Langages formels, calculabilité et complexité
TD3

13 octobre 2016

Exercice 1 Grammaire → langage

Quels sont les langages engendrés par ces grammaires ? Justifier.

1. $$\begin{array}{lcl} S & \to & aSBC + aBC \\ CB & \to & BC \\ aB & \to & ab \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} bB & \to & bb \\ bC & \to & bc \\ cC & \to & cc \end{array}$$

2. $$\begin{array}{lcl} S & \to & CD \\ C & \to & aCA + bCB \\ AD & \to & aD \\ BD & \to & bD \\ Aa & \to & aA \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} Ab & \to & bA \\ Ba & \to & aB \\ Bb & \to & bB \\ C & \to & \varepsilon \\ D & \to & \varepsilon \end{array}$$

3. $S \to aS + aSbS + \varepsilon$

Exercice 2 Forme normale de Chomsky

Definition 1. *Grammaire CNF*
Une grammaire est sous Forme Normale de Chomsky (CNF) si toutes ses productions sont de la forme :

$$A \to BC \quad ou \quad A \to a$$

1. Proposer des transformations pour les règles suivantes afin de les mettre sous forme normale de Chomsky :
   – $A \to bC$
   – $A \to Bc$
   – $A \to bc$
   – $A \to BCD$
   – $A \to bCD$
   – $A \to \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ avec $\alpha_i \in \Sigma \cup N$
   – $A \to \alpha_1 \cdots \alpha_p, p \geq 3$
2. Soit $G = (\Sigma, N, P, S)$ une grammaire algébrique propre. Proposer un algorithme qui transforme G en G' une grammaire sous forme normale de Chomsky G'.
3. Soit $u \in \Sigma^+$, montrer par récurrence sur n que $\forall A \in N, A \vdash_G^n u \Rightarrow A \vdash_{G'}^* u$.
4. Soit $u \in \Sigma^+$, montrer par récurrence sur n que $\forall A \in N, A \vdash_{G'}^n u \Rightarrow A \vdash_G^* u$.

Exercice 3 Langage → grammaire

Donner des grammaires engendrant les langages suivants. Justifier

1. $\{a^i b^j c^k, i > j\}$
2. $\{a^i b^j c^k, i \neq j\}$
3. $\{a^{2^n}, n \geq 0\}$
4. $\{a^{n^2}, n \geq 0\}$

Exercice 4 Lemme de l'étoile

Lemme 1. *(de l'étoile)*

Si L est un langage algébrique, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall u \in L$, $|u| \geq N \Rightarrow \exists x, v, y, w, z \in \Sigma^*, u = xvywz$ et :

- $vw \neq \epsilon$,
- $|vyw| \leq N$,
- $\forall i \geq 0, xv^i yw^i z \in L$.

En utilisant le Lemme de l'étoile montrer que les langages suivants ne sont pas algébriques.

1. $\{a^i b^j c^k, i < j < k\}$
2. $\{a^n b^n c^m, n \leq m \leq 2n\}$
3. $\{a^{2^n}, n \geq 0\}$
4. $\{a^{n^2}, n \geq 0\}$