Algorithmique et Programmation

TD n° 10 : Géométrie Algorithmique

École normale supérieure – Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

2014-2015

Exercice 1 Plus proches voisins

Proposer un algorithme de type « diviser-pour-régner » qui, étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, retourne pour chaque élément de $\mathcal{S}$ son plus proche voisin dans $\mathcal{S}$ en temps $O(n \log n)$.

Exercice 2 Plus proche paire par balayage

Proposer un algorithme qui, étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du plan, retourne la plus proche paire de points de $\mathcal{S}$ en temps $O(n \log n)$ en parcourant les points de $\mathcal{S}$ par abscisses croissantes (*i.e.* en balayant les points de la gauche vers la droite).

Exercice 3 Plus proche paire par algorithme probabiliste

Proposer un algorithme probabiliste qui, étant donné un ensemble $\mathcal{S}$ de n points du carré unité, retourne la plus proche paire de points de $\mathcal{S}$ en temps espéré $O(n)$. L'algorithme pourra utiliser une structure de dictionnaire idéalisée (où l'insertion et la recherche sont en temps constant) où les clés seront des éléments d'une partition en sous-carrés du carré unité (construite par une grille de pas constant) et les valeurs stockées seront les points contenus dans ce sous-carré.

Exercice 4 Parcours de Graham

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n points du plan. En partant du point de plus petite ordonnée de $\mathcal{S}$ (et s'il y a égalité, celui de plus petite abscisse parmi eux), et en parcourant les autres points dans un ordre bien choisi, proposer un algorithme qui étant donné $\mathcal{S}$ retourne son enveloppe convexe en temps $O(n \log n)$.

Exercice 5 Marche de Jarvis

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n points du plan. En partant d'un point de l'enveloppe convexe de de $\mathcal{S}$, proposer un algorithme pour « envelopper » les points de $\mathcal{S}$ dans un « papier cadeau » qui étant donné $\mathcal{S}$ retourne son enveloppe convexe en temps $O(nh)$ où h désigne le nombre de points de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$.

Exercice 6 Algorithme de Chan

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n points du plan et notons h le nombre de points de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$. Le but de cet exercice est d'obtenir un algorithme optimal de complexité $O(n \log h)$ qui étant donné $\mathcal{S}$ retourne l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$.

1. Proposer un algorithme qui, étant donnés un entier m, k polygones convexes $(P_1, \ldots, P_k)$ donnés par leur liste de sommets dans le plan et le sommet de plus petite ordonnée (et s'il y a égalité, celui de plus petite abscisse parmi eux), retourne les m premiers points de l'enveloppe convexe (par ordre lexicographique) de la réunion des polygones en temps $O(mk[\log(n_1) + \cdots + \log(n_k)])$ où n_i désigne le nombre de sommets de P_i (pour $i \in \{1, \ldots, k\}$).
2. En déduire un algorithme complexité $O(n \log h)$ qui, étant donnés $\mathcal{S}$ et h, retourne l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$.
3. Proposer une méthode pour « deviner » la valeur de h et obtenir un algorithme complexité $O(n \log h)$ qui, étant donné $\mathcal{S}$, retourne l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$.