

Algorithmique et Programmation

TD n° 5 : Graphes non-orientés

École normale supérieure – Département d’informatique
algoL3@di.ens.fr

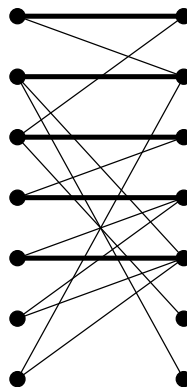
2014-2015

Vous aurez besoin du théorème suivant caractérisant les couplages parfaits dans les graphes bipartis.

Théorème 1 (Hall). *Un graphe biparti (A, B) avec $|A| = |B|$ a un couplage parfait si et seulement si il n'existe pas d'ensemble $S \subseteq A$ tel que $|N(S)| < |S|$.*

Exercice 1. COUPLAGE BIPARTI

1. Trouver un couplage maximum dans le graphe suivant à partir du couplage en gras.



2. Écrire le pseudo-code d'un algorithme qui trouve soit un couplage parfait dans un graphe biparti ou un ensemble $S \subseteq A$ tel que $|N(S)| < |S|$. Analyser son temps de calcul.

Exercice 2. COUPLAGE BIPARTI

Montrer que si un graphe est biparti et d régulier (tous les sommets ont degré d) alors on peut partitionner ses arêtes en d couplages parfaits.

Exercice 3. COMPOSANTES IMPAIRES ET COUPLAGES PARFAITS

Une *composante impaire* est une composante avec un nombre impaire de sommets et $c_O(G)$ est le nombre de composantes impaires dans un nouveau graphe G .

Montrer que si un graphe G a un couplage parfait alors $c_O(G - S) \leq |S|$ pour tout ensemble S de sommets de G .

Exercice 4. COMPOSANTES IMPAIRES ET COUPLAGES PARFAITS

Le but de cet exercice est de montrer l'autre direction de l'exercice précédent avec une preuve par induction. Ensemble ils forment le Théorème de Tutte qui nous donne un certificat de non-existence d'un couplage parfait.

Soit G un graphe où $c_O(G - S') \leq |S'|$ pour tout ensemble de sommets S' de G et soit S un ensemble maximal de sommets dans G tel que $c_O(G - S) \geq |S|$.

1. Montrer que les composantes de $G - S$ sont tous impaires. Montrer que $c_O(G - S) = |S|$.

2. On contracte chaque composante de $G - S$ dans G à un sommet pour former un ensemble de sommets \mathcal{C} dans un nouveau graphe H .

Montrer que le graphe biparti $H[\mathcal{C} \cup S]$ a un couplage parfait.

3. Montrer que pour toute composante C_i de $G - S$ et sommet x_i dans C_i , la propriété initiale sur les composantes impaires est préservée dans le (sous)graphe $C_i - x_i$ (i.e., $c_O(G[C_i - x_i] - X) \leq |X|$ pour tout sous-ensemble X de $C_i - x_i$).

4. **Théorème de Tutte**

Montrer qu'un graphe G a un couplage parfait si et seulement si $c_O(G - S) \leq |S|$ pour tout ensemble S de sommets de G .

5. **Formule de Berge**

Soit $\text{def}(G)$ le nombre de sommets qui ne sont pas couverts par un couplage maximum dans G .

Montrer que

$$\text{def}(G) = \max_{S \subseteq V} (c_O(G - S) - |S|).$$