Algorithmique et Programmation

Devoir n° 5

École normale supérieure – Département d'informatique

`algoL3@di.ens.fr`

2016-2017

Coloration optimale des graphes triangulés

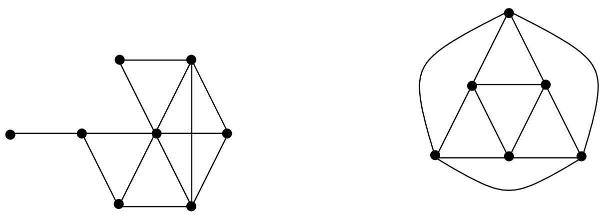
Le but de ce devoir est d'étudier un autre algorithme de parcours de graphes, qui permet de reconnaître une classe de graphes pour lesquel une coloration optimale peut-être trouvée efficacement.

Considérons l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Maximum cardinal search (MCS)

Données : Graphe non-orienté $G = (S, A)$
début
    pour chaque $u \in S$ **faire**
        $\ell[u] \leftarrow 0$;
        $\pi[u] \leftarrow NIL$;
    finprch
    $F \leftarrow S$;
    tant que $F \neq \emptyset$ **faire**
        Soit $u \in F$ tel que $\ell[u]$ est maximal;
        pour chaque *voisin* v *de* u *dans* F **faire**
            $\ell[v] \leftarrow \ell[v] + 1$;
            $\pi[v] \leftarrow u$;
        finprch
        $F \leftarrow F \setminus \{u\}$;
    fintq
fin

(a) Donner un ordre de parcours des sommets pour les graphes ci-dessous à l'aide de cet algorithme, ainsi que l'arbre couvrant construit grâce à π.



Un graphe est dit *triangulé* si dans tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4, il existe deux sommets non adjacents dans ce cycle qui sont adjacents dans le graphe. Un sommet est dit *simplicial* si son voisinage est une clique. Soit $c = s_1, \ldots, s_k$ un chemin dans un graphe G. Une *corde* pour ce chemin est une arête $\{s_i, s_j\}$ avec $|j - i| > 1$ (un chemin est dit *sans corde* s'il n'existe pas de telle arête pour ce chemin et un graphe est triangulé si tous ses circuits de longueur supérieure ou égale à 4 ont une corde).

(b) Les graphes ci-dessus sont-ils triangulés ? quels sont leur sommets simpliciaux ?

(c) Montrer que si G admet un sommet simplicial et que $G_{|S \setminus \{s\}}$ est triangulé, alors G est triangulé.

(d) Montrer que tout graphe triangulé admet un sommet simplicial. Pour ce faire, on peut montrer les étapes suivantes :
   - Montrer que si G est une clique, alors tous les sommets sont simpliciaux.
   - Montrer que si x est adjacent à tous les autres sommets, alors chaque sommet $y \neq x$ simplicial dans $G - \{x\}$ l'est aussi dans G et réciproquement.
   - Sinon, soit x un sommet de G et T l'ensemble des sommets les plus éloignés de x. Soit H une composante connexe de T, U l'ensemble des voisins de H et Q la composante connexe de $G_{|S-U}$ contenant x. Montrer que U est une clique.
   - Conclure quant à l'existence d'un sommet simplicial dans H.

(e) Montrer que si G est triangulé, alors le dernier sommet parcouru s par l'algorithme est simplicial. Pour ce faire, soit $f : S \to \{1, \ldots, n\}$ une numérotation des sommets selon leur ordre de traitement par l'algorithme MCS. Soit $c = u, v_1, \ldots, v_k, w$ un chemin tel que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $f(u) < f(v_i)$ et $f(w) < f(v_i)$. Montrer alors qu'un tel chemin a nécessairement une corde.

(f) En déduire un algorithme glouton de reconnaissance des graphes triangulés.

Une k-coloration propre c d'un graphe $G = (S, A)$ avec k couleurs est une application $c : S \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour tout $(u, v) \in A$ $c(u) \neq c(v)$. Une k-coloration propre est dite coloration optimale s'il n'existe pas de $k - 1$-coloration propre du graphe.

(g) Déduire de ce qui précède un algorithme glouton de coloration propre des graphes triangulés. Peut-on établir une relation entre le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier un graphe triangulé (nombre chromatique) et la taille maximale d'une clique de ce graphe ?