Algorithmique et Programmation

TD n° 7 : Couplages

École normale supérieure – Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

2015-2016

Exercice 1. Théorème de Hall

On considère un jeu de cartes à n valeurs et p couleurs. Les cartes étant battues, on les dispose en un rectangle de n colonnes de p lignes. On peut échanger deux cartes qui ont la même valeur, et seule cette opération est possible. On veut montrer qu'on peut obtenir une configuration où chaque colonne contient une carte de chaque couleur.

1. Montrer, en utilisant le théorème de Hall, qu'il existe une permutation σ des colonnes telle qu'il y a une carte de valeur i sur la colonne $\sigma(i)$.
2. Conclure.

Exercice 2. Couplage biparti

Montrer que si un graphe est biparti et d régulier (tous les sommets ont degré d) alors on peut partitioner ses arêtes en d couplages parfaits.

Montrer que tout graphe biparti de degré maximum d est l'union de d couplages (pas nécéssairement parfaits).

Exercice 3. Composantes impaires et couplages parfaits

Une *composante impaire* est une composante avec un nombre impaire de sommets et $c_O(G)$ est le nombre de composantes impaires dans un graphe G.

Montrer que si un graphe G a un couplage parfait alors $c_O(G - S) \leq |S|$ pour tout ensemble S de sommets de G.

Exercice 4. Composantes impaires et couplages parfaits

Le but de cet exercise est de montrer l'autre direction de l'exercise précédent avec une preuve par induction. Ensemble ils forment le Théorème de Tutte qui nous donne un certificat de non-existence d'un couplage parfait.

Soit G un graphe où $c_O(G - S') \leq |S'|$ pour tout ensemble de sommets S' de G et soit S un ensemble maximal de sommets dans G tel que $c_O(G - S) \geq |S|$.

1. Montrer que les composantes de $G-S$ sont tous impaires. Montrer que $c_O(G-S) = |S|$.
2. On contracte chaque composante de $G - S$ dans G à un sommet pour former un ensemble de sommets $\mathcal{C}$ dans un nouveau graphe H.

   Montrer que le graphe biparti $H[\mathcal{C} \cup S] - E(S)$ (qui est le graphe d'adjacences entre S et les composantes) a un couplage parfait.

3. Montrer que pour toute composante C_i de $G - S$ et sommet x_i dans C_i, la propriété initiale sur les composantes impaires est préservée dans le (sous)graphe $C_i - x_i$ (c.-à-d., $c_O(G[C_i - x_i] - X) \leq |X|$ pour tout sous-ensemble X de $C_i - x$).
4. **Théorème de Tutte**

   Montrer qu'un graphe G a un couplage parfait si et seulement si $c_O(G - S) \leq |S|$ pour tout ensemble S de sommets de G.
5. **Formule de Berge**

   Soit $\operatorname{def}(G)$ le nombre de sommets qui ne sont pas couverts par un couplage maximum dans G.

   Montrer que
   $$\operatorname{def}(G) = \max_{S \subseteq V} (c_O(G - S) - |S|).$$