Algorithmique et Programmation

TD n° 9 : Programmation linéaire

École normale supérieure – Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

2012-2013

Exercice 1. Pour chacun des problèmes d'optimisation linéaire suivant, donner la valeur optimale et la solution optimale x en fonction des paramètres $(n, \vec{c}, k)$ avec $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ et $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. *minimiser :* $\vec{c} \cdot \vec{x}$, *sous la contrainte :* $\mathbf{0} \leq \vec{x} \leq \mathbf{1}$
2. *minimiser :* $\vec{c} \cdot \vec{x}$, *sous la contrainte :* $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 1$
3. *maximiser :* $\vec{c} \cdot \vec{x}$, *sous la contrainte :* $\mathbf{1} \cdot \vec{x} = k$ et $\mathbf{0} \leq \vec{x} \leq \mathbf{1}$
4. *maximiser :* $\vec{c} \cdot \vec{x}$, *sous la contrainte :* $\mathbf{1} \cdot \vec{x} \leq k$ et $\mathbf{0} \leq \vec{x} \leq \mathbf{1}$

Exercice 2. Formuler le problème suivant comme un problème d'optimisation linéaire : *Trouver la plus grande boule fermée* $\mathcal{B}(x_c, R) = \{x \quad | \quad \|x - x_c\| \leq R\}$ *contenue dans un polyèdre donné* $\mathcal{P} = \{x | {}^t a_i \cdot x \leq b_i, i \in \{1, \ldots, m\}\}$.

Exercice 3. Considérons la famille de problèmes d'optimisation linéaire, indexée par n :

$$\begin{cases} \max \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \right) \text{ tel que} \\ \forall i \leq n, \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} 2 \cdot 10^{i-j} x_j \right) + x_i \leq 100^{i-1} \text{ et } \forall i \leq n, x_i \geq 0 \end{cases}$$

Résoudre le problème pour $n = 3$.

Exercice 4. Soient $k_1, \ldots, k_n$ des nombres réels positifs deux à deux distincts. Interpréter la solution du problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \textit{maximiser} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} j \cdot k_j \cdot x_{ij} \\ \textit{sous la contrainte} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, n\} \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, n\} \\ & x_{ij} \geq 0 \text{ pour tout } (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2 \end{array}$$

Exercice 5. Considérons le problème d'optimisation « homographique » suivant :

$$\begin{array}{ll} \textit{minimiser} & (\vec{c} \cdot \vec{x} + \gamma)/(\vec{d} \cdot \vec{x} + \delta) \\ \textit{sous la contrainte} & A\vec{x} \leq \vec{b} \end{array}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nous supposons que le polyèdre $\mathcal{P} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A\vec{x} \leq \vec{b}\}$ est borné et que $\vec{d} \cdot \vec{x} + \delta > 0$ pour tout $\vec{x} \in \mathcal{P}$. Montrer que l'on peut ramener le problème précédent au problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\begin{array}{ll} \textit{minimiser} & (\vec{c} \cdot \vec{y} + \gamma z) \\ \textit{sous la contrainte} & A\vec{y} - z\vec{b} \leq \mathbf{0} \\ & \vec{d} \cdot \vec{y} + \delta z = 1 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

avec $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}$

Exercice 6. Soit un graphe $G = (V, E, c)$ orienté pondéré de sommets V et d'arêtes $E \subseteq V^2$ de capacités positives $c : E \to \mathbb{Q}^+$. Soient $s, t \in V$. Nous cherchons à calculer le flot f maximum entre s et t. Montrer que ce problème peut s'écrire sous forme de problème d'optimisation linéaire. Redémontrer à l'aide des outils de la programmation linéaire le théorème « flot maximum - coupe minimale ».