Algorithmique et Programmation

TD n° 11 : Approximation par arrondi

École normale supérieure – Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

2015-2016

Exercice 1. Max 2-SAT Le but de cet exercice est de donner une (3/4)-approximation pour Max 2-SAT. La répétition de clauses est permise.

1. Écrire Max 2-SAT sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers.
2. Supposons chaque variable x_i correspondant à une variable de 2-SAT d'une solution de la relaxation fractionnaire est indépendamment arrondie à 1 avec probabilité x_i (et 0 sinon).

   Montrer que la probabilité qu'une clause en particulier est satisfaite est au moins $\frac{3}{4}$ la valeur correspondant à cette clause.
3. Donner un algorithme polynomial randomisé qui donne une (3/4)-approximation pour Max 2-SAT.
4. Donner un algorithme polynomial qui calcule l'espérance du nombre de clauses satisfaites si nous choisissons $x_1 = 0$ avec probabilité 1 (au lieu de probabilité x_1).
5. Donner un algorithme polynomial déterministe qui donne une (3/4)-approximation pour Max 2-SAT.

Exercice 2. Ordonnancement

Étant donné un ensemble de tâches T et machines M, nous voulons placer les tâches sur les machines pour minimiser le temps de complétion (le moment où toutes les tâches sont complétées).

Si une tâche $t \in T$ est placé sur une machine $m \in M$ sont temps de calcul et $p_{t,m}$ (des entiers donnés en entrée). Les tâches placées sur une machine sont exécutées dans l'ordre.

C'est le problème *d'ordonnancement sur machines parallèles* qui est le sujet de cette question.

1. Formuler ce problème en un programme linéaire en nombres entiers.
2. Dans la problème de décision associé, nous avons en plus un entier F en entrée et devons répondre « oui » ou « non » s'il est possible de terminer toutes les tâches avant ce temps F.

   Formuler cette version du problème en un programme linéaire en nombres entiers où l'objectif est vide.
3. Donner un algorithme polynomial pour résoudre le problème original étant donné un algorithme polynomial pour résoudre le problème de décision.
4. Supposer que tout point extrême de la relaxation fractionnaire du problème de décision contient au plus $|T| + |M|$ variables non-nuls. (Ce résultat peut être obtenu en regardant la dimension de la matrice A des contraintes $Ax \leq b$.)

   Soit x un point extrême et T_x l'ensemble des tâches placées par x de manière fractionnaire. Montrer que $|T_x| \leq |M|$.

5. Montrer que pour tout sous-ensemble de tâches $T' \subseteq T_x$, le nombre de machines où nous avons placé au moins une tâche de T' (de manière fractionnaire) est au moins $|T'|$.
6. Donner un algorithme pour arrondir x à une solution de valeur au plus deux fois la valeur de x.