Algorithmique et Programmation

Devoir n° 1

École normale supérieure – Département d'informatique
`algoL3@di.ens.fr`

2014-2015

Le but de ce devoir est d'étudier le problème d'enpaquetage (en anglais, *bin-packing*).

Étant donnés un entier n et un ensemble $U = (u_1, \cdots, u_n)$ de n objets, auxquels est associée une taille $s(u_i) \in [0, 1]$, trouver une partition de U en k sous-ensemble X de U, k étant choisi minimum et chaque ensemble X de la partition tel que

$$\sum_{i \in X} s(u_i) \leq 1.$$

1. L'algorithme *NextFit* est le suivant :

   > **Algorithme Next Fit**
   > Pour chaque objet u_ℓ
   > S'il l'objet tient dans la dernière boîte utilisée
   > Alors mettre u_ℓ dans cette boîte
   > Sinon fermer la boîte en cours et mettre u_ℓ dans une nouvelle boîte

   Pour une instance I du problème *bin-packing*, notons $OPT(I)$ l'optimum correspondant et $NF(I)$ le nombre de boîtes ouvertes par l'algorithme *Next Fit*.

   (a) Montrer que
   $$NF(I) \leq 2 \cdot OPT(I) - 1,$$
   et que cette inégalité est optimale.

   (b) Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $s(u_i) < \gamma$. Montrer que
   $$NF(I) \leq \left\lceil \frac{OPT(I)}{1 - \gamma} \right\rceil,$$

2. L'algorithme *First Fit Decreasing* est le suivant :

   > **Algorithme First Fit Decreasing**
   > Trier les u_ℓ par ordre décroissant de taille $s(u_\ell)$
   > Pour chaque objet u_ℓ
   > Considérer les boîtes par ordre d'ouverture
   > S'il existe une boîte dans laquelle u_ℓ tiendrait
   > Alors mettre u_ℓ dans la première telle boîte
   > Sinon mettre u_ℓ dans une nouvelle boîte

   Pour une instance I du problème *bin-packing*, notons $FFD(I)$ le nombre de boîtes ouvertes par l'algorithme *First Fit Decreasing*

   (a) Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $s(u_i) \in]1/3, 2/3[$. Montrer que
   $$FFD(I) = OPT(I).$$

   (b) En déduire que si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, nous avons $s(u_i) \in]1/3, 1]$, alors
   $$FFD(I) = OPT(I).$$

   (c) En déduire que pour une instance I du problème *bin-packing*, nous avons
   $$FFD(I) \leq \frac{3}{2} \cdot OPT(I) + 1.$$