

Algorithmique et Programmation

TD n° 5 : Graphes

École normale supérieure – Département d’informatique

algoL3@di.ens.fr

2015-2016

Exercice 1. COLORATION DE GRAPHES

Étant donné un graphe acyclique $G = (V, E)$, une k -coloration de G est une fonction $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ associant à chaque sommet u de G une couleur $c(u)$, telle que $c(u) \neq c(v)$ pour toute arête uv de G . Un graphe pour lequel il existe une k -coloration est dit k -colorable (ou colorable avec k couleurs).

1. Montrer que chaque graphe connexe et acyclique est 2-colorable.
2. Donner un algorithme polynomial qui détermine si un graphe est 2-colorable et, si oui, donne une 2-coloration de celui-ci. Quelle est la complexité de l’algorithme (on représentera un graphe par liste d’adjacences) ?
3. Montrer en construisant un algorithme, que les graphes de degré maximum Δ sont $(\Delta + 1)$ -colorables. Quelle est la complexité de l’algorithme ?
4. Montrer en construisant un algorithme polynomial que tout graphe 3-colorable à n sommets peut être colorié avec $O(\sqrt{n})$ couleurs.

On peut utiliser l’algorithme de la question 2 en remarquant que dans un graphe 3-colorable, pour tout sommet u donné, le sous-graphe correspondant aux sommets v tel que uv est une arête est lui 2-colorable.

Exercice 2. GRAPHES D’INTERVALLES

Un graphe d’intervalle est un graphe (qui peut être) obtenu d’un ensemble d’intervalles $[d_i, f_i]$ où chaque sommet correspond à un intervalle et deux sommets sont adjacents si les intervalles correspondants s’intersectent.

1. Un ensemble de sommets C dans un graphe est *clique* si les sommets de C sont adjacents aux autres sommets de C . Le *voisinage d’un sommet* v est l’ensemble de sommets adjacents à v .
Montrer que dans tout graphe d’intervalle, il existe un sommet dont le voisinage est une clique.
Un tel sommet est appelé *sommet simplicial*.
2. Donner un algorithme polynomial qui trouve un sommet simplicial (ou détermine qu’aucun n’existe).
3. Donner un algorithme polynomial qui prends en entrée un graphe d’intervalle G et retourne une coloration de G avec le moins de couleurs possible.

4. Un sous-graphe de G induit par S est le sous-graphe de G qui contient S et toutes les arêtes entre les sommets de S .

Donner un exemple de graphe qui n'est pas un graphe d'intervalle mais où tous ses sous-graphes induits contiennent un sommet simplicial.

Donner un algorithme polynomial qui prends en entrée un graphe G avec cette propriété et retourne une coloration de G avec le moins de couleurs possible.

Exercice 3. CHEMINS MAXIMUM

1. Montrer que dans un graphe connexe, deux chemins de longueur maximum ont (au moins) un sommet en commun.
2. Montrer que dans un arbre, tous les chemins de longueur maximum ont un sommet en commun.