# Algorithmique et Programmation

## TD n° 3 : Arbres

École normale supérieure – Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

2015-2016

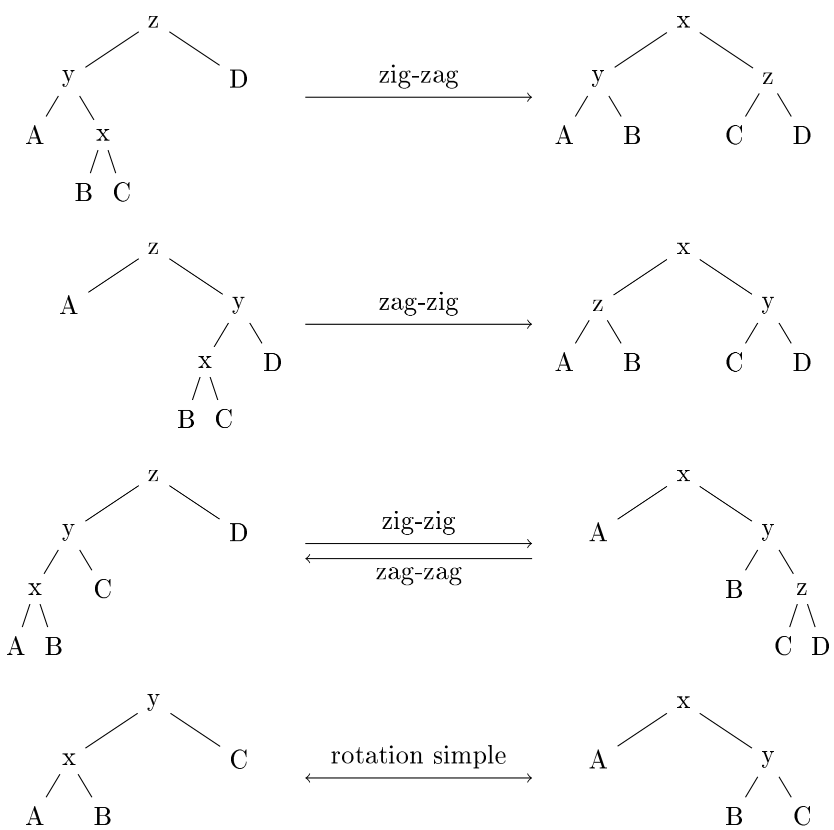
**Exercice 1.** Arbres splay

Les arbres binaires de recherche supportent typiquement les opérations suivantes :

1. Rechercher$(T, x)$ renvoie vrai ou faux selon que la clé $x$ est présente dans $T$.
2. Insérer$(T, x)$ ajoute la clé $x$ à $T$ (en supposant qu'elle n'y est pas déjà).
3. Supprimer$(T, x)$ retire la clé $x$ de $T$

Nous supposons dans la suite que toutes les clés sont distinctes.

Dans un arbre binaire de recherche, une opération Splay$(T, x)$ remonte un noeud arbitraire $x$ dans l'arbre jusqu'à la racine par une séquence de doubles rotations (qui se termine éventuellement par une simple rotation à la fin si la profondeur de $x$ était impaire). Les opérations qui peuvent avoir lieu sont illustrées ici (les lettres minuscules sont des noeuds et majuscule des sous arbres, possiblement vide) :




Après *chaque* opération Rechercher$(T, x)$, Insérer$(T, x)$, Supprimer$(T, x)$, ..., on remonte $x$ vers la racine par un splay. L'arbre peut donc être modifié par Rechercher, ce qui est inhabituel. On impose que si Rechercher$(T, x)$ renvoie "Faux", alors l'opération splay est appliquée au dernier noeud visité.

1. Un *peigne* est une arbre obtenu à partir d'un chemin en ajoutant un fils à tous les noeuds du chemin. Dans un arbre splay, quel est l'effet d'appliquer l'opération splay au noeud du bas d'un peigne de hauteur 3, 4 puis $n$ pour $n$ un entier arbitraire ? Quel est l'effet d'appliquer uniquement des rotations simples sur un peigne ?
2. Donner une suite de $n$ opérations Insérer qui produit un arbre splay de profondeur $n$.
3. En supposant que l'opération splay est déjà programmée, décrire les manières les plus simples possibles d'implanter les opérations suivantes :

- $\textsc{Séparer}(T, x)$ renvoie les deux arbres qui contiennent les clés plus petites et plus grandes que $x$, respectivement.
- $\textsc{Fusionner}(T_1, T_2)$ combine les deux arbres $T_1$ et $T_2$, et renvoie l'arbre résultant. Cette opération suppose que les clefs présentes dans $T_1$ sont toutes plus petites que celles présentes dans $T_2$.

**Exercice 2.** Complexité amortie

Soit une table de hachage de taille fixe avec insertion et effaçage en $O(1)$. Nous voulons utiliser cette table avec un nombre variable d'éléments. Pour ce faire, on applique les opérations de reconstruction suivantes.

- Si plus de $3/4$ de la table est remplie après une insertion, on crée une table vide de taille le double de la table actuelle et on y insert tout les éléments de la table actuelle (et ensuite, on détruit l'ancienne table).
- Si moins de $1/4$ de la table est remplie après une effaçage, on crée une table vide de taille la moitié de la table actuelle et on y insert tous les éléments du table actuelle (et ensuite, on détruit l'ancienne table).

Montrer que pour n'importe quelle suite d'insertion et d'effaçage, on arrive à un temps de calcul $O(1)$ par opération.

**Exercice 3.** Structure de donnée augmentée

Dans un arbre binaire de recherche $T$ de taille $n$ et hauteur $h(T)$, on veux garder plus d'information à chaque noeud pour pouvoir répondre à certaines requêtes plus rapidement. Ici, on garde en plus à chaque noeud, le taille du sous-arbre à ce noeud (noté $|T(v)|$ pour un noeud $v$).

1. Montrer qu'on peut calculer $|T(v)|$ pour tout noeud $v$ en temps $O(n)$.
2. Trouver l'élément de rang $i$ (le $i$ème plus petit élément) dans $T$ en temps $O(h(T))$ à partir d'un tableau $|T(v)|$ pour tout $v$.
3. Trouver le rang d'un élément dans $T$ en temps $O(h(T))$ à partir d'un tableau $|T(v)|$ pour tout $v$.
4. Montrer qu'en doublant le temps requis par opérationn, on peut effectuer toutes les opérations d'un arbre splay en mettant à jours la tailles des arbre $|T(v)|$.

**Exercice 4.** Analyse des arbres splay

Soit $\lfloor \log(|T(v)|) \rfloor$ le *rang* $\textsc{Rang}(v)$ d'un sommet $v$ dans un arbre. Soit $\textsc{Rang}'(v)$ le rang de $v$ après une rotation ou double rotation.

1. Montrer que la somme des rangs d'un arbre augmente d'au plus
   (a) $\textsc{Rang}'(x) - \textsc{Rang}(x)$ lors d'une rotation remontant $x$,
   (b) $2(\textsc{Rang}'(x) - \textsc{Rang}(x)) - 1$ lors d'un zig-zig remontant $x$,
   (c) $3(\textsc{Rang}'(x) - \textsc{Rang}(x)) - 1$ lors d'un zig-zag remontant $x$.
2. Montrer que pour n'importe quelle suite d'insertion, d'effaçage et de recherche à partir d'un arbre splay vide, on arrive à un temps de calcul $O(\log(n))$ par opération.