tua “Macchina Universale”. D'altra parte, come ti dicevo, il tuo lavoro ha anche aperto la via a tanta matematica, di 30 e ... 70 anni dopo, grazie sia ai risultati di ponte, da te inaugurati, con il lambda-calcolo, sia, successivamente, a quelli fra questo calcolo e la teoria matematica delle categorie (e dei topoi).

Insisto, tuttavia: tutti i vostri risultati degli anni '30 sono nati come “risultati negativi”. Ed è così che le vostre dimostrazioni, ponendo i paletti, i limiti ad una proposta di conoscenza, hanno gettato le basi di nuovi universi scientifici: la geometria dei sistemi dinamici (Poincaré), la calcolabilità (Gödel, te e gli altri che ricordavo). Per dire “no” avete dovuto affinare le tecniche al punto di inventare nuove nozioni, poi dimostrate fertillissime: Poincaré, le biforcazioni, le traiettorie (omocline) fra stabilità ed instabilità, la geometria del caos; voi, le funzioni calcolabili e la macchina per il calcolo. Chi oserebbe oggi proporre un progetto di ricerca multi-milionario, unico modo per avere posti, dottorandi, collaborazioni, attività garantite per 3 – 5 anni, che miri a dimostrare che “no, non si può fare ... tale processo è imprevedibile, tale sistema è incompleto, tale funzione non è calcolabile”?

## **2 – Uomo/donna/macchina/Universo**

La guerra interromperà il tuo lavoro scientifico e, come sempre nel XX secolo, gelerà tutta la scienza. Al più, decine di scienziati grandi come te saranno costretti a trovar soluzioni tecniche a problemi urgenti in quadri teorici ben noti, dalla chimica dei gas tossici e l'aviazione durante la prima guerra mondiale, alla fissione nucleare per usi militari od alla tua calcolatrice ad ingranaggi meccanici per decodificare i codici tedeschi, nella seconda. Certo, per costruirla, hai dovuto utilizzare il tuo talento “aritmetico”, la capacità di lavorare sulle combinatorie discrete dei numeri interi e dell'alfabeto, nell'intreccio fra i due; ma sarai costretto a costruire una macchina tradizionale, marchingegno di ruote ed incastri, come ne esistevano da decenni, per combattere la macchina a ruotelle tedesca che generava codici sempre diversi. L'urgenza di guerra non permetteva di sviluppare la tua idea scientifica, la Macchina Logica con un software distinto dall'hardware, ed il tuo articolo del 1936 sarà ignorato per più di dieci anni, anche da te, fin tanto che non poteste pensare, in pace, a quella che poi diverrà “l'architettura di von Neumann” per i moderni computer elettronici.

Nel dopoguerra, però, la ripresa del pensiero scientifico, ti farà cambiare punto di vista. Cogliarai innanzitutto l'importanza pratica della tua invenzione matematica, realizzandone un

prototipo fisico, si diceva, e, quindi, capirai che essa puo' costituire una svolta nella rappresentazione del mondo. Nell'articolo del 1950, ridenominerai Discrete State Machine la tua Logical Computing Machine, mettendo cosi' in evidenza la struttura fisica, a stati discreti, del suo hardware, e discreto-scritturale, alfabetica, del suo software.

Devo riconoscere che ho esitato a leggere il tuo articolo del 1950, su “il gioco dell'imitazione”. E' possibile, mi chiedevo, che un grande come te riprenda cosi' piattamente una scoperta degli anni '20, quando si sono misurate scariche elettriche dei neuroni, gli “spikes”, come dei bip-bip su un galvanometro? E queste deformazioni elettrostatiche e materiali dei neuroni, di enorme complessità, sorta di “transizioni critiche” in una dinamica continua, l'attività fisico chimica di un neurone, vennero allora intepretate semplicisticamente come dei passaggi da uno 0 (inattività) ad un 1 (scarica), come nei riquadri della tua macchina-quaderno da bambino. Mi stupivo della vulgata comune del tuo articolo, ovvero che tu potessi ancora pensare che un cervello animale, od umano, potesse essere una Macchina a Stati Discreti, 0 ed 1 su un nastro, scritti o cancellati secondo regole prefissate .... Ma no, dici esattamente l'opposto: “The nervous system is certainly not a discrete-state machine. A small error in the information about the size of a nervous impulse impinging on a neuron, may make a large difference to the size of the outgoing impulse” (p. 451).

In effetti, proponi solo un “gioco dell'imitazione”, come dici a più riprese: si tratta d'ingannare un uomo che, ponendo domande tramite una teleprinter, cerca di capire chi, fra una tua macchina ed una donna, è la donna. Non cerchi affatto di capire come funziona un cervello umano, farne un modello matematico, ma vivi piuttosto il dramma di una imitazione possibile. Dico il dramma, perché, a mio avviso, tu sai già che la polizia puo', ad ogni istante, porti la domanda: ma, tu, sei un uomo od una donna? Ed allora fai rispondere la tua macchina a questa domanda insulsa, aprendo cosi' la via ad un gioco simbolico ricchissimo, ma un gioco – tu, che hai saputo farti macchina, giovanissimo, in un gioco logico, e, forse, interroghi continuamente te stesso: uomo/macchina/donna ?

Ti diro', a me non interessano molto le considerazioni psicologiche che apporti per convincere il lettore della plausibilità del gioco dell'imitazione e dell'inganno possibile: non vai molto oltre banalità del tipo “hai i capelli lunghi? Sai scrivere una poesia? ” ... “Add 34957 to 70764, (Pause about 30 seconds and then give as answer) 105621” che è errato: la macchina deve imitare una donna e, sappiamo bene, le donne, in matematica non sono tanto brave<sup>2</sup> ... . Poi, con molta modestia, ti azzardi a prevedere che, nel 2000, in un gioco di non piu' di 5 minuti, le macchine avranno il 30% di chances di farsi passare per una donna, in un dialogo tramite teleprinter (p. 442), ben lontano dalle fantasie di robot umanoidi perfetti che ci verranno promessi mille volte in seguito. Oggi, reti di neuroni artificiali basate su variazioni continue della connettività, atte ad imparare, un'idea cui tu accenni, stabilizzando gradualmente invarianti delle immagini, sono in grado, dopo ore di lavoro, di distinguere un gatto da un ferro da stiro (che non cerca pero' di imitarlo), impresa non banale per una macchina.

Ho trovato invece appassionanti le numerose osservazioni che fai, di tipo fisico-matematico. Aprono la via all'altro grande articolo che stavi scrivendo, quello sulla morfogenesi, apparso nel 1952. Ovvero, per differenza con la tua macchina a stati discreti, cogli il ruolo del continuo, del gioco fra la misura fisica, sempre un intervallo, sempre approssimata, e le dinamiche non lineari. Cosi' a pagina 440 osservi: “The system of the 'universe as a whole' is such that quite small errors in the initial conditions can have an overwhelming effect at a later time. The displacement of a single electron by a billionth of a centimetre at one moment might make the difference between a man being killed by an avalanche a year later, or escaping.” Ovvero, un perturbazione, una fluttuazione al di sotto della migliore misura possibile per la scala umana – l'uomo ucciso vs. lo spostarsi di un elettrone – puo' venire amplificato, nel tempo, in un fenomeno ben osservabile, che risulta quindi

2 Dans une traduction en français de ton texte, pour une collectanea en IA, cette erreur a été corrigée ....

imprevedibile. Questo è il nodo dell'impredittibilità deterministica dei fenomeni che rappresentiamo con sistemi non lineari, sensibili alle condizioni iniziali, quelli che Poincaré aveva ben analizzato 60 anni prima e che ben pochi avevano sviluppato: in essi, il ruolo della misura approssimata, un *intervallo* nel continuo, è cruciale. L'impredittibilità classica (l'aleatorio) sorge all'interfaccia, data dalla misura, fra un processo fisico e la sua determinazione non-lineare (equazioni, funzione d'evoluzione): una fluttuazione non misurabile è amplificata dalla dinamica non-lineare – è questa la sensibilità alle condizioni iniziali che tu esemplifichi benissimo<sup>3</sup>.

Oltre Poincaré, Hadamard e qualche matematico russo avevano lavorato a tali sistemi in meccanica celeste o nella fisica classica di grandi sistemi. Forse, questi ultimi matematici, come Pontryagin, non ti erano neppure noti (Kolmogorof scriverà solo nel 1953 la prima versione di quel che diverrà, nel 1963, il teorema Kolmogorof-Arnold-Moser, un pilastro di quei sistemi). Da solo, quindi, al più al seguito di Poincaré, cogli il rilievo della non linearità, del suo carattere non laplaciano (per Laplace, la determinazione implica la predittibilità), ben oltre la meccanica razionale laplaciana che verrà insegnata fino agli anni '60 e '70 (anche a me, purtroppo, pessima fisica matematica, accanto corsi straordinari di matematica).

E così, per contrasto alla sensibilità alle condizioni iniziali, ovvero all'impredittibilità delle dinamiche non lineari nel continuo, spieghi: “It is an essential property of the mechanical systems which we have called 'discrete state machines' that this phenomenon does not occur. Even when we consider the actual physical machines instead of the idealised machines, reasonably accurate knowledge of the state at one moment yields reasonably accurate knowledge any number of steps later.” (p. 440). Ed insisti: “It will seem that given the initial state of the machine and the input signals it is always possible to predict all future states. This is reminiscent of Laplace's view that from the complete state of the universe at one moment of time, as described by the positions and velocities of all particles, it should be possible to predict all future states.” (p. 440). Ovvero, potrà forse imitare una donna, ma osservi, e non tanti lo hanno capito ancor oggi, che la tua macchina a stati discreti è laplaciana, poiché il suo accesso ai dati è esatto, la sua dinamica si svolge nel discreto; essa è un sistema di scrittura e riscrittura alfabetico, come spieghi chiaramente in una breve osservazione in cui contraponi la scrittura alfabetica a quella ideogrammatica. È questa l'invarianza della “reasonably accurate knowledge of the state”, della misura digitale, che è esatta e segue esattamente il processo di calcolo, quel che non vale nell'Universo fisico, ricordavo più su. Il tuo “effetto elettrone” (il suo spostamento di un milionesimo di centimetro con effetti successivi macroscopici) anticipa di dieci anni il fin troppo noto “effetto farfalla” di Lorentz (1962), così chiamato poi solo nel 1972. Come ho già scritto altrove, bisognerebbe piuttosto parlare dell’“effetto elettrone di Turing”, ben anteriore, se il tuo articolo del 1950 non fosse stato letto soprattutto nella prospettiva dell'Intelligenza Artificiale; questo non ha permesso di cogliere la commedia tragica e simbolica che tu giochi, fra un uomo, una donna ed una macchina, ed ancor meno il tuo insight da grande matematico che sta lavorando alla morfogenesi, come dinamica fisica, non lineare, nel continuo.

Così, decenni dopo il tuo discorso chiarissimo, ci si viene ancora a raccontare, con Wolfram ad esempio, che l'Universo Tutto (“as a whole”) è una (grande!) Macchina di Turing, di cui ovviamente gli organismi viventi, ed il cervello in essi, sarebbero aspetti computazionali “emergenti”, in quanto “computazionalmente irriducibili”. E questo, senza neppure riuscire a dare una definizione matematica rigorosa di irriducibilità computazionale di un processo discreto in due dimensioni (v. gli automi cellulari di Wolfram, analizzati in margine alla tesi di dottorato di Alastair Abbott, diretta da Calude e Longo, 2015), processi nel discreto che, ovviamente, se rilanciati, iterano esattamente le stesse forme – l'opposto di un processo aleatorio, dell'impredittibilità, non iterabile in modo identico, proprietà minima che si chiede alla “emergenza”. Inoltre, invano chiedo da tempo a questi

3 See the discussion on Poincaré's work in the introduction.

computazionalisti dell'Universo di dirci se le costanti fondamentali della fisica, che appaiono in tutte le equazioni rilevanti, ovvero  $G$ ,  $c$ ,  $h$  e quella a-dimensionale  $\alpha$ , sono ... dei numeri reali calcolabili, nel senso da te definito. Questione assurda per chiunque capisca il ruolo della misura nella fisica classica, un intervallo che meglio rappresentiamo nel continuo, e nell'indeterminazione della fisica quantistica.

C'è qualcosa di comune da capire in questa follia computazionale che ci circonda: tutto è computazione discreta, numerica, programmi digitali, dall'Universo al cervello, passando per il DNA, fino all'economia. Anzi, la conoscenza tutta può esser rimpiazzata da relazioni evidenziate computazionalmente su grandissime basi di dati discrete, il Big Data che renderebbe obsoleta la scienza, la proposta teorica. Cercherò di discuterne con te in questa lettera, poiché sei l'uomo giusto per capire tutto ciò, tu che hai, con Gödel, Church, Kleene e Post, inventato la teoria della calcolabilità e, tu, la Macchina a Stati Discreti. Ma hai saputo anche inventare altro, mai monocorde, sempre aperto e curioso al mondo.

### 3 - La genesi delle forme

Una quindicina di anni fa, un collega biologo mi disse di lavorare ad alcuni problemi della morfogenesi embrionale seguendo i lavori di un matematico inglese, Alan Turing, e mi chiese se lo conoscessi .... Lui ignorava il tuo lavoro in Logica e Calcolabilità ed io non sapevo nulla del tuo lavoro del 1952, salvo il titolo! In effetti, esso si muove in tutt'altro universo, concettuale e matematico. Da grande pensatore, ti rivolgi ad un'altra fenomenalità inventando altri strumenti, originali, per trattarla. Salvo poi, alla fine, riflettere a correlazioni, ad un possibile uso critico degli strumenti precedenti.

Sin dal sunto sottolinei: "The purpose of this paper is to discuss a possible mechanism by which the genes of a zygote may determine the anatomical structure of the resulting organism. The theory does not make any new hypotheses; it merely suggests that certain well-known physical laws are sufficient to account for many of the facts." Si tratta della fisica classica di dinamiche non lineari nel continuo: non hai bisogno di "nuove ipotesi", in particolare non per il ruolo dei "geni", su cui ritornerò. Il modello si basa su di un sistema di equazioni, molto semplice. Al solito, i modi della tua genialità: prima, la semplicità quasi infantile della macchina Logica del 1936, con la quale però si può ricostruire tutto quel che è calcolabile nel discreto; ora, nell'articolo 1952, l'elementarità di questa idea, tutta tua, di una azione chimica, che provoca una reazione, quindi una diffusione con onde regolari e non, che si propagano nel continuo e che generano forme. Un *modello* che cerca di capire un processo, che può essere errato ma ... che può "falsificare" ("a falsification"), dici - strano termine. Non dunque una imitazione che serve solo a "far credere ad un interrogante", che non aiuta a capire, tantomeno a falsificare, ma ... cosa può esser falsificato dal tuo modello della morfogenesi? Proverò a capirlo ....

L'idea, semplicissima, ma che nessuno aveva posto in questi termini prima di te, è dunque che una azione/reazione/diffusione chimica possa generare delle forme. Proprio in quegli anni Belousov, in Russia, ha osservato il fenomeno empiricamente, in una reazione chimica la cui descrizione, non creduta, verrà pubblicata con gran ritardo e sarà capita solo dopo le esperienze di Zhabotinsky, negli anni '60. Intuisci quindi matematicamente qualcosa di non ancora osservato sperimentalmente o non raccontato da altri, ma possibile: un equilibrio macroscopicamente omogeneo, ma instabile, che una fluttuazione, al di sotto dell'osservabile, trasforma in una dinamica di forme. Rotture di simmetria, instabilità catastrofica ... sono i termini che usi. Di nuovo, Poincaré e pochi altri avevano aperto la via, anni prima, in sistemi all'equilibrio, ma nessuno aveva applicato tale visione delle dinamiche fisiche nel continuo ad ambiti siffatti, per di più da te analizzati per capire alcune forme del vivente.

Tratti, ovviamente, l'approssimazione lineare della soluzione del semplice sistema di equazioni che proponi, ma discuti a lungo delle proprietà della non-linearità (la presenza di termini del

second'ordine, come dici). Non proponi una matematica originale né difficile, lo dici a più riprese nel tuo dialogo affettuoso con il lettore: lo rassicuri che le equazioni ed i conti sono elementari. Ma ti poni in modo estremamente originale di fronte al problema della generazione delle forme biologiche: l'idea è, per così dire, “purissima”. Come con la tua Macchina che calcola, come un bambino, su un quaderno a riquadri, così, ora, individui i termini di una dinamica fisica minimale, ma estremamente espressiva. Al solito, ti immergi nel fenomeno, senza pregiudizi, mettendo da parte, totalmente, la tua esperienza precedente, la tua stessa invenzione, la macchina Logica a Stati Discreti. Passi dall'altra parte di quella che Thom definisce l'aporia fondamentale della matematica: il discreto vs. il continuo. Ed il tuo precedente articolo, sull'imitazione, con le osservazioni sull'impredittibilità deterministica e l'effetto elettrone, aveva già fatto vedere l'aporia, il passaggio che ti accingi a fare. Dai così un ruolo centrale alla misura, all'accesso ai fenomeni: la fluttuazione al di sotto della migliore misura possibile, nozione che non ha senso nel discreto, dove la dinamica inizia e si svolge su dati esatti. Ma, alla fine dell'articolo, poni il problema della implementazione della dinamica su una tua Macchina: pensi che permetta di trattare solo casi particolari e ti riprometti di rifarlo. Il processo per omosessualità che inizierà quell'anno, ti stroncherà, fino al suicidio.

Un modello dunque, inventato per capire, non un'imitazione. E per falsificare ... cosa? In conversazioni riportate da Gandy, dici che l'approccio di Huxley all'evoluzione darwiniana non ti piaceva. Questo è tutto centrato sui cromosomi e ha aperto la via alla nuova biologia molecolare che vedrà nel DNA il *programma completo* dell'ontogenesi. Per te i geni, scrivi nell'articolo, sono al più produttori di enzimi che partecipano alle reazioni che ti interessano ed è la velocità di questa produzione che contribuisce, scrivi, ad un processo globale, interattivo e di tipo fisico, non “informatico”. L'idea della completezza descrittiva dei cromosomi, sequenza di lettere-codice finito, non ti può certo andar giù, a te che avevi dimostrato, a tuo modo, l'incompletezza degli assiomi dell'aritmetica, anche loro stringhe finite di segni.

Il libretto di Schrödinger del 1944, che nella prima parte ha proposto l'idea di “codice” delle forme biologiche iscritto nei cromosomi, era già molto noto. E von Neumann aveva già pubblicato, nel 1951, un articolo sugli automi cellulari ed attribuito ai cromosomi il ruolo di “programma della riproduzione e dell'ontogenesi”: tu non li citi. Quel che proponi è invece compatibile con l'alternativa individuata da Schrödinger nella sua seconda parte: l'ontogenesi come dinamica basata sull'assorbimento di negentropia, descritta nei termini dell'energia libera di Gibbs (ho scritto su questo, con Francis Bailly, chiamandola anti-entropia, ma l'ombra del tuo lavoro vi è pure presente). Citi invece solo tre biologi, molto originali: Child, D'arcy Thompson, Waddington. Tutti estranei al crescente trend focalizzato su l'idea della completezza delle analisi dei cromosomi per capire la filogenesi e l'ontogenesi, tutti visionari, ma senza la tua matematica, della morfogenesi nel tuo senso, dinamica fisica nel continuo (l'ultimo era un embriologo-genetista, ma anche lui interpretava l'azione dei cromosomi sempre nell'interazione con l'organismo e l'ecosistema). Così, tu, inventore della nozione di “programma informatico”, di software da descrivere indipendentemente dall'hardware, sei contrario al suo uso in biologia. E' questo quello che il tuo modello falsifica! E lo dimostri: per generare forme (anche biologiche) non c'è bisogno di un “predefined design”, di un programma (la tua teoria, dici, “does not make any new hypotheses; it merely suggests that certain well-known physical laws are sufficient to account for many of the facts”). L'homunculus codificato nel DNA, programma dell'ontogenesi e persino del comportamento, che diverrà definitivamente alla moda a partire proprio da quegli anni, è l'opposto della dinamica puramente fisica che descrivi e che falsifica la necessità di un codice-programma per la morfogenesi.

Quindi, tu, che hai distinto per noi software da hardware, e che hai così inventato la scienza della programmazione, del software, descrivi una dinamica puramente hardware, senza software, deformazioni fisico chimiche nel continuo. Questo è il modo di un grande nel rapportarsi ai

problemi, il saper sempre rinnovarsi, arricchire lo sguardo con nuovi punti di vista, inventare od utilizzare una varietà di strumenti, solo stimolato dalla voglia di capire. Ed hai aperto così un nuovo percorso scientifico: con decenni di ritardo, la tua analisi della morfogenesi è stata molto ripresa e sviluppata.

### **Intermezzo: Alexander Grothendieck (1928 - 2014)**

Vorrei raccontarti di un altro grandissimo matematico che con te condivide il dramma di un arresto precoce e scelto di ogni attività, tu con la morte, lui estraneandosi nella solitudine di una vita agreste fuori dal mondo. Ma vorrei soprattutto sottolineare la comune ricerca della “purezza” del metodo, della “ingenuità” dello sguardo, sempre innovante, che rivolgete all'oggetto di vostro interesse. Tu ti metti a guardare in modo diverso, originale, “ingenuo” (l'ingenuità del bambino e del suo quaderno a quadretti dell'articolo del '36), ambiti già studiati da altri, la calcolabilità, ed apri così nuove vie; inventi poi, con altrettanta ingenuità ed originalità, un approccio matematico, relativamente semplice, alla morfogenesi. Alexander, come te, re-inventa, con un nuovo sguardo originalissimo e di sintesi, molto profondo, vaste aree della matematica. Le sue nozioni matematiche sono “purissime”: centrano l'invarianza e la stabilità concettuale massimale; sono generalissime senza mai essere vuote. In questo modo Grothendieck ha unificato costruzioni lontane, proponendo invarianti sorprendenti, nozioni e strutture “ponte”, condivise, ad esempio, da gruppi, spazi topologici, varietà di diversa natura (differenziali, geometriche ...). Così, si è potuto unificare ambiti diversi della matematica, trasferire metodi e correlare tecniche. Ad esempio, i “fasci su siti”, sua nozione difficile e profonda, consentono di muoversi fra strutture discrete e continue, al di là della aporia fondatrice della matematica, il gioco fra discreto e continuo, che divide la tua attività in due parti distinte. I topoi inoltre hanno prodotto un ponte molto interessante fra logica e geometria, anche grazie ai lavori di Lawvere, 1963-1970, fino a dar senso “geometrico” persino all'impredicatività, terribile spauracchio circolare dei logicisti, da Russell ad oggi – che diviene invece una interessantissima proprietà di chiusura, logica, nel lambda-calcolo di Girard, e strutturale, nelle categorie fra insiemi e topoi in articoli di Hyland, Moggi e miei, 1987-1991. Le idee di Grothendieck, con quelle di Serre ed alcuni altri in Francia, hanno in qualche modo toccato tutti i campi della matematica ed hanno costituito la principale rivoluzione teorica di questo dopoguerra, forse la sola paragonabile alle quattro o cinque dei settanta anni che hanno preceduto la seconda guerra mondiale (senz'altro: geometria dei sistemi dinamici, fisica relativistica, fisica quantistica ... logica matematica, quella cui tu hai contribuito), ma con ancor più grandi meriti di unificazione di campi svariati.

Dopo 20 anni di attività, agli inizi degli anni '70, la purezza scientifica di Alexander disvela la sua profonda natura, anche etica – come era per te: tu non potevi accettare la tua “colpa” di omosessuale, credevi nell'integrità della tua persona come del tuo modo di pensare, fosti perfettamente ingenuo, ma lucido, nel rigore con cui ti presentasti, quasi autodenunciandoti, alla polizia, in occasione di un piccolo furto subito da un compagno occasionale. Un atteggiamento eticamente ancor più radicale porterà Grothendieck a troncare ogni rapporto con il mondo accademico e con la ricerca: li considerava compromessi con i finanziamenti militari, non attenti ai problemi dell'ecosistema. Pierre Lochack, in un bel libro di quest'anno, mette in evidenza la continuità fra la sua vita difficilissima di apatriide immigrato da bambino in Francia e l'“ascetismo” del suo approccio alla matematica ed alla vita sociale. Sottolinea la continuità della visione scientifica e morale di Alexander con l'impegno politico intransigente dei suoi genitori, anarco-sindacalisti, di suo padre in particolare, che, presente in tutte le rivoluzioni europee, a partire dal 1905 in Russia, è incarcerato per dieci anni dallo Tsar, liberato da eroe nel '17, ma, ostile a Lenin e perseguitato dai bolscevici, è esule in Germania nel '21. A seguito del suo impegno contro il

nascente nazismo, si rifugia in Francia all'avvento di questo, nel 1933, per poi combattere, a fianco della madre di Alexander, in Spagna nel '36; muore nel '42 in un campo di concentramento tedesco. Alexander ne continuerà, suo modo, l'attitudine intransigente, anche in matematica, il rigore assoluto di una purezza concettuale ed etica senza concessioni, fino alla scelta drammatica di lasciar perder tutto, dimettersi dal suo posto all'IHES a Parigi, cinque anni dopo aver ricevuto la Medaglia Fields, al massimo della gloria scientifica, alla stessa età del tuo suicidio.

Questo modo di lavorare, questa intransigenza concettuale è frequente in matematica, le è forse propria: nell'invenzione matematica, c'è sempre una radicalità ed una purezza rivoluzionarie – un concetto profondo, una prova, non possono essere “rabberciati”, non posso essere frutto di un compromesso, neppure con il reale. Ho avuto insegnanti ed amici, sin dagli anni di studi, poi collaboratori e colleghi con queste caratteristiche, in cui “ingenuità” e purezza di sguardi si combinano a re-invenzione permanente ed a profondità. Forse, nei momenti migliori, ogni matematico sa essere altrettanto intransigente con i concetti, ne pretende il massimo, propone la purezza di nozioni semplicissime, come te, o generalissime, come Grothendieck.

#### 4 – Reti e Big Data

In informatica, negli ultimi 30 anni, è successo qualcosa di enorme, che non avevi presagito: la nascita delle reti. Reti di computers, per altro diventati tutti individualmente potentissimi, in misura a te inconcepibile, grazie anche alla fisica, stanno cambiando il mondo e la scienza. Una svolta “simbolica”, terza grande rivoluzione scritturale, dice Clarisse Herrenschmidt, dopo l'invenzione della scrittura, alfabetica in particolare, di cui lei è stata archeologa, e quella della moneta coniatata, scrittura, symbolon, del valore. Come ogni rivoluzione profonda del simbolismo, quindi della comunicazione umana, l'attuale presenta sfide originali, che ancora non capiamo bene, ed ancor meno controlliamo. Le reti ci avvicinano tutti, ci offrono possibilità inaudite di apprezzare la diversità umana, di arricchire così l'esperienza di ognuno, spunto di nuove invenzioni, risultato di ibridazioni e di nuove sintesi.

Tuttavia, l'aver tanti vicini, come suggerisce la fisica del campo medio, può anche forzarci a divenir tutti “medi”, tutti uguali o quasi. La sfida è aperta. La gestione della scienza ne è una prima vittima: la bibliometria, su cui ho scritto un articolo scaricabile dalla mia pagina web (come è bello avere una pagina web accessibile da chiunque ed in cui render pubblici i propri scritti!), contando le citazioni in tempo reale, spinge a lavorare in filoni dominanti, dove anche un piccolo progresso può essere citato da molti. Le invenzioni come le tue hanno richiesto dieci, venti, trenta anni, per essere apprezzate: l'impact factor delle riviste è invece calcolato da macchine sulla base delle citazioni degli articoli nei *due* anni successivi alla pubblicazione. In matematica, in fisica ... ci vogliono dieci anni solo per capire un risultato difficile in una pista originale, che viene quindi ignorato a lungo, a meno che non sia una risposta difficilissima a problemi aperti da decenni. Macchine in rete che contano immediatamente le citazioni uccidono a priori ogni tentativo di avventurarsi, come hai fatto tu, su sentieri del tutto nuovi.

A questo si aggiunge la follia, che citavo, del “tutto computazionale”, a partire dallo sguardo sul vivente, l'opposto di quello che tu hai saputo proporre, fino al mito dell'Universo Macchina di Turing. Questi colleghi, che usano l'unica tecnica che conoscono per applicarla ad ogni fenomeno possibile, appiattendolo in un universo senza senso, fatto solo di calcoli formali, agiscono come se la tua fosse l'ultima macchina che l'uomo può inventare: coincide con il mondo! Sono convinto che ne inventeremo altre, ma queste loro profezie rischiano di divenire auto-avveranti: impilando tecniche computazionali su tecniche computazionali, sempre nello stesso universo teorico, per cogliere la complessità dell'Universo (del cervello, del DNA ...), in modo sempre più astrusamente difficile, senza la semplicità purissima e profonda che richiede l'invenzione matematica,

impediscono di pensare anche alla ... prossima macchina, che di certo l'umanità saprà inventare.

Le strutture matematiche discrete giocano un ruolo centrale nella tua invenzione e nei suoi abusi come unica interfaccia, anzi come coincidente con il mondo. Le basi di dati discrete sono esatte, ci si accede esattamente. La grande sfida della misura fisica è dimenticata. Il fine '800 ed il primo '900, dicevo, l'avevano messa alla luce. Poincaré aveva colto il ruolo dell'interfaccia fra non-linearità delle dinamiche matematiche e processi fisici, dato dalla misura classica, sempre approssimata: come tu hai ripreso benissimo, fluttuazioni al di sotto del misurabile vengono amplificate in fenomeni osservabili che risultano quindi imprevedibili. Anche la fisica quantistica inizia proprio, nel 1900, dalla questione della indeterminazione intrinseca della misura e la sorprendente misura discreta dello spettro dell'energia, nel continuo dello spazio tempo. Tutto ciò è messo da parte da dinamiche computazionali che iniziano da valori esatti ed evolvono con esattezza, sistemi di ri-scrittura alfa-numeriche, come vengono definiti in piena generalità. Partendo da valori esatti, iterano in modo sempre identico: è questa la correttezza dei programmi. Poi, le reti, hanno introdotto l'aleatorio proprio alle fluttuazioni nel continuo spazio-temporale, alle incertezze di funzionamento di un nodo ..., ma i colleghi che lavorano alle reti ed alla concorrenza, lo chiamano "do not care": tutto è fatto per renderlo trascurabile. E ci riescono, le reti funzionano, esattamente, con rare eccezioni, grazie all'esattezza delle basi di dati discrete, senza nuances, senza incertezze nell'accesso ai dati. Se si identificano le reti di basi di dati discrete con il mondo, se lo si gestisce senza capire il metodo che così si impone, la griglia di lettura implicita, si perde il senso della deroga, che è "averaged out" dai comportamenti medi di rete, della nuance, dell'approssimazione e della perturbazione che contribuisce alla novità. In particolare, si perde il senso dell'interfaccia fra nostre proposte matematiche e mondo: la misura. E' proprio quello che tu invece hai saputo fare, attribuendo un ruolo chiave a fluttuazioni, dal tuo "effetto elettrone", al di sotto della misura dell'uomo ucciso da una valanga un anno dopo, a quelle che "trigger", dici, la morfogenesi. Questo ci fa capire dove il tuo cambiamento di sguardo, dal discreto al continuo, permette di parlare in un altro modo del mondo: ci ritorno.

La scrittura delle equazioni o di una funzione di evoluzione, di una dinamica, da Newton a Schrödinger, non è la "stessa cosa" del processo di cui intendono esser "modello", nel senso del tuo modello della morfogenesi. Qualche platonista fuori dal mondo dice ancora che "un pianeta integra una equazione differenziale", dimenticando in primis che ne bastano due, intorno al sole, perché il sistema non sia integrabile (eppure i pianeti ... si muovono egualmente ...). Le equazioni, la funzione, propongono o derivano da una proposta di una struttura causale, come nel tuo modello della morfogenesi, sono strumenti di intelligibilità e, in qualche raro caso, di previsione, per lo più qualitativa (qui un attrattore, là una singolarità ... un certo tipo di forme ... come per la morfogenesi da te analizzata). In termini più generali, le equazioni possono derivare da leggi di conservazione (energia, momento ...), quindi da simmetrie, che le strutturano (le equazioni del moto, tipicamente). Poi, l'uomo, o la macchina se sappiamo ben programmarla, può applicare algoritmi di soluzione, se esistono, o di calcolo per "seguire" la dinamica. Sappiamo che basta la minima non-linearità, ovvero la descrizione di interazioni (più corpi od agenti), perché il calcolo diverga rapidamente dalla dinamica fisica. E lo si dimostra facilmente, anche senza comparare il calcolo matematico, sempre approssimato, ed il processo fisico. Ovvero non è necessario misurare il processo all'istante iniziale ed ad uno successivo: basta infatti osservare che una differenza al decimale preferito (il 15esimo, per dire, per la semplicissima funzione logistica) dà divergenze radicali dopo poche iterazioni del calcolo (50 in quel caso e si occupa tutto lo spazio delle fasi). Poiché la misura fisica (classica) è sempre un intervallo, questa differenza mostra che una fluttuazione al di sotto della miglior misura possibile rende il processo fisico imprevedibile con il calcolo matematico. In fisica quantistica, poi, la misura produce valori di probabilità che sono numeri reali, mentre il calcolo (equazione di Schrödinger) avviene sui numeri complessi. Insomma,

la misura (fisica) costituisce una interfaccia fondamentale e complessa fra nostri tentativi teorici, possibilmente matematici, e fenomeni; ne mostra il distacco, la differenza fra calcoli e mondo, e rende la scienza umana possibile, nel gioco fra noi e mondo. Il modello matematico ed i calcoli su di esso sono ben diversi dal processo fisico: la misura li collega e li separa, radicalmente.

Cosa fanno invece questi “computazionalisti” del mondo fisico e biologico? Identificano l'Universo ad una struttura discreta, anzi ad una *scrittura* discreta, alfa-numerica, e dicono, come Wolfram: “We can certainly imagine a universe that operates like some behaviour of a Turing machine.” I sistemi per la calcolabilità, come il lambda-calcolo di Church, come la tua macchina, sono sistemi di ri-scrittura – stringhe finite di segni vengono trasformate (riscritte) in altre stringhe, seguendo le regole/istruzioni. Questa è la rivoluzione della tua macchina alfa-numerica: fa muovere la scrittura, ci dà una dinamica della scrittura alfabetica, ovvero della sua codifica in 0 ed 1. Così, senza il problema della misura, dell'interfaccia dicevo fra noi e mondo, si vede una dinamica di ri-scrittura di segni, nel discreto, una dinamica simbolica, fuori dal mondo. La distinzione fra software ed hardware, l'indipendenza del primo dal secondo (non interessa affatto come funzioni l'elettronica), ci fa prendere la riscrittura dinamica per un processo fisico. Fino ad arrivare a dire che il mondo è una macchina a stati discreti, una macchina per la ri-scrittura: la trasformazione di stringhe alfa-numeriche in stringhe alfa-numeriche. Ma, scomparsa l'interfaccia, ovvero senza il problema (enorme, in fisica) della misura, la corrispondenza fra scrittura matematica e processo è esatta, in totale contrasto con la corrispondenza fra equazioni e mondo che non è mai esatta: la misura approssimata li collega e li separa, radicalmente, come dicevo.

Tale follia del tutto computazionale ha invaso ancor più la biologia. Chaitin descrive le dinamiche biologiche, nel suo *Proving Darwin*: “life as randomly evolving software, software that describes a random walk of increasing fitness in program space.” Nel discreto, senza misura, il DNA viene *identificato* ad un software; la sua materialità fisica ed il suo contesto biologico, corpo, ecosistema, non hanno importanza: “we shall ignore bodies and metabolism and energy and consider purely software organisms”. In questo modo, si estranea il formalismo dai fenomeni, non li si osserva più, perchè non li si misura più. Il mondo computazionale va per conto suo, fuori dal mondo, lontano dalla sua materialità fisica, biologica, perché in questa *non ci sono li', già scritti, i numeri*: siamo *noi*, che associamo numeri a fenomeni e processi, attraverso la difficile sfida della misura. Il discreto rimpiazza misura ed enumerazione di atti di misura, propri al continuo, con la sola enumerazione.

Chaitin e Wolfram sviluppano le loro tesi, sulla fisica, sulla biologia, in molti scritti e le riassumono in due articoli in un volume in tuo onore, curato da Barry Cooper, dove aggiungono: peccato che Turing non lo abbia capito, ma la sua macchina è come l'Universo tutto, come le dinamiche biologiche. Una vera offesa a te, che hai saputo così profondamente “immergerti nei fenomeni”, giocare nell'interfaccia, cogliere il senso del gioco discreto/continuo, il ruolo della misura, inventare strumenti matematici originali, nel 1952, e diversissimi da quelli che avevi inventato prima, nel 1936, per trattare fenomeni nuovi.

Forse, la catastrofe massima del computazionalismo anti-scientifico la si intravede nella recente teoria del “The End of Theories”. In scritti a grande diffusione, informatici o managers di grandissime basi di dati ci spiegano: “Correlation supersedes causation, and science can advance even without coherent models, unified theories”. In breve, computers in rete, mettendo in evidenza correlazioni estesissime in immense basi di dati, consentiranno di prevedere ed agire, senza bisogno di “capire”: l'intelligibilità scientifica è un lusso incerto, soggettivo, sorpassato, e le teorie sono delle proposte caduche. I dati, soprattutto se tantissimi, tera di tera bytes, i Big Data, sono invece oggettivi, nuova forma di assoluto, sono individualmente esatti, espressi in digits. Ovvero, quanto più le basi di dati sono grandi, tanto più regolarità statistiche, messe in evidenza da computers, possono governarci, senza bisogno di capire il senso delle correlazioni, di interpretarle, senza

bisogno di teorie a riguardo, di interpretazioni.

Per fortuna la matematica ci consente di dimostrare l'assurdità di queste osservazioni: Cristian Calude ed io abbiamo appena scritto un articolo a riguardo (downloadable). Proprio l'immensità dei dati coinvolti ci ha permesso di applicare i teoremi di Ramsey e di Van der Waerden. Questi consentono di dimostrare che, data una qualsiasi "regolarità", ovvero una qualsiasi correlazione fra insiemi di numeri, si può trovare un numero  $m$  abbastanza grande, tale che *ogni* insieme con almeno  $m$  elementi contiene una regolarità (o correlazione fra numeri) con la stessa struttura. Ora, poiché questo vale per ogni insieme abbastanza grande (con almeno  $m$  elementi), vale anche quando esso è generato ... da un processo aleatorio. Anzi, osserviamo, quasi tutti gli insiemi di numeri abbastanza grandi sono aleatori (se ne può dare una definizione matematica, in termini di incompressibilità), ovvero, la percentuale dei non-aleatori tende a 0 per  $m$  che va all'infinito. Quindi, se si osservano regolarità in basi di dati sempre più grandi, è sempre più probabile che i dati inseriti siano dovuti al caso, siano cioè perfettamente insensati.

Già ... Frank Ramsey. Tu non hai potuto conoscere personalmente Ramsey, pure matematico precocissimo a Cambridge: è morto nel 1930, a 27 anni. Era traduttore ed amico di Wittgenstein con cui poi anche tu avrai uno scambio intenso. Bertrand Russell e John Maynard Keynes saranno il legame forte e stabile fra voi tutti, gruppo straordinario di amici ed auditori dei rispettivi corsi (ma, secondo te, ... Wittgenstein aveva amici?). Ti avranno di certo parlato di Ramsey e sono convinto che il suo finissimo risultato di combinatoria finita ti piaceva; forse ti interesserebbe anche la nostra semplice applicazione che demolisce la "Theory of the End of Theories", tu che non hai fatto che proporre quadri teorici e matematici sempre originali, assumere diversi punto di vista, farti macchina a stati discreti ed inventarne il software, immergerti in deformazioni materiali continue, senza software che le programmi, interpretare il reale e la tua stessa invenzione del reale. Cambiando così, profondamente, la nostra realtà.

--

Giuseppe Longo

<http://www.di.ens.fr/users/longo>

Centre Cavallès, CNRS et Ecole Normale Supérieure, Paris,  
and School of Medicine, Tufts University, Boston