Langages formels, calculabilité et complexité
TD2

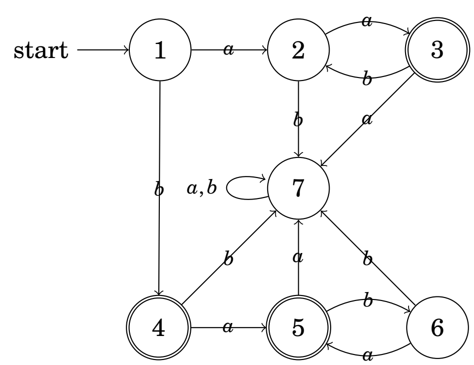
6 octobre 2016

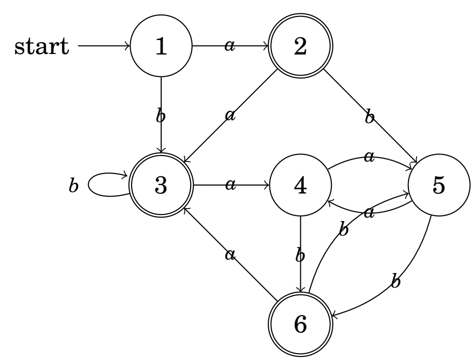
Exercice 1 Automates et expressions régulières

1. Construire un automate, un automate déterministe et l'automate minimal de l'expression régulière $a(b+bc^*c)^*c$.
2. Soit L le langage des mots sur l'alphabet $\{a,b,c\}$ satisfaisant les contraintes suivantes :
   – Il n'y a pas deux a adjacents.
   – S'il y a un b, au moins une occurrence de b est suivie d'un c.
   Écrire une expression régulière pour L et construire l'automate minimal de L.

Exercice 2 Minimisation

Minimiser les automates suivants.

1. 

2. 

Exercice 3 Algorithme de Brzozowski

Un automate est émondé si tout état est contenu dans un chemin acceptant. Un automate est co-déterministe si l'automate retourné (dérivé en invertissant tous les arcs et les ensembles des états initiaux et finaux) est déterministe.

1. Soit $\mathscr{A}$ un automate co-déterministe émondé et $\mathscr{B}$ le déterminisé de $\mathscr{A}$ par construction par sous-ensembles. Montrer que $\mathscr{B}$ est minimal.
2. En déduire une nouvelle méthode de minimisation.
3. Quelle est la complexité en temps du nouvel algorithme ?

Exercice 4 Déterminisation

Soit Σ un alphabet de n lettres, on considère le langage L des mots qui ne contiennent pas toutes les lettres.

1. Donner une expression régulière et un automate reconnaissant L pour $\Sigma = \{a, b, c\}$.
2. Donner un automate non-déterministe reconnaissant L en $n+1$ états.
3. Donner le nombre minimal d'état d'un automate déterministe reconnaissant L.

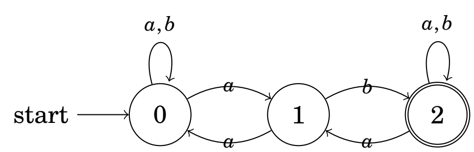
Exercice 5 Myhill-Nerode

Trouver les quotients à gauche et l'automate minimal des langages suivants :

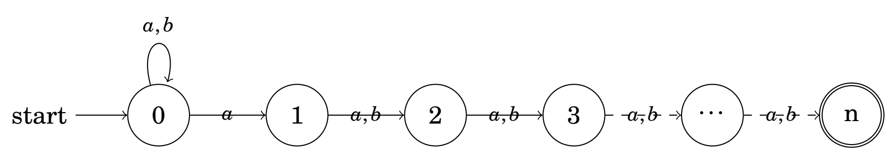
1. $b(ba^*)^*$
2. $\{a^i b^j \mid i+j \text{ est pair}\}$
3. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ contient exactement une occurrence du facteur } aaba\}$

Exercice 6 Déterminisation(2)

1. Déterminiser l'automate suivant.



2. Soit un automate $A = (Q, \Sigma, Q_0, F, \delta)$ fini. Quel sera, au pire, le nombre d'états d'un automate fini déterministe $B = (Q', \Sigma, Q'_0, F', \delta')$ reconnaissant le même langage (en fonction de $|Q|$) ?
3. Considérons l'automate suivant A (reconnaissant l'ensemble des mots de $\{a,b\}^*$ dont la n-ième lettre partant de la fin est un a), combien d'états environ comporte son déterminisé ?



4. Soit $B = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ un automate fini reconnaissant le même langage, montrer que B est complet (*i.e.* si $u \in \Sigma^*$, alors $\delta(q_0, u)$ existe).
5. Prouver que la fonction ϕ :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{n-1} & \rightarrow & Q \\ u & \mapsto & q_u = \delta(q_0, u) \end{array}$$

est injective. En conclure que la déterminisation de A est au mieux exponentielle en nombre d'états.