Algorithmique et Programmation
TD 6 : Flots

Ecole normale supérieure
Département d'informatique
td-algo@di.ens.fr

2012-2013

1 Petits Rappels

Graphes Un graphe (orienté) $G = (V, E)$ est la donnée d'un ensemble de sommets V (pour "vertices", pluriel irrégulier de "vertex"), et d'un ensemble d'arêtes $E \subseteq V^2$ reliant certains sommets. En gros, $x \to y$ dans G ssi $(x, y) \in E$.

Flot Dans un graphe orienté, où on repère deux sommets spéciaux s (la source) et t (le puit), et où chaque arête (u, v) esr étiquetée par une capacité positive $c(u, v)$, un flot est une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (u,v) \in E, \quad f(u,v) \leq c(u,v)$$
$$\forall u \in V, \quad u \notin \{s,t\} \Longrightarrow \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum_{(v,u)\in E} f(v,u)$$

La première contrainte est la contrainte de capacité, et la seconde est la contrainte de conservation du flot. La valeur du flot est la quantité de flot qui sort de la source :

$$|f| = \sum_{(s,v)\in E} f(s,v) - \sum_{(v,s)\in E} f(v,s)$$

On va supposer de façon implicite que s'il y a une arête $u \to v$, alors il n'y a pas d'arête $v \to u$.

Coupure Dans un graphe de la définition précédente, une coupure est un ensemble d'arête $C \subseteq E$ tel que tout chemin de s à t passe par une arête de C. Une coupure est dite minimale si la somme des capacités des arêtes qui la composent est minimale.

2 Exercices

Exercice 1 ($\star$) : Minimum Edge Separator.

1. Donnez un algorithme qui calcule une coupure minimale entre deux sommets s et t.
2. Proposez un algorithme (polynomial) qui calcule un minimum edge separator, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes de taille minimale dont le retrait déconnecte le graphe non-orienté donné en argument (supposé connexe).

Exercice 2 : . Soit $G = (V, E)$ un réseau de transport de capacités entières et soit f un flot maximal de G.

1. Supposons que la capacité d'une arète $(u, v) \in E$ est augmentée de 1. Donner un algorithme de complexité $\mathcal{O}(E)$ qui met à jour le flot maximal f.
2. Supposons que la capacité d'une arète $(u, v) \in E$ est diminuée de 1. Donner un algorithme de complexité $\mathcal{O}(E)$ qui met à jour le flot maximal f.

Exercice 3 : . On considère une grille de taille $n \times n$, c'est-à-dire un graphe de n^2 sommets, où chaque sommet est reliée à ses voisins horizontaux et verticaux. Chaque sommet a donc 4 voisins, sauf ceux qui sont sur le bord de la grille (on peut imaginer qu'il s'agit d'une modélisation grossière d'une salle de spectacle).

Chaque sommet peut être ou bien “libre” ou bien “occupé”. Dans ce contexte, un plan d’évacuation est un ensemble de chemins *sans sommets commun*, passant uniquement par des cases libres. Chaque chemin doit partir d’un sommet occupé, et atteindre un sommet du bord de la grille.

Donnez un algorithme polynomial qui détermine si un plan d’évacuation existe, et si oui qui le calcule.

Exercice 4 (⋆⋆) : Une extension des problèmes de flots. On s’intéresse aux problèmes de flots avec offre et demande. On peut imaginer que le graphe décrit une carte, que les sommets sont des villes, et que le flot modélise le transport d’une marchandise donnée (par exemple, des vis). Les ville produise et consomment des vis en quantité déterminée. Chaque sommet v du graphe est donc étiqueté avec un réel $d(v)$ qui précise la demande en vis. Si $d(v)$ est supérieur (resp. inférieur) à zéro, alors la ville v consomme (resp. produit) $d(v)$ unités de vis par unité de temps. Une circulation est un flot qui respecte les contraintes de capacité des arêtes, et où la contrainte de conservation du flot est transformée en :

$$\forall v \in V, \quad \sum_{(u,v)\in E} f(u,v) - \sum_{(v,u)\in E} f(v,u) = d(v)$$

1. Enoncez une condition nécessaire simple sur les demande pour qu’une circulation existe.
2. Transformez le problème en un problème de flot ordinaire (en introduisant une source et un puit).
3. Donnez un algorithme polynomial qui détermine si une circulation existe.
4. démontrez que si les capacité et les demandes sont entières, et qu’il existe une circulation, alors il en existe une entière.

3 Solutions