Devoir maison 5

`Exercice 1` `Coloration optimale des graphes triangulés`

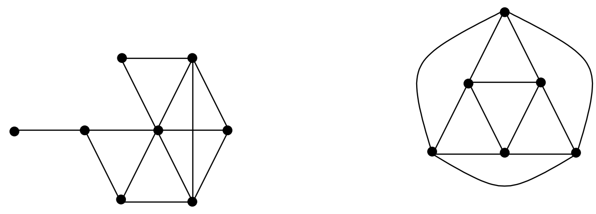
Le but de ce devoir est d'étudier un autre algorithme de parcours de graphes, qui permet de reconnaître une classe de graphes pour lesquel une coloration optimale peut-être trouvée efficacement.

Considérons l'algorithme suivant :

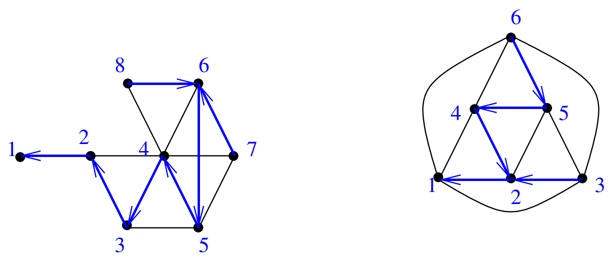
Algorithme 1 : Maximum cardinal search (MCS)

Données : Graphe non-orienté $G = (S, A)$
début
  pour chaque $u \in S$ **faire**
    $\ell[u] \leftarrow 0$;
    $\pi[u] \leftarrow NIL$;
  $F \leftarrow S$;
  tant que $F \neq \emptyset$ **faire**
    Soit $u \in F$ tel que $\ell[u]$ est maximal;
    pour chaque *voisin v de u dans F* **faire**
      $\ell[v] \leftarrow \ell[v] + 1$;
      $\pi[v] \leftarrow u$;
    $F \leftarrow F \setminus \{u\}$;

1. Donner un ordre de parcours des sommets pour les graphes ci-dessous à l'aide de cet algorithme, ainsi que l'arbre couvrant construit grâce à π.



Correction :



Un graphe est dit *triangulé* si dans tout cycle de longueur supérieure ou égale à 4, il existe deux sommets non adjacents dans ce cycle qui sont adjacents dans le graphe. Un sommet est dit *simplicial* si son voisinage est une clique. Soit $c = s_1, \ldots, s_k$ un chemin dans un graphe G. Une *corde* pour ce chemin est une arête $\{s_i, s_j\}$ avec $|j - i| > 1$ (un chemin est dit *sans corde* s'il n'existe pas de telle arête pour ce chemin et un graphe est triangulé si tous ses circuits de longueur supérieure ou égale à 4 ont une corde).

2. Les graphes ci-dessus sont-ils triangulés ? quels sont leur sommets simpliciaux ?

Correction : Le graphe de gauche est triangulé, ses sommets simpliciaux sont les sommets 1,8, et 7. Le graphe de droite n'est pas triangulé : le cycle 2,4,6,3 par exemple est sans corde. Il n'a pas de sommet simplicial.

3. Montrer que si G admet un sommet simplicial s et que $G_{|S\setminus\{s\}}$ est triangulé, alors G est triangulé.

Correction : Soit s un sommet simplicial de G, et supposons que $G' = G_{|S\setminus\{s\}}$ est triangulé. Soit $u_0, u_1, \ldots, u_k = u_0$ un cycle de G de longueur au moins 4. Soit ce cycle ne passe pas par s, donc c'est un cycle dans G'. Ce cycle a donc une corde (G' est triangulé). Soit ce cycle passe par s. Supposons sans perte de généralité que $u_1 = s$. Comme s est simplicial, son voisinage est une clique, et donc $(u_0, u_2) \in A$: ce cycle a une corde. Tous les cycles de G de longueur au moins 4 ont une corde : c'est un graphs triangulé.

4. Montrer que tout graphe triangulé admet un sommet simplicial. Pour ce faire, on peut montrer les étapes suivantes :

— Montrer que si G est une clique, alors tous les sommets sont simpliciaux.

— Montrer que si x est adjacent à tous les autres sommets, alors chaque sommet $y \neq x$ simplicial dans $G - \{x\}$ l'est aussi dans G et réciproquement.

— Sinon, soit x un sommet de G et T l'ensemble des sommets les plus éloignés de x. Soit H une composante connexe de T, U l'ensemble des voisins de H et Q la composante connexe de $G_{|S-U}$ contenant x. Montrer que U est une clique.

— Conclure quant à l'existence d'un sommet simplicial dans H.

Correction :

— Si G est une clique, pour chaque sommet de ce graphe, son voisinage est aussi une clique. Tous les sommets sont donc simpliciaux.

— Supposons que le sommet x est adjacent à tous les autres. Si $y \neq x$ est un sommet simplicial dans $G' = G_{|S-\{x\}}$, alors il est simplicial dans G. En effet, soit N son voisinage, $G_{|N-\{x\}}$ est une clique car y est simplicial dans G'. De plus x est adjacent à tous les autres sommets, en particulier ceux de N. Donc $G_{|N}$ est également une clique : y est simplicial dans G. Réciproquement, si y est simplicial dans G, alors son voisinage N forme une clique, et $N - \{x\}$ également, donc y est simplicial dans G'.

— Soit d la distance maximale d'un sommet à x. Si nous ne sommes pas dans un des cas précédents, alors $d \geq 2$. Tous les sommets de U sont à distance exactement $d-1$ de x : par construction, ils sont nécessairement à distance au plus $d-1$, et ne peuvent être à une distance inférieure car voisins de sommets à distance d. Soient $a, b \in U$ avec $a \neq b$. Il existe un chemin de a à b passant par des sommets de H uniquement (et par au moins un sommet de H) car H est connexe et a et b sont voisins de somments de H. Soit c_1 un tel chemin de longueur minimale. De la même manière, il existe un chemin de b à a passant uniquement par des sommets (et au moins 1) de Q. Soit c_2 un tel chemin de longueur minimale. La concaténation de tels chemins forme un cycle, de longueur au moins 4. La minimalité fait qu'il ne peut y avoir de corde entre a ou b et un autre sommet, ni entre sommets de H, ni entre sommets de Q. Il ne peut pas non plus y avoir de corde entre un sommet de H et un sommet de Q, car tous les voisins de H sont dans H ou U par construction. La seule corde possible est donc (a, b). Donc $(a, b) \in A$ et U est une clique.

— On procède par induction. Si G est une clique, c'est fini. Sinon, fixons $x \in S$. Si x est adjacent à tous les autres sommets, on raisonne sur $G_{|S-\{x\}}$. Dans les autres cas, on définit H et U comme précédemment. Tous les voisins d'un sommet de H sont dans H ou U. Donc si $z \in H$ est simplicial dans $G_{|U\cup H}$, il l'est dans G. On raisonne donc sur $G_{|U\cup H}$, qui est strictement plus petit que G, et on remplace x par un sommet $u \in U$: les sommets à distance maximale de u sont strictement inclus dans H. On continue le raisonnement jusqu'à trouver une clique (ce qui arrive nécessairement, au pire, il ne reste qu'un sommet).

5. Montrer que si G est triangulé, alors le dernier sommet parcouru s par l'algorithme est simplicial. Pour ce faire, soit $f : S \to \{1, \dots, n\}$ une numérotation des sommets selon leur ordre de traitement par l'algorithme MCS. Soit $c = u, v_1, \dots, v_k, w$ un chemin tel que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $f(u) < f(v_i)$ et $f(w) < f(v_i)$. Montrer alors qu'un tel chemin a nécessairement une corde.

Correction : Supposons qu'il existe un chemin $c = u, v_1, \dots, v_k, w$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $f(u) < f(v_i)$ et $f(w) < f(v_i)$. Parmi ces chemins, choisissons celui qui minimise $\max(f(w), f(u))$, et supposons sans perte de généralité que $f(w) < f(u)$. Plaçons-nous au moment où le sommet w est traité (étape $f(w)$ de l'algorithme). On a $\ell(v_k) \leftarrow \ell(v_k) + 1$, mais pas pour u (pas de corde) et pourtant, le sommet u sera traité avant v_k. Cela veut dira que parmi les sommets traités avant u, u a strictement plus de voisins que v_k. Il existe donc un sommet x tel que $(x, u) \in A$ et $(x, v_k) \notin A$. Soit $r = \max\{j \mid (x, v_j) \in A\}$. Le chemin $x, v_r, \dots v_k, w$ est sans corde avec $f(x) < f(w)$, ce qui nie la minimalité de $\max(f(w), f(u))$ (en particulier, $(x, w) \notin A$, sinon, on aurait un cycle de longueur au moins 4 et donc une corde de la forme (y, v_ℓ), avec $y \in \{x, w, v_{\ell'}\}$, ce qui est exclus par hypothèse et construction).

Soit s le dernier sommet visité par l'algorithme. Pour tous u, v, voisons de s, $f(u) < f(s)$ et $f(v) < f(s)$. Le chemin u, s, v a une corde : $(u, v) \in A$ et s est simplicial.

6. En déduire un algorithme glouton de reconnaissance des graphes triangulés.

Correction : On applique l'algorithme MCS, et on regarde les sommets dans l'ordre inverse de leur visite. Soit $s_1, \dots, s_n$ l'ordre de traitement des sommets. Les questions 3 et 5 nous disent que le graphe est triangulé ssi s_i est triangulé dans $G_{|s_1, \dots, s_{i-1}}$. Il suffit donc de vérifier cela pour chaque sommet.

Une k-coloration propre c d'un graphe $G = (S, A)$ avec k couleurs est une application $c : S \to \{1, \dots, k\}$ telle que pour tout $(u, v) \in A$ $c(u) \neq c(v)$. Une k-coloration propre est dite coloration optimale s'il n'existe pas de $k - 1$-coloration propre du graphe.

7. Déduire de ce qui précède un algorithme glouton de coloration propre des graphes triangulés. Peut-on établir une relation entre le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier un graphe triangulé (nombre chromatique) et la taille maximale d'une clique de ce graphe ?

Correction : On identifie les couleurs aux entiers naturels. Le coloriage glouton est le suivant : en effectuant le parcours MCS, on colorie les sommets avec la plus petite couleur disponible. On obtient bien un coloriage optimal dans le cas d'un graphe triangulé : le voisinage de chaque sommet traité, au moment où il est traité, est une clique, donc si à une étape de l'algortihme on a besoin de colorier le sommet u avec la couleur k, c'est que les couleurs $0, \dots, k - 1$ sont prises par les voisins de u. On a donc une clique (u compris) de taille $k + 1$, et $k + 1$ couleurs sont donc nécessaires.