TD 3 : ANALYSE CONVEXE

COURS D'APPRENTISSAGE, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, OCTOBRE 2017

Aude Genevay
aude.genevay@ens.fr

Résumé. Ce TD a pour but de faire manipuler les notions fondamentales en analyse convexe vues en cours.

Concernant l'optimisation convexe, on peut trouver de bons ouvrages de référence tout à fait accessibles dans le cadre de ces cours/TP. On peut notamment citer le livre de Stephen Boyd "Convex Optimization", disponible en ligne gratuitement à l'adresse `http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook/bv_cvxbook.pdf`**. Pour réviser la partie optimisation du cours, il peut être intéressant de jeter un coup d'oeil.**

1. Séparation des convexes compacts dans $\mathbb{R}^n$

On considère deux ensembles convexes compacts et disjoints C et D de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une séparation stricte de ces deux ensembles, i.e., qu'il existe un hyperplan séparant C et D.
Indice : On pourra commencer par considérer les points $(x, y) \in C \times D$ minimisant $\|x - y\|_2$.

2. Convexité des fonctions usuelles

1) Montrer que $f(x, y) = x^2/y$ est convexe sur certains domaines convexes que l'on précisera.

2) Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$, on appelle indicatrice convexe de l'ensemble convexe C la fonction définie par $I_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon. Vérifier que I_C est bien convexe.

3) Soit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, on considère la forme quadratique associée $f(x) = x^T Qx$. A quelle condition sur Q a-t-on la convexité de la fonction f ?

4) Montrer que le sup de fonctions convexes sur $\mathbb{R}^n$ est toujours convexe. Est-ce le cas de l'infimum ?

5) On appelle S^n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{R}^{n\times n}$. A l'aide de la question précédente, montrer que l'application $f : S^n \to \mathbb{R}, M \to \lambda_{\max}(M)$, où $\lambda_{\max}(M)$ est la plus grande valeur propre de la matrice M, est convexe.

3. Dualité Lagrangienne

Pour des vecteurs, on définit la relation d'ordre partiel $x \leq y$ si $x - y$ est dans l'orthant positif (i.e, si toutes ses composantes sont positives). Pour des matrices on note $A \geq B$ si $A - B$ est dans l'orthant positif et $A \succeq B$ si $A - B$ est une matrice symétrique semi-définie positive.

6) Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^n$. On considère un programme linéaire défini sous la forme canonique suivante :

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ c^T x \\ &\text{t.q, } Ax = b \\ &\qquad x \geq 0. \end{aligned}$$

Dériver un problème dual en utilisant la dualité Lagrangienne. Pour la formulation de ce problème on demandera d'écrire les contraintes duales de manière explicite.

7) Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ et $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$. On considère la fonction affine par morceaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \max_{i=1,\ldots,m} a_i^T x + b_i.$$

Dériver un problème dual à la minimisation de cette fonction en introduisant une variable auxiliaire $t = \max_i a_i^T x + b_i$.

8) Soit $W \in \mathbb{R}^{n \times n}, W \geq 0$ et symétrique. Dériver un problème dual au problème combinatoire suivant (problème de coupe maximale dans un graphe de poids W) :

$$\max_{z \in \{0,1\}^n} \ z^T W (1 - z)$$

Indications : Écrire le problème avec des variables $y \in \{-1, 1\}$ puis écrire l'ensemble discret d'optimisation comme vérifiant une contrainte d'égalité quadratique.
9) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\begin{aligned} &\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ x^T A x \\ &\text{t.q, } x^T x = 1 \end{aligned}$$

Donner le problème dual. Montrer qu'on a dualité forte. (*Cas où on a la dualité forte sans avoir la convexité du problème primal.*)