Algorithmique et Programmation

TD n° 5 : Graphes II

École normale supérieure – Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

2013-2014

Vous aurez besoin du théorème suivant charactérisant les couplages parfaits dans les graphes bipartis.

Théorème 1 (Hall)**.** *Un graphe biparti (A, B) avec $|A| = |B|$ a un couplage parfait si et seulement si il n'existe pas d'ensemble $S \subseteq A$ tel que $|N(S)| < |S|$.*

Exercice 1. Couplage biparti

Montrer que si un graphe est biparti et d régulier (tous les sommets ont degré d) alors on peut partitioner ses arêtes en d couplages parfaits.

Exercice 2. Couplage biparti

Un *couplage saturant un ensemble* S est un couplage qui touche tous les sommets de S.

Pour un graphe biparti et connexe (A, B), montrer que s'il existe un couplage saturant $X \subseteq A$ et un autre couplage saturant $Y \subseteq B$ alors il existe un couplage qui sature $X \cup Y$ simultanément.

Donner un algorithme qui trouve un couplage saturant $X \cup Y$ à partir d'un couplage saturant X et un couplage saturant Y.

Exercice 3. Composantes impaires et couplages parfaits

Une *composante impaire* est une composante avec un nombre impaire de sommets et $c_O(G)$ est le nombre de composantes impaires dans un nouveau graphe G.

Montrer que si un graphe G a un couplage parfait alors $c_O(G-S) \leq |S|$ pour tout ensemble S de sommets de G.

Exercice 4. Composantes impaires et couplages parfaits

Le but de cet exercise est de montrer l'autre direction de l'exercise précédent avec une preuve par induction. Ensemble ils forment le Théorème de Tutte qui nous donne un certificat de non-existence d'un couplage parfait.

Soit G un graphe où $c_O(G - S') \leq |S'|$ pour tout ensemble de sommets S' de G et soit S un ensemble maximal de sommets dans G tel que $c_O(G - S) \geq |S|$.

1. Montrer que les composantes de $G - S$ sont tous impaires. Montrer que $c_O(G - S) = |S|$.
2. On contracte chaque composante de $G - S$ dans G à un sommet pour former un ensemble de sommets $\mathcal{C}$ dans un nouveau graphe H.
   Montrer que le graphe biparti $H[\mathcal{C} \cup S]$ a un couplage parfait.
3. Montrer que pour toute composante C_i de $G - S$ et sommet x_i dans C_i, la propriété initiale sur les composantes impaires est préservée dans le (sous)graphe $C_i - x_i$ (i.e., $c_O(G[C_i - x_i] - X) \leq |X|$ pour tout sous-ensemble X de $C_i - x$).
4. **Théorème de Tutte**
   Montrer qu'un graphe G a un couplage parfait si et seulement si $c_O(G - S) \leq |S|$ pour tout ensemble S de sommets de G.
5. **Formule de Berge**
   Soit $\mathrm{def}(G)$ le nombre de sommets qui ne sont pas couverts par un couplage maximum dans G.
   Montrer que
   $$\mathrm{def}(G) = \max_{S \subseteq V}(c_O(G - S) - |S|).$$
   Donner un algorithme qui trouve un ensemble S tel que $c_O(G - S) - |S| = \mathrm{def}(G)$.