

# Algorithmique et Programmation

## Devoir n° 1

École normale supérieure – Département d'informatique  
algoL3@di.ens.fr

2015-2016

Le but de ce devoir est d'étudier le problème d'empaquetage (en anglais, *bin-packing*).

Étant donné un entier  $n$  et un ensemble  $U = (u_1, \dots, u_n)$  de  $n$  objets, auxquels est associée une taille  $s(u_i) \in [0, 1]$ , trouver une partition de  $U$  en  $k$  sous-ensembles  $X_1, \dots, X_k$  de  $U$ ,  $k$  étant choisi minimum et chaque ensemble  $X_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , de la partition tel que

$$\sum_{i \in X_j} s(u_i) \leq 1.$$

1. L'algorithme *NextFit* est le suivant :

**Algorithme Next Fit**

Pour chaque objet  $u_\ell$

    S'il l'objet tient dans la dernière boîte utilisée

    Alors mettre  $u_\ell$  dans cette boîte

    Sinon fermer la boîte en cours et mettre  $u_\ell$  dans une nouvelle boîte

Pour une instance  $I$  du problème *bin-packing*, notons  $OPT(I)$  l'optimum correspondant et  $NF(I)$  le nombre de boîtes ouvertes par l'algorithme *Next Fit*.

(a) Montrer que

$$NF(I) \leq 2 \cdot OPT(I) - 1,$$

et que cette inégalité est optimale.

(b) Supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons  $s(u_i) < \gamma$ . Montrer que

$$NF(I) \leq \left\lceil \frac{OPT(I)}{1 - \gamma} \right\rceil.$$

2. L'algorithme *First Fit Decreasing* est le suivant :

**Algorithme First Fit Decreasing**

Trier les  $u_\ell$  par ordre décroissant de taille  $s(u_\ell)$

Pour chaque objet  $u_\ell$

    Considérer les boîtes par ordre d'ouverture

    S'il existe une boîte dans laquelle  $u_\ell$  tiendrait

    Alors mettre  $u_\ell$  dans la première telle boîte

    Sinon mettre  $u_\ell$  dans une nouvelle boîte

Pour une instance  $I$  du problème *bin-packing*, notons  $FFD(I)$  le nombre de boîtes ouvertes par l'algorithme *First Fit Decreasing*.

(a) Supposons que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons  $s(u_i) \in ]1/3, 2/3[$ . Montrer que

$$FFD(I) = OPT(I).$$

(b) En déduire que si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons  $s(u_i) \in ]1/3, 1]$ , alors

$$FFD(I) = OPT(I).$$

(c) En déduire que pour une instance  $I$  du problème *bin-packing*, nous avons

$$FFD(I) \leq \frac{3}{2} \cdot OPT(I) + 1.$$