Algorithmique et Programmation

TD n° 11 : Programmation linéaire

École normale supérieure – Département d'informatique
`algoL3@di.ens.fr`

2014-2015

Les variables en **gras** sont des vecteurs.

Exercice 1. Pour chacun des problèmes d'optimisation linéaire suivant, donner la valeur optimale et la solution optimale x en fonction des paramètres $(n, \boldsymbol{c}, k)$ avec $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. *minimiser :* $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}$, *sous la contrainte :* $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \mathbf{1}$
2. *minimiser*

1. Trouver un graphe G pour lequel la valeur de la solution optimum à $PLNE_1(G)$ est diffèrente de la valeur optimum de $PL_1(G)$.
2. Le but du reste de l'exercise consiste à démontrer que toute solution à $PL_1(G)$ est combinaison convexe de solutions de $PLNE_1(G)$ pour un graphe biparti G.

   Dans ce cas, on dit que le nombre d'entrées fractionnaires d'une solution $\boldsymbol{x}$ est le nombre de variables x_e tel que $0 < x_e < 1$.

   Soit G un graphe biparti et $\boldsymbol{x}$ une solution à $PL_1(G)$. Montrer que s'il existe un cycle C où $0 < x_e < 1$ pour toute arête $e \in E(C)$ alors $\boldsymbol{x}$ est combinaison convexe de solutions avec moins d'entrées fractionnaires.
3. Montrer que toute solution à $PL_1(G)$ est combinaison convexe de solutions de $PLNE_1(G)$ pour un graphe biparti G.
4. Montrer que les énoncés de l'exercice précédent restent vrais si on remplace l'objectif $\sum_{e\in E(G)} x_e$ par $\sum_{e\in E(G)} c_e x_e$ pour des constantes $\boldsymbol{c}$ (on fait ce remplacement dans $PL_1(G)$ et $PLNE_1(G)$).

   En déduire un algorithme pour trouver un couplage maximum pondéré (c'est-à-dire un couplage dont la somme des poids de ses arêtes est maximum) dans un graphe biparti pondéré.
5. Donner un algorithme pour trouver un couplage parfait de poids maximum dans un graphe biparti pondéré (c'est-à-dire un couplage parfait dont la somme des poids de ses arêtes est maximum).
6. Supposons que nous ajoutons la contrainte C_3 suivante à $PL_1(G)$ pour obtenir un nouveau programme linéaire $PL_2(G)$.

$$\sum_{e\in E(G[S])} x_e \leq \frac{|S|-1}{2} \ \forall S \subseteq V, |S| \text{ impair}$$

   Quel est la valeur de la solution optimale de PL_2 pour le graphe trouvé en (a) (utiliser la méthode du simplex ou une autre preuve) ? C_3 correspond à combien de contraintes en général ?
7. (**) Montrer que pour un graphe G, toute solution dans $PL_2(G)$ est une combinaison convexe de solutions dans $PLNE_2(G)$.
8. En déduire un algorithme pour trouver un couplage maximum pondéré (c'est-à-dire un couplage dont la somme des poids de ses arêtes est maximum).