Algorithmique et Programmation
Examen

École normale supérieure - Département d'informatique
algoL3@di.ens.fr

Lundi 19 Janvier 2015 de 15h30 à 18h30. Aucun document autorisé.

Problème 1 Cycle de poids moyen minimum

Le problème du cycle de poids moyen minimum est défini comme suit.
Entrée : Un graphe orienté $G = (V, E)$ avec poids (positifs ou négatifs) sur les arcs, $w(e)$ pour $e \in E$
Sortie : La valeur $\mu^* = \min\{\sum_{e \in C} w(e)/|C| \mid C \text{ cycle orienté}\}$. On note par $|C|$ le nombre d'arcs du cycle C, n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs de G.

Etanr donné un entier $k \geq 0$ et deux sommets $u, v \in V$, soit $\delta_k(u, v)$ le poids du plus court chemin de u à v dans le graphe et utilisant exactement k arcs : $\delta_k(u, v) = \min\{w(u, u_1) + w(u_1 u_2) + \cdots + w(u_{k-1} v) : (u, u_1) \in E, (u_i, u_{i+1}) \in E, (u_{k-1}, v) \in E\}$. (Ce chemin peut éventuellement passer par certains arcs plusieurs fois, auquel cas ces arcs sont comptés plusieurs fois.) S'il n' existe pas de tel chemin, on pose $\delta_k(u, v) = +\infty$. Soit $\delta(u, v)$ le poid d'un plus court chemin de u à v.

1. On suppose qu'il existe un algorithme A pour le problème du cycle de poids moyen minimum dans le cas particulier où G est fortement connexe, de complexité $O(mn)$. Montrer qu'alors il existe un algorithme pour le problème du cycle de poids moyen minimum dans le cas général, de complexité $O(mn + n)$.
   On suppose désormais que G est fortement connexe.
2. Montrer que si $\mu^* = 0$ alors G ne contient aucun cycle de poids total strictement négatif et que $\delta(u, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(u, v)$.
3. Soit C un cycle de poids 0 et u, v deux sommets de ce cycle. Soit x le poids du chemin de u à v le long du cycle C. Soit s un sommet de V. Montrer que $\delta(s, v) = \delta(s, u) + x$.
4. On suppose que $\mu^* = 0$. Montrer que $\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} \geq 0$.
5. On suppose que $\mu^* = 0$. Soit s un sommet de V. Montrer qu'il existe un sommet v du cycle de poids moyen minimum, tel que $\max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0$.
6. On suppose que $\mu^* = 0$. Soit s un sommet de V. Montrer que $\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0$.
7. Montrer que si on ajoute t pau oids de chaque arc de G, alors μ^* augmente de t.
8. (On ne suppose plus maintenant que $\mu^* = 0$.) Soit s un sommet de V.
   Montrer que $\min_{v \in V} \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{\delta_n(s,v) - \delta_k(s,v)}{n-k} = 0$.
9. Donner un algorithme de complexité $O(mn)$ pour calculer μ^*.

Problème 2 Calcul exact de déterminant

Le but de ce problème est de démontrer le théor'eme suivant. Soit D un déterminant 2×2 avec des entrées qui sont des entiers écrits sur b bits. Il existe un algorithme qui évalue le signe de D en utilisant uniquement de l'arithmétique 'a b bits. Cet algorithme fait au plus b itérations, o'u chaque itérations comprend $O(1)$ additions, soustractions, comparaisons ou divisions euclidiennes.

Soit $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

1. Montrer que sans perte de généralité on peut supposer que toutes les entrées de D sont différentes de 0.
2. Montrer que de plus, sans perte de généralité on peut supposer que toutes les entrées de D sont strictement positives.
3. Montrer que de plus, sans perte de généralité on peut supposer que $x_2 \geq x_1$ et $y_2 \geq y_1$.

4. Soient (k_1, x_r) définis par $x_2 = x_1 k_1 + x_r$ avec k_1 entier naturel et $0 \leq x_r < x_1$. On pose $y_r = y_2 - k_1 y_1$. Montrer que $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_r & y_r \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1 - x_r & y_1 - y_r \end{vmatrix}$.
5. Montrer que si $k_1 y_1 > 2^b$ alors $D < 0$.
6. On suppose que $k_1 y_1 \leq 2^b$. Montrer que si $y_r \notin [0, y_1]$ alors le signe de D peut être déterminé.
7. En examinant les quatre cas selon que x_r est plus petit ou plus grand que $x_1/2$ et que y_r est plus petit ou plus grand que $y_1/2$, montrer qu'on peut, soit déterminer le signe de D, soit réécrire D comme un nouveau déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2' & y_2' \end{vmatrix}$ tel que les entrées (x_2', y_2') sont plus petites que (x_2, y_2) d'un facteur 2 au moins.
8. En déduire un algorithme démontrant le théorème énoncé au début du problème.

Problème 3 Programmation linéaire en petite dimension

Soit H un ensemble de m demi-espaces de $\mathbb{R}^d$ et c un vecteur de $\mathbb{R}^d$. Soit B le cube défini par $\forall i : |x_i| \leq K$. On souhaite résoudre le programma linéaire $\max\{c \cdot x : x \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H \cap B\}$. On propose l'algorithme suivant.

— Si $m = 1$ alors on résoud le problème trivialement en $O(m)$. Sinon :
— Choisir $H \in \mathcal{H}$ uniformément au hasard. Soit $\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \{H\}$.
— Résoudre récursivement le problème $\max\{c \cdot x : x \in \bigcap_{H \in \mathcal{H}'} H \cap B\}$. Soit v le point de $\mathbb{R}$ réalisant ce maximum, s'il existe.
— Si v n'existe pas, alors le programme linéaire d'origine n'a pas de solution.
— Si $v \in H$ alors le résultat est v avec valeur $c \cdot v$.
— Dans les autres cas, soit h l'hyperplan bornant H, soit $\bar{c}$ la projection orthogonale de c sur h, soit $\bar{\mathcal{H}}' = \{F \cap h : F \in \mathcal{H}'\}$ et $\bar{B}$ défini similairement. Résoudre récursivement le problème $\max\{\bar{c} \cdot x : x \in \bigcap_{H \in \bar{\mathcal{H}}'} H \cap \bar{B}\}$ et retourner le résultat.

1. On suppose les hyperplans en position générale : aucun point d'appartient à plus de d hyperplans. On suppose que le programme linéaire a une solution. Quelle est la probabilité p de l'événement $v \notin H$?
2. Montrer que la complexité moyenne de l'algorithme satisfait $T(d, m) = T(d, m-1) + pT(d-1, m)$.
3. En déduire que la complexité moyenne de l'algorithme est $O(d!m)$.

Problème 4 Flots

On considère le problème du flot maximum. Pour chacune des assertions suivantes, dire si l'assertion est vraie ou fausse, avec un bref argument.

1. Dans tout flot maximum f, il n'y a pas de cycle dont tous les arcs aient un flot strictement positif.
2. Il existe un flot maximum tel qu ;il n'y ait pas de cycle dont tous les arcs aient un flot strictement positif.
3. Si tous les arcs ont des capacités distinctes, alors le flot maximum est unique.
4. Si on multiplie la capacité de chaque arc par $\lambda > 0$ alors la coupe minimale reste la même.
5. Si on ajoute $\lambda > 0$ à la capacité de chaque arc alors la coupe minimale reste la même.
6. Si on ajoute $\lambda > 0$ à la capacité de chaque arc alors la valeur du flot maximum augmente d'un multiple entier de λ.